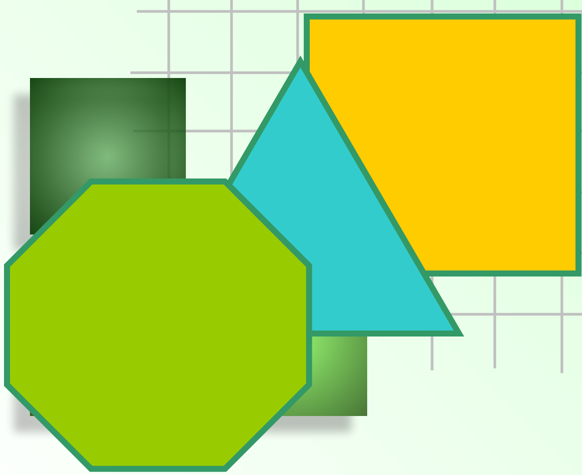
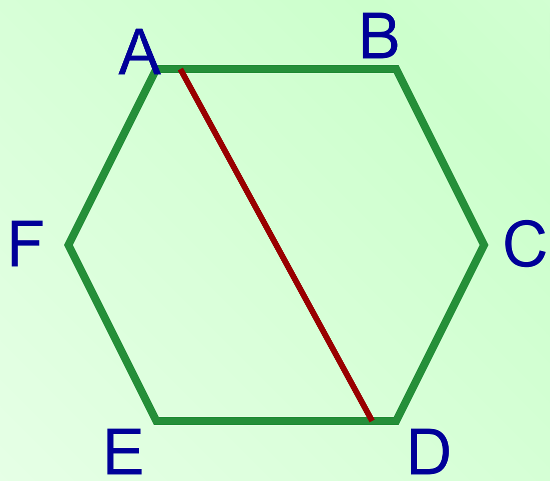
Правильні многокутники

9 клас



Многокутник



Проста замкнена ламана, сусідні ланки якої не лежать на одній прямій називається многокутником.

Вершини ламаної називаються вершинами многокутника, а ланки ламаної - сторонами многокутника

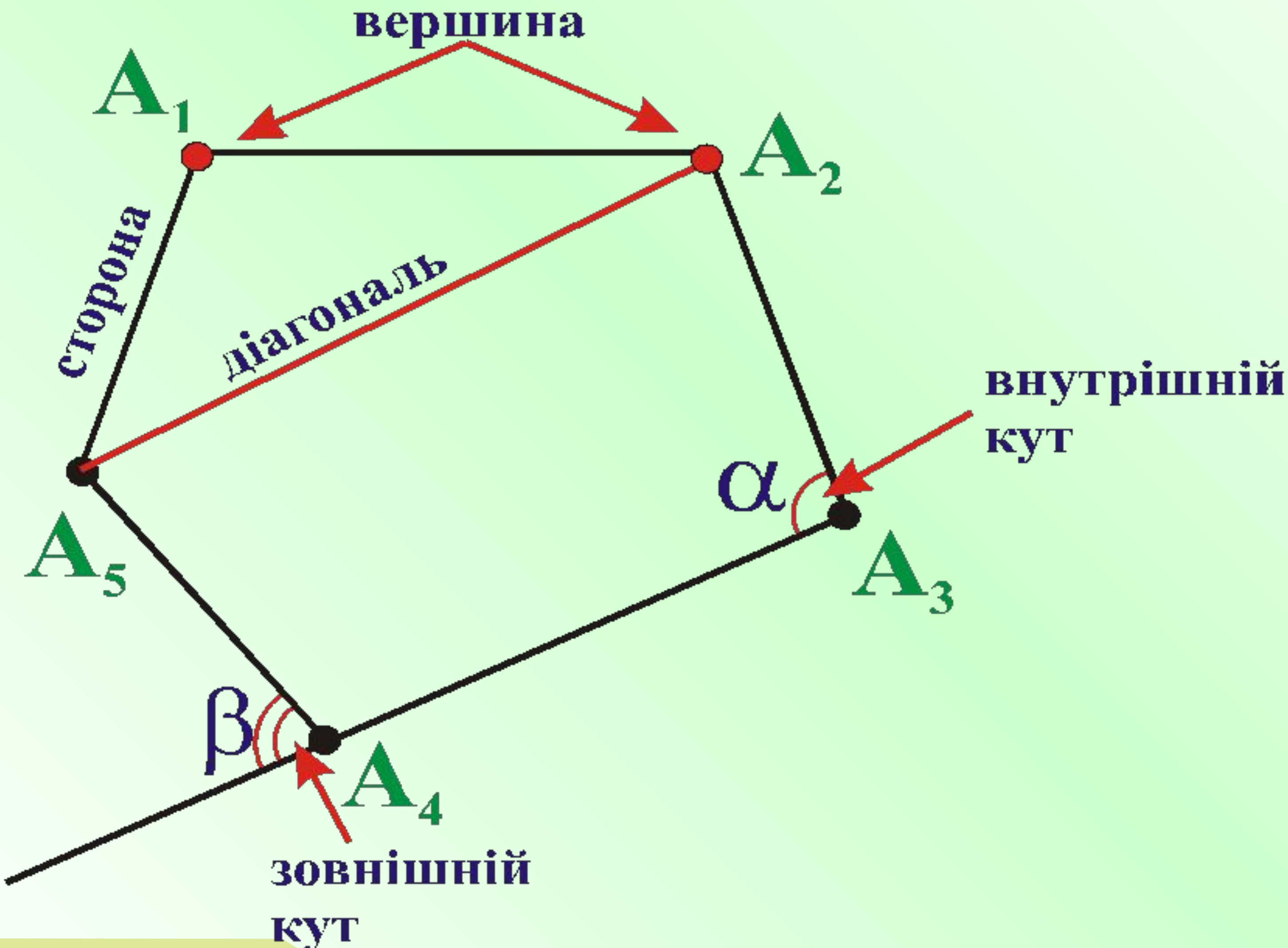
Відрізки, які з'єднують несусідні вершини многокутника, називають діагоналями.

AD - діагональ

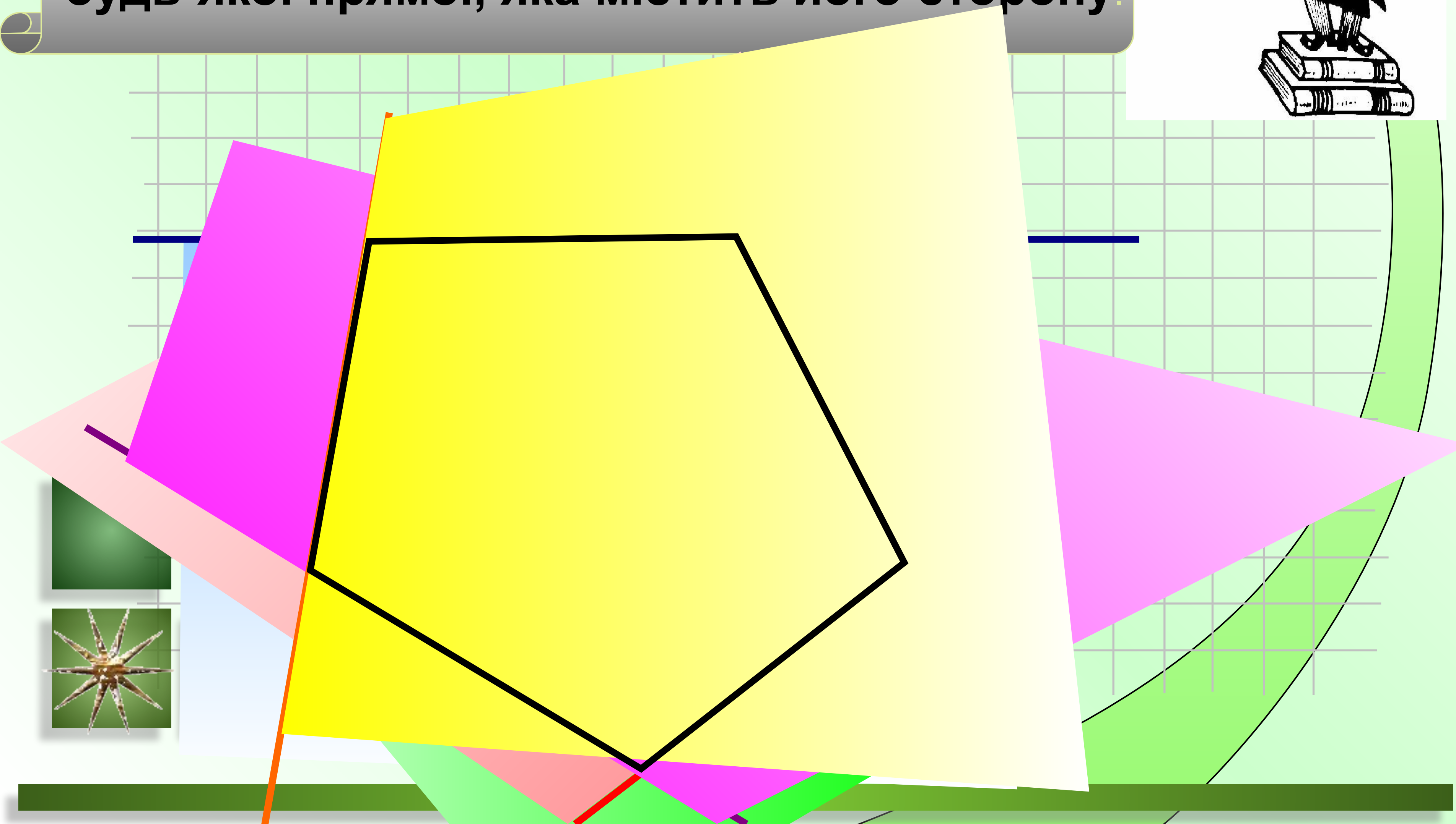
Многокутник з n- вершинами, тобто з n- сторонами, називається n-кутником.

Периметром многокутника називають суму довжин усіх його сторін   ***P=AB+BC+CD+DE+AE***

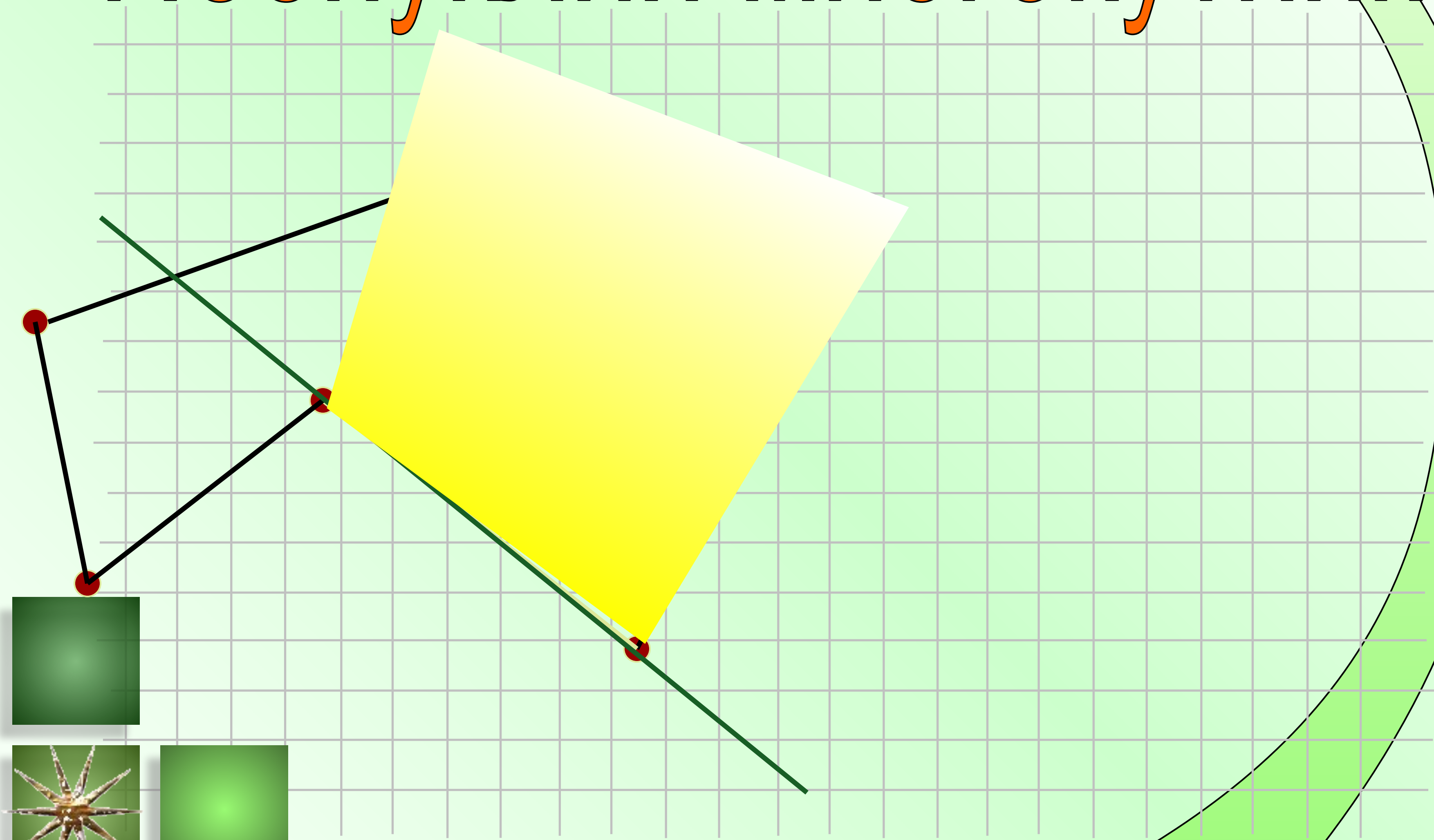
Елементи многокутника



Опуклим **називається многокутник, якщо він лежить в одній півплощині відносно будь-якої прямої, яка містить його сторону.**

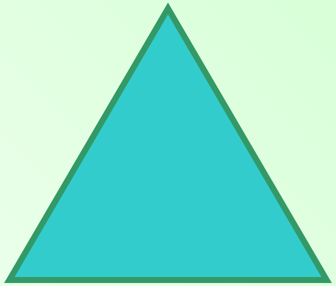


Неопуклий многокутник

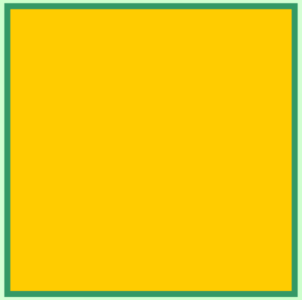


Правильні многокутники

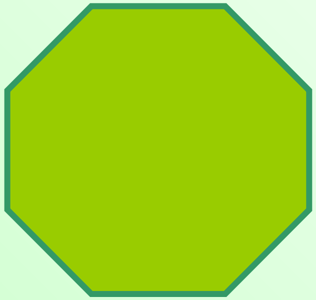
Означення. ***Многокутник називається правильним, якщо у нього всі сторони рівні і всі кути рівні.***



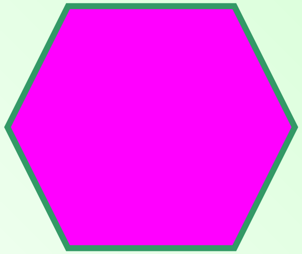
Правильний трикутник



Правильний чотирикутник



Правильний восьмикутник



Правильний шестикутник

Властивості опуклих многокутників

1. З кожної вершини можна провести *n-3* діагоналі.

2. Кількість усіх діагоналей дорівнює $\frac{n(n-3)}{2}$;

3. Для будь-якої сторони *a* справедливо, що $a<P$ (*P* – периметр *n*-кутника).

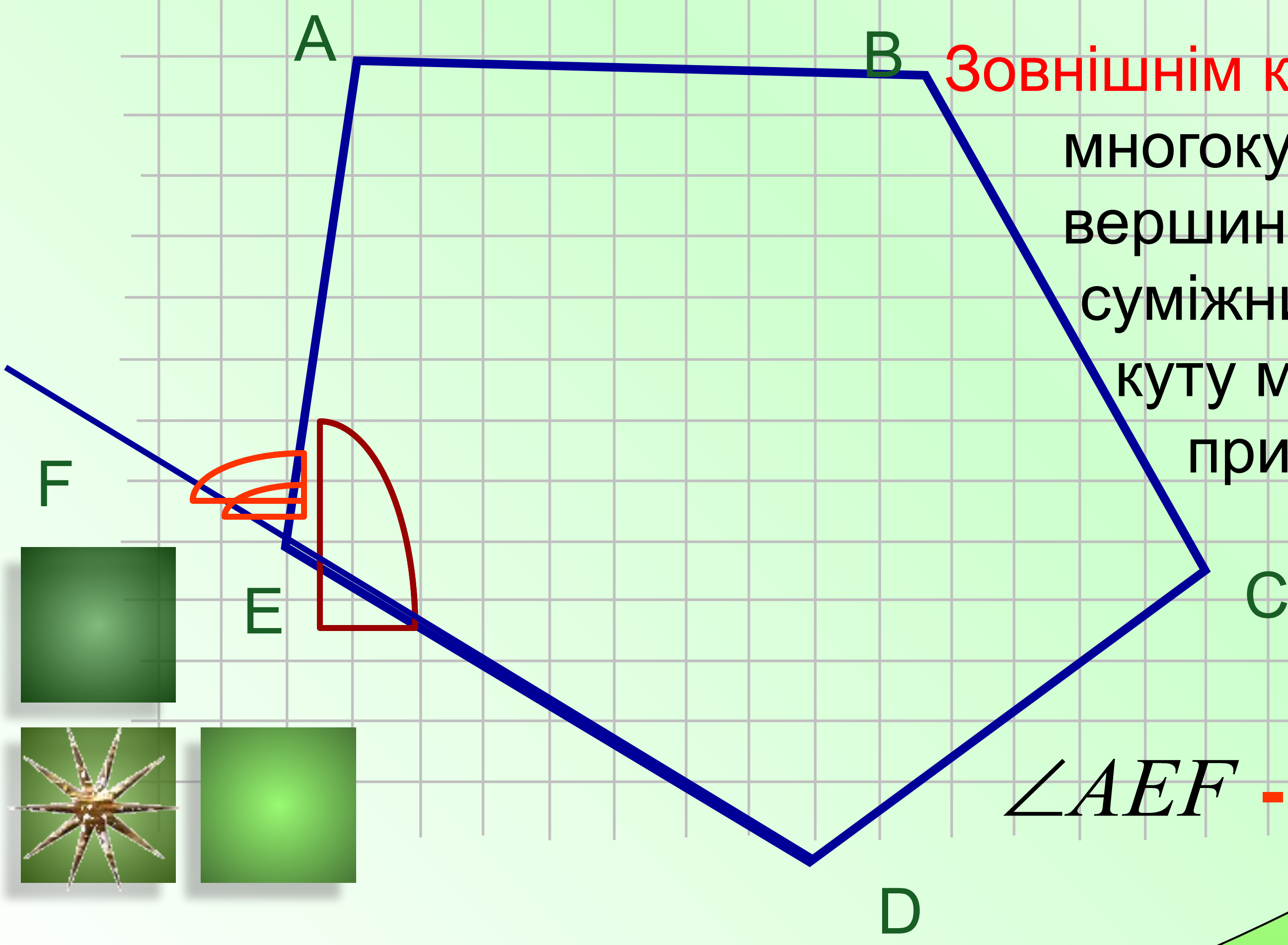
4. Периметр правильного n-кутник *P=an* (*P* – периметр, *a* – сторона)

Кути многокутника

Кутом (внутрішнім) опуклого многокутника при даній вершині називається кут, утворений його сторонами, що сходяться в цій вершині.

$\angle AED$ **- внутрішній кут**

Зовнішнім кутом опуклого многокутника при даній вершині називається кут, суміжний внутрішньому куту многокутника, при цій вершині.



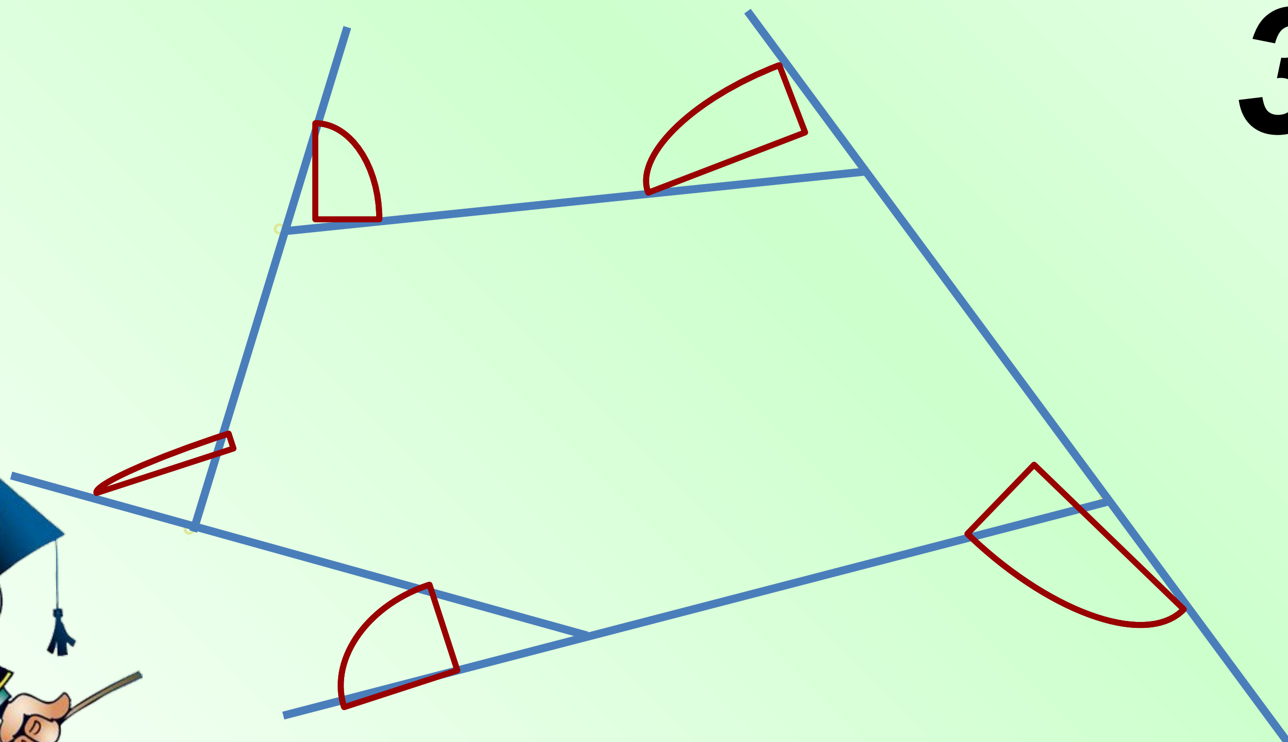
$\angle AEF$ **- зовнішній кут**

Сума кутів опуклого n – кутника дорівнює

$180° \cdot (n-2)$

Сума зовнішніх кутів опуклого многокутника дорівнює

360°

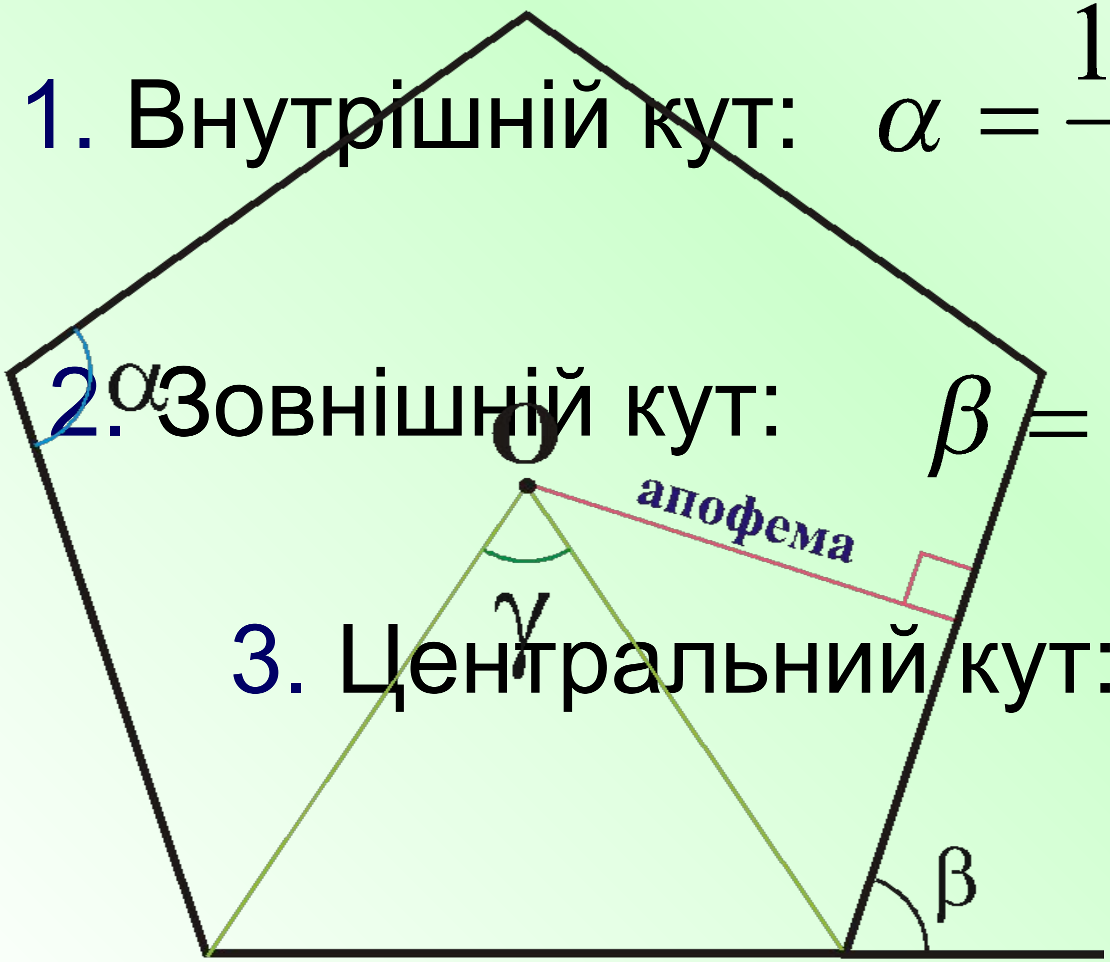


Кути правильного n-кутника

1. Внутрішній кут: $\alpha = \dfrac{180^\circ(n-2)}{n};$

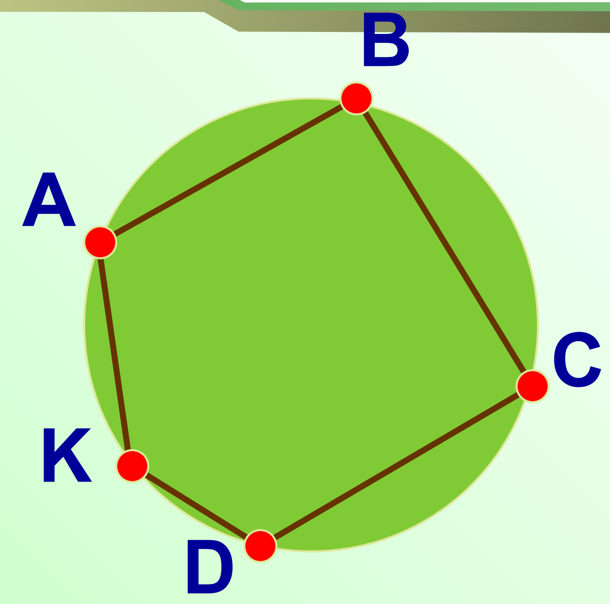
2. Зовнішній кут: $\beta = \dfrac{360^\circ}{n};$

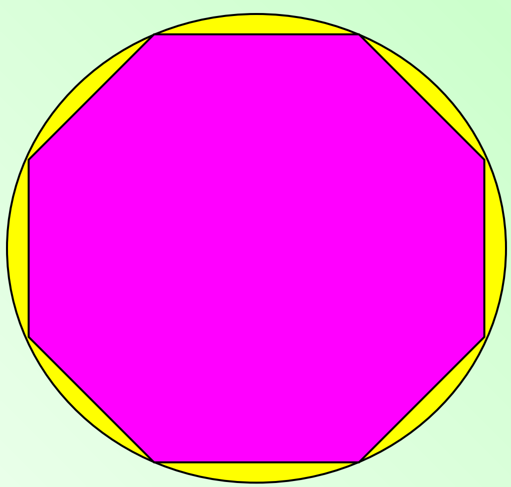
3. Центральний кут: $\gamma = \dfrac{360^\circ}{n};$

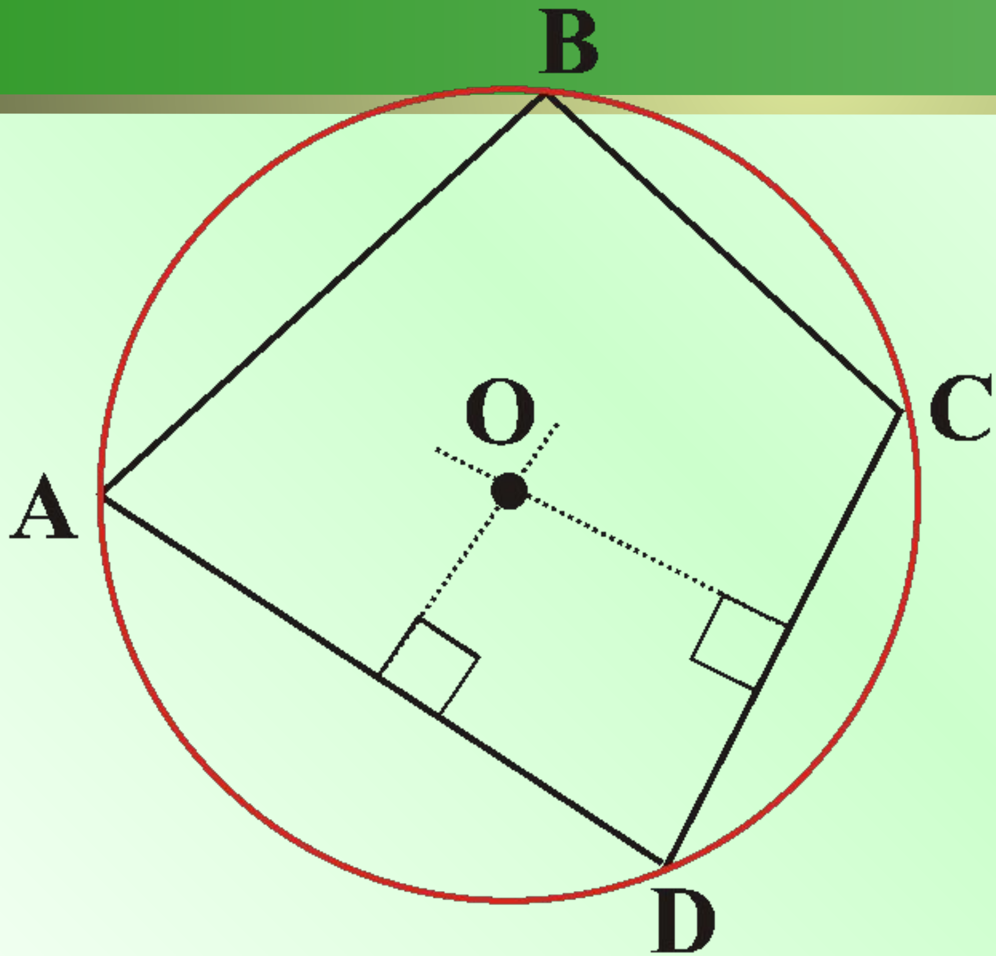


Вписані і описані правильні многокутники

Многокутник називається вписаним у коло, якщо всі його вершини лежать на деякому колі.





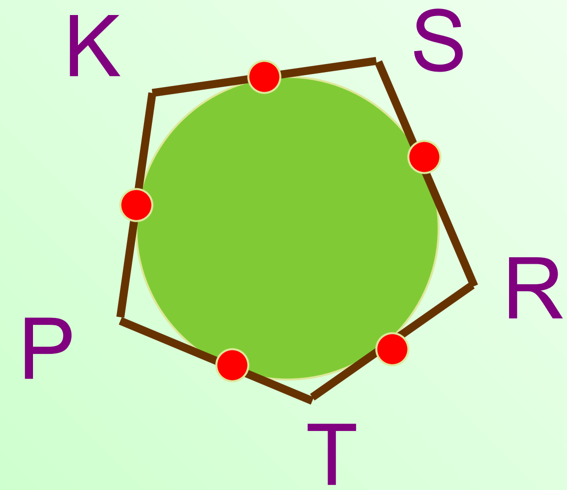


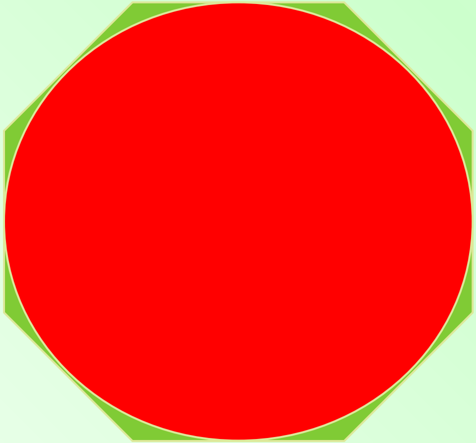
О - точка перетину серединних перпендикулярів

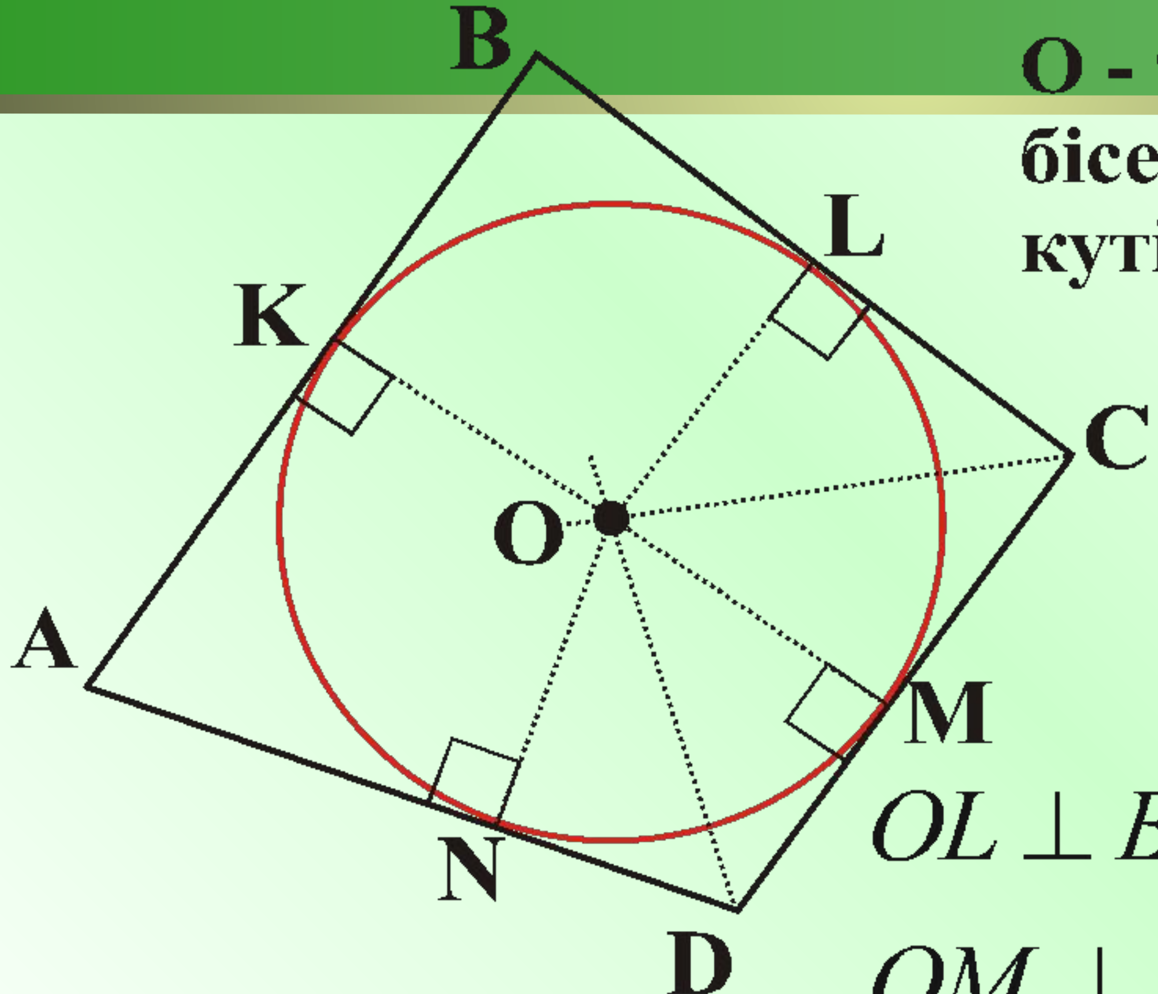
AO = OB = OC = OD = R

Вписані і описані правильні многокутники

Многокутник називається описаним навколо кола, якщо всі його сторони дотикаються до деякого кола.







O - точка перетину бісектрис внутрішніх кутів многокутника.

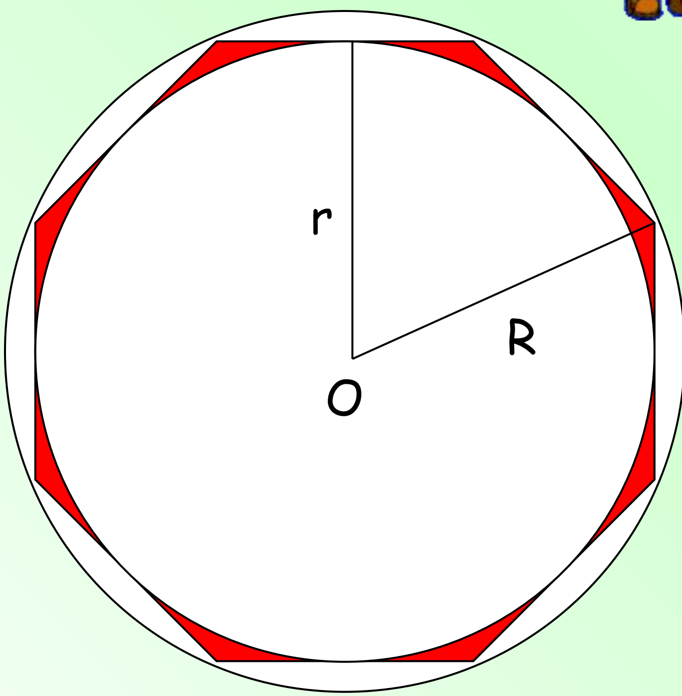
$OL \perp BC, \quad OK \perp AB,$

$OM \perp DC, \quad ON \perp AD$

OL = OK = OM = ON = r

Вписані і описані правильні многокутники

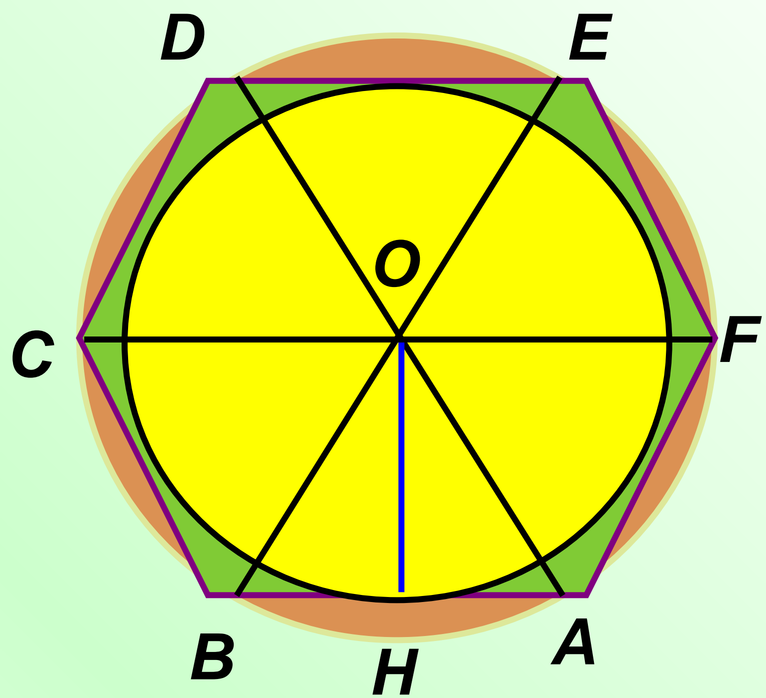
Будь-який правильний многокутник є одночасно вписаним і описаним, причому центри його описаного і вписаного кіл збігаються.



Формули радіусів вписаних і описаних кіл правильних многокутників

Дудник Н.М.

Сторона многокутника і радіус вписаного кола



OA – радіус описаного кола (R)

OH – радіус вписаного кола (r)

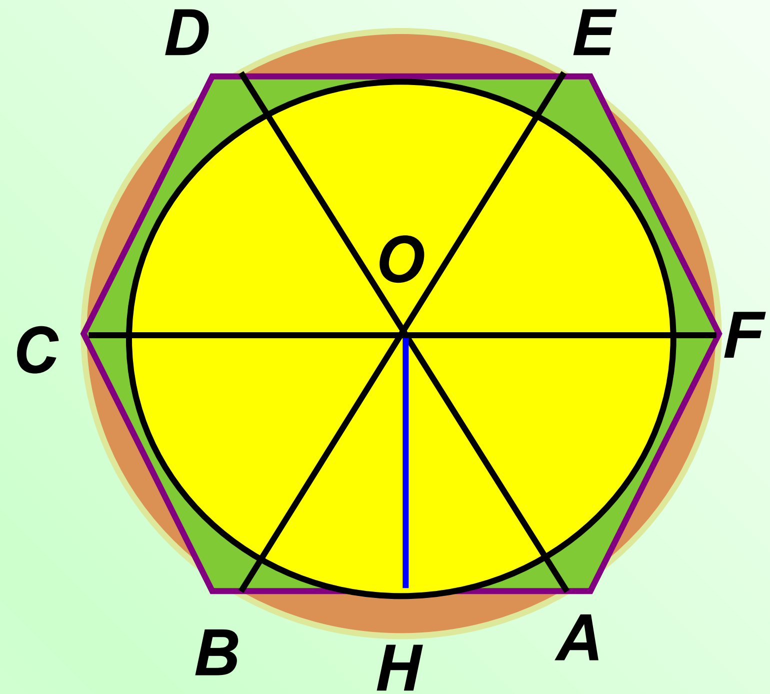
AB – сторона правильного n-кутника (a_n)

Сторона многокутника і радіус вписаного кола

$$\angle AOB = \frac{360^0}{n}$$

$$\angle AOH = \frac{180^0}{n}$$

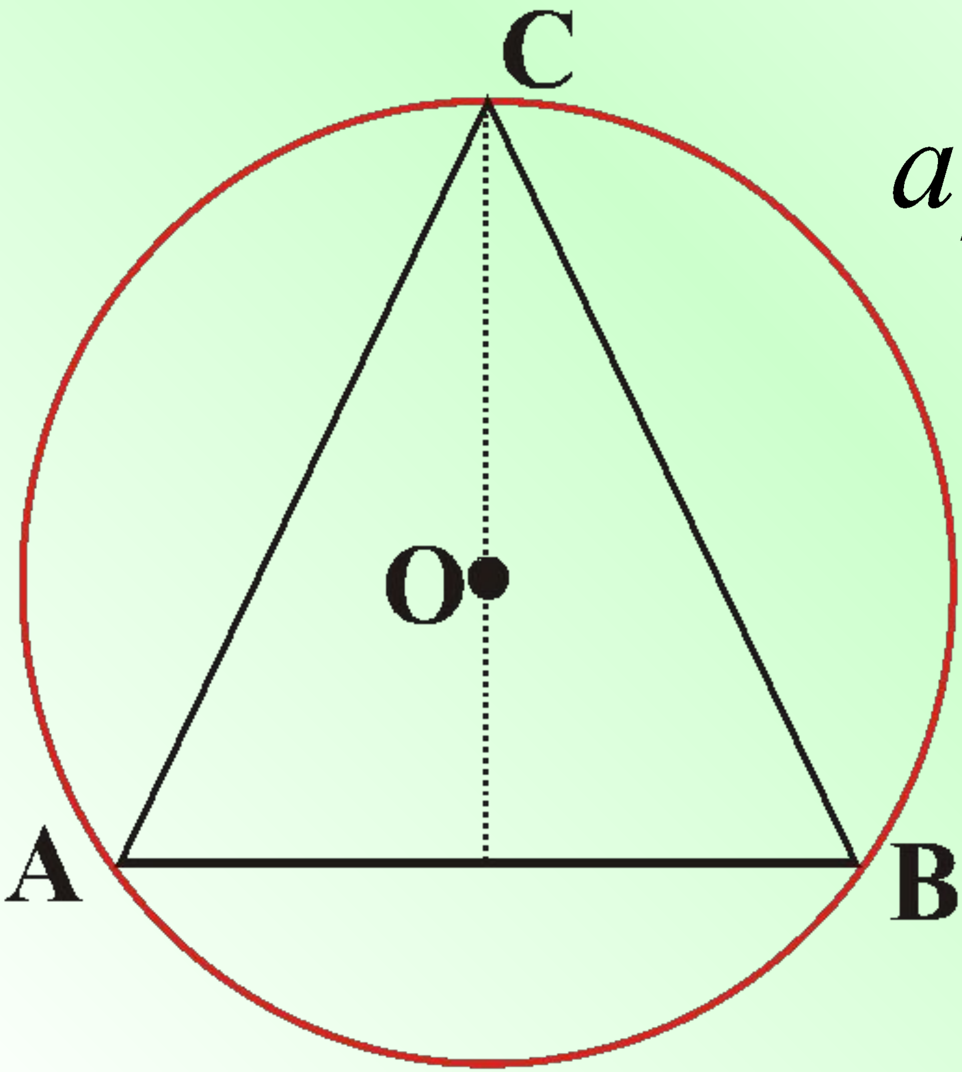
$$a_n = 2R\sin\frac{180^0}{n}$$



$$r = R\cos\frac{180^0}{n}$$

Трикутник

n = 3

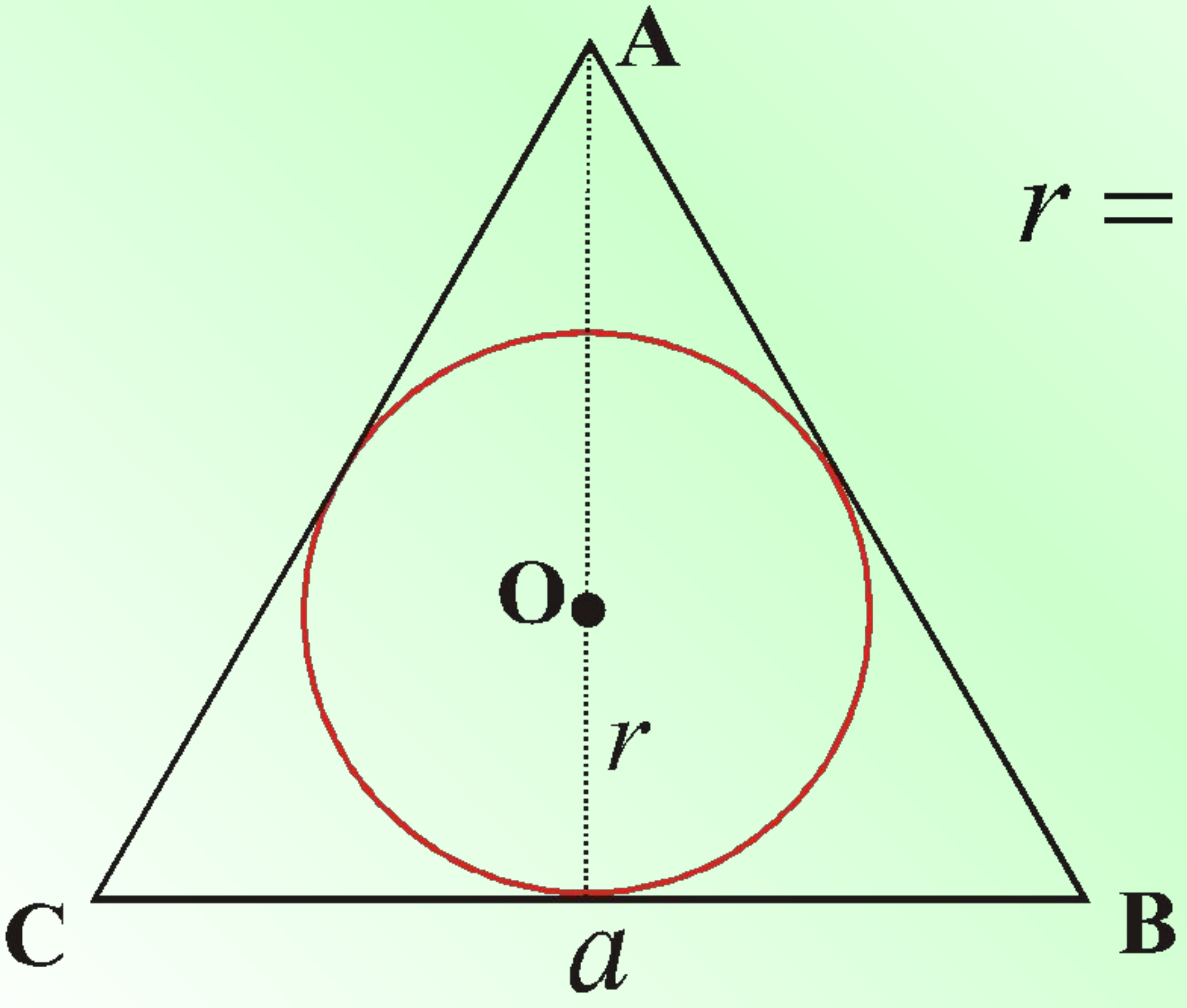


$$a_n = 2R\sin\frac{180^0}{n}$$

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\grave{a}_3 = R\sqrt{3}$$

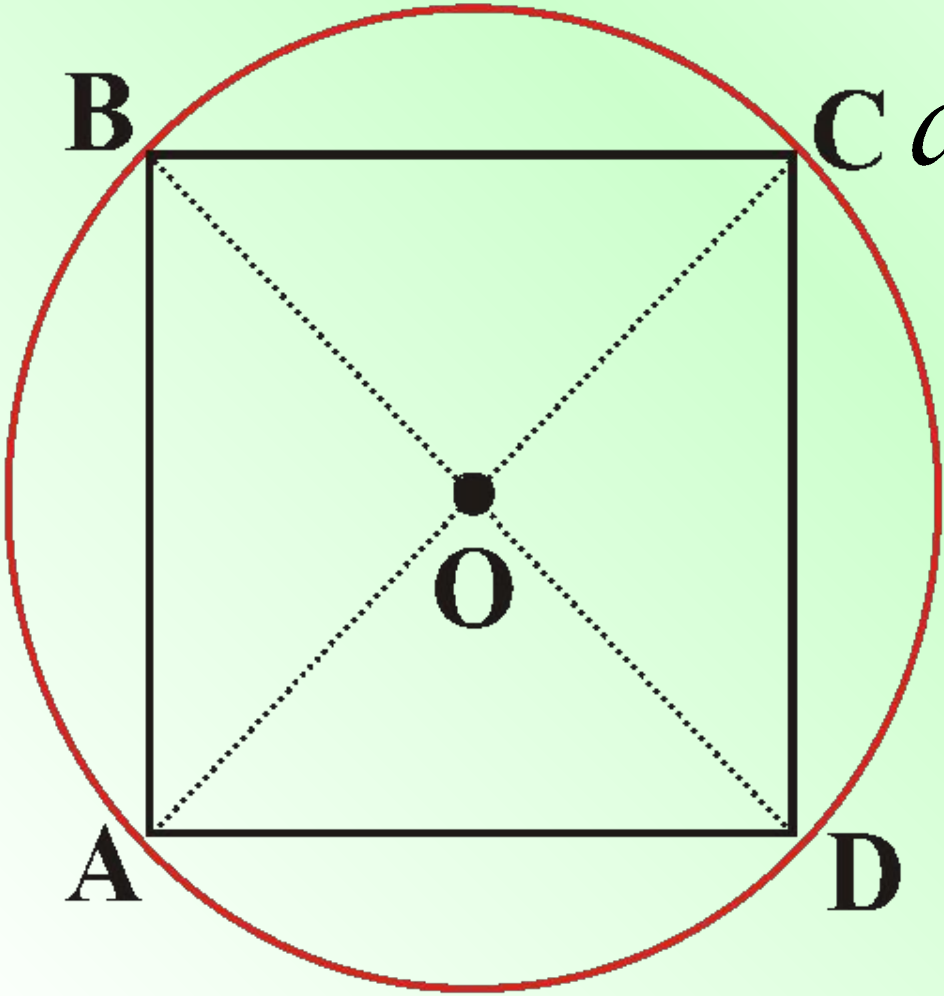
Правильний трикутник



$$r = \frac{R}{2} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

Чотирикутник (квадрат)

$n = 4$

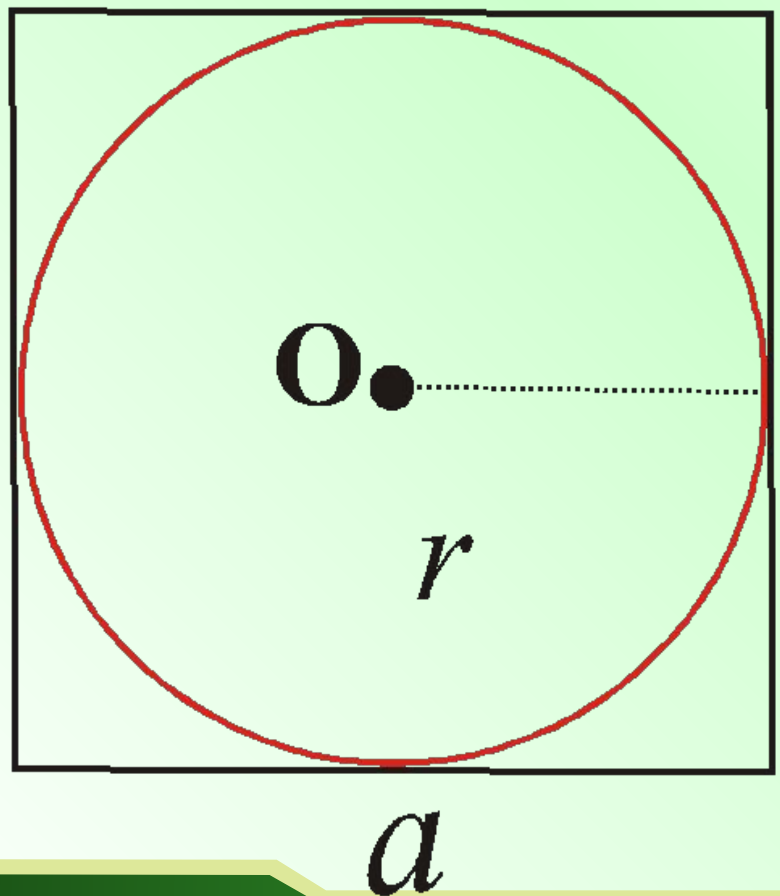


$$a_n = 2R\sin\frac{180^0}{n}$$

$$R = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\grave{a}_4 = R\sqrt{2}$$

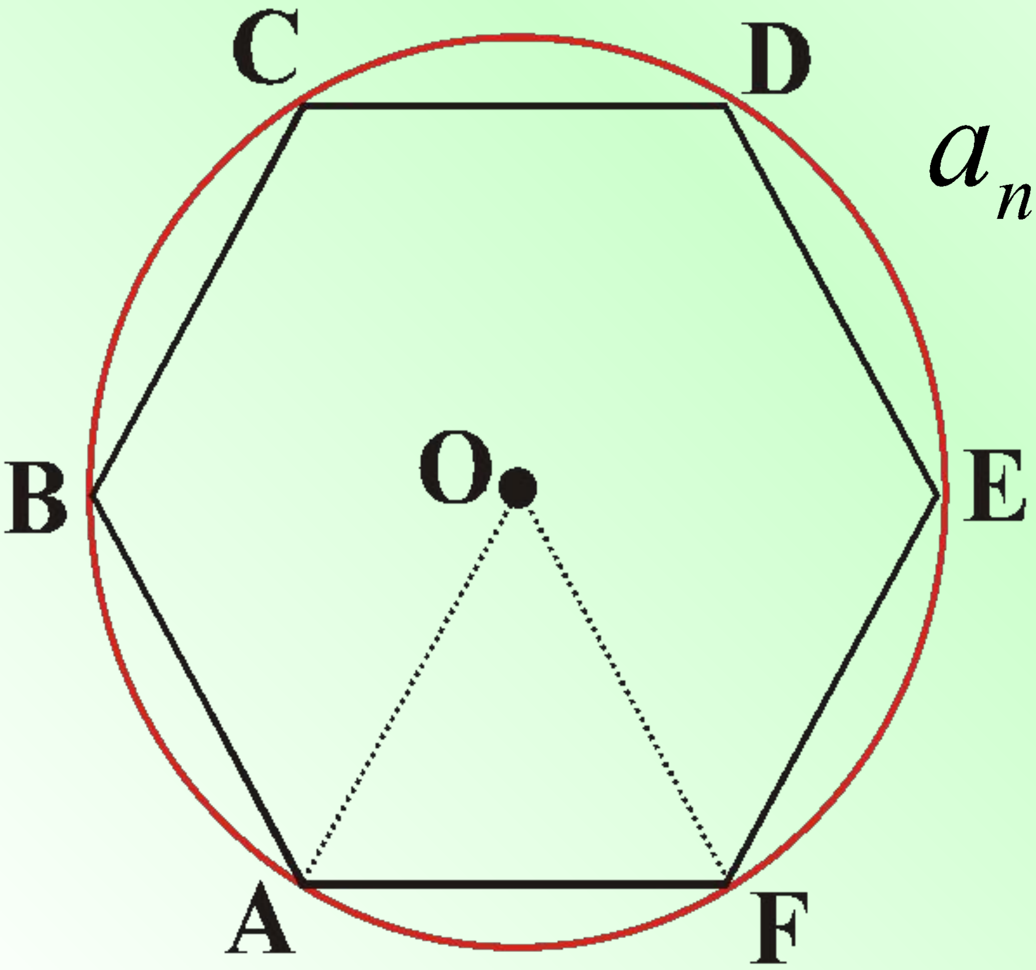
Правильний чотирикутник (квадрат)



$$r = \frac{a}{2}$$

Шестикутник

n = 6

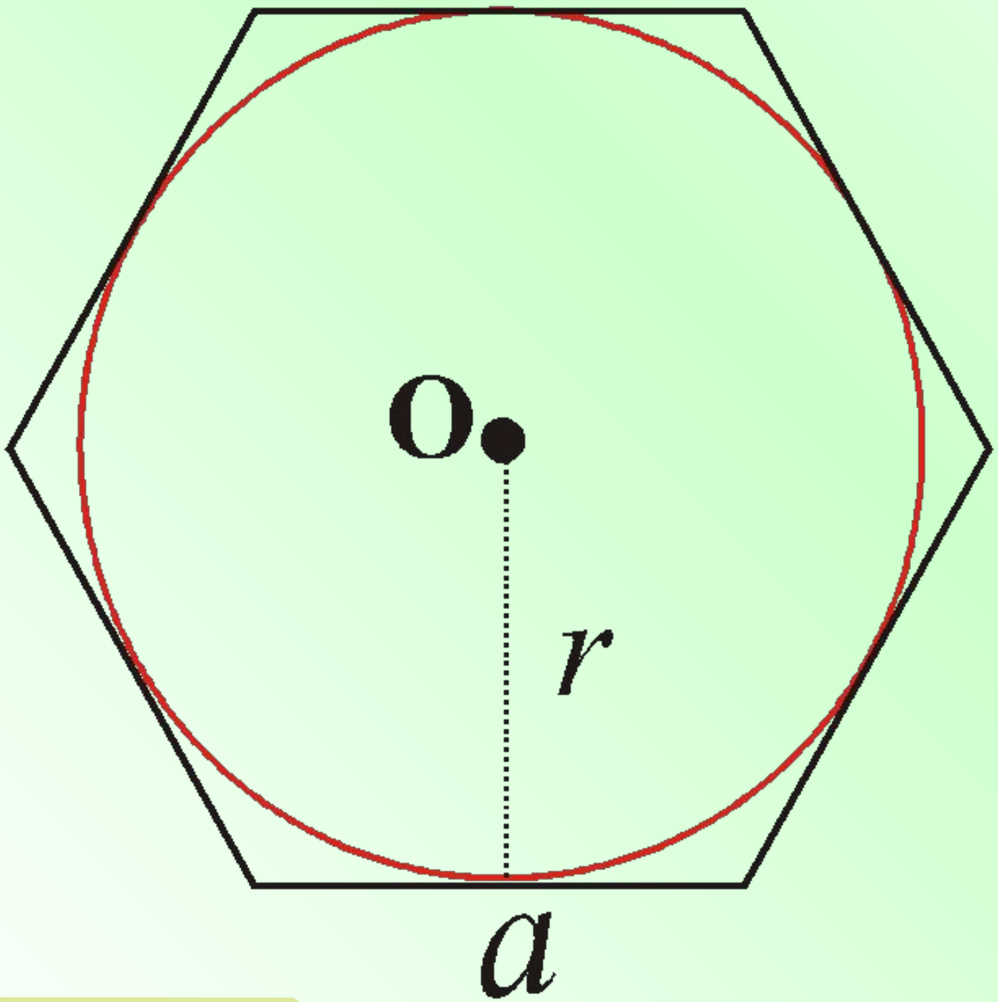


$$a_n = 2R\sin\frac{180^0}{n}$$

$$R = a$$

$$\grave{a}_6 = R$$

Правильний шестикутник



$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Формули для радіусів вписаних і описаних кіл правильних многокутників

Кількість сторін / Радіус	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
$R = \dfrac{a_n}{2\sin\frac{180^o}{n}}$	$R = \dfrac{a_3\sqrt{3}}{3}$	$R = \dfrac{a_4\sqrt{2}}{2}$	$R = a_6$
$r = \dfrac{a_n}{2tg\frac{180^o}{n}}$	$r = \dfrac{a_3\sqrt{3}}{6}$	$r = \dfrac{a_4}{2}$	$r = \dfrac{a_6\sqrt{3}}{2}$

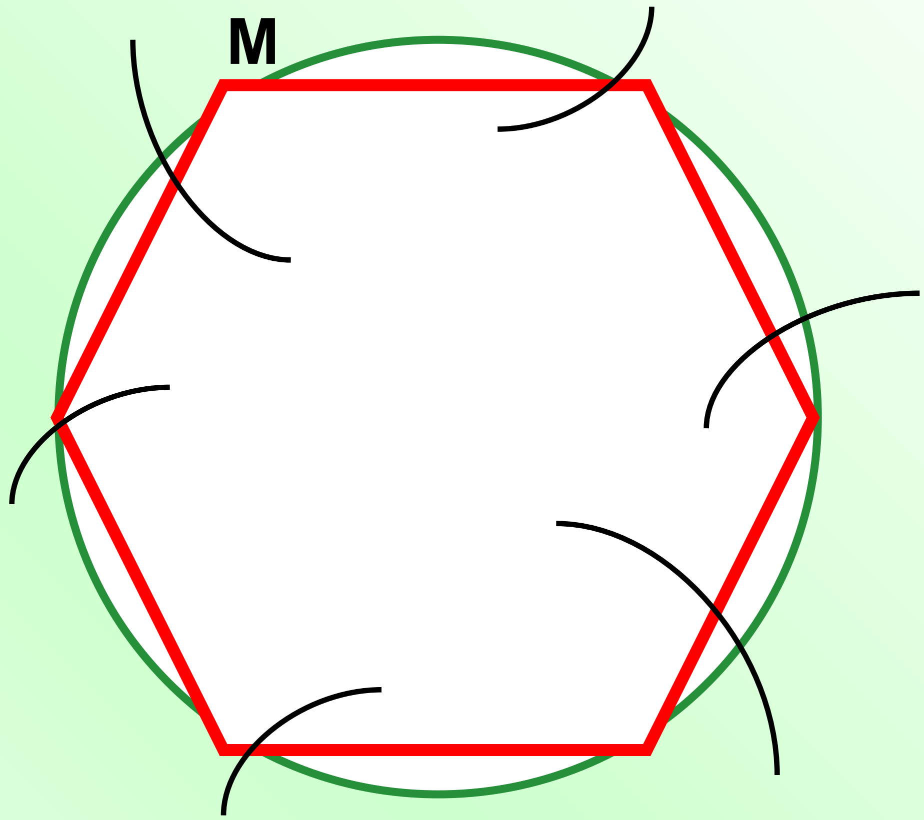
a_n \ R, r	R R	r r
a_n	$2R\sin\frac{180^o}{n}$	$2rtg\frac{180^o}{n}$
a_3	$R\sqrt{3}$	$2r\sqrt{3}$
a_4	$R\sqrt{2}$	$2r$
a_6	R	$\frac{2\sqrt{3}}{3}r$

Побудова правильних многокутників

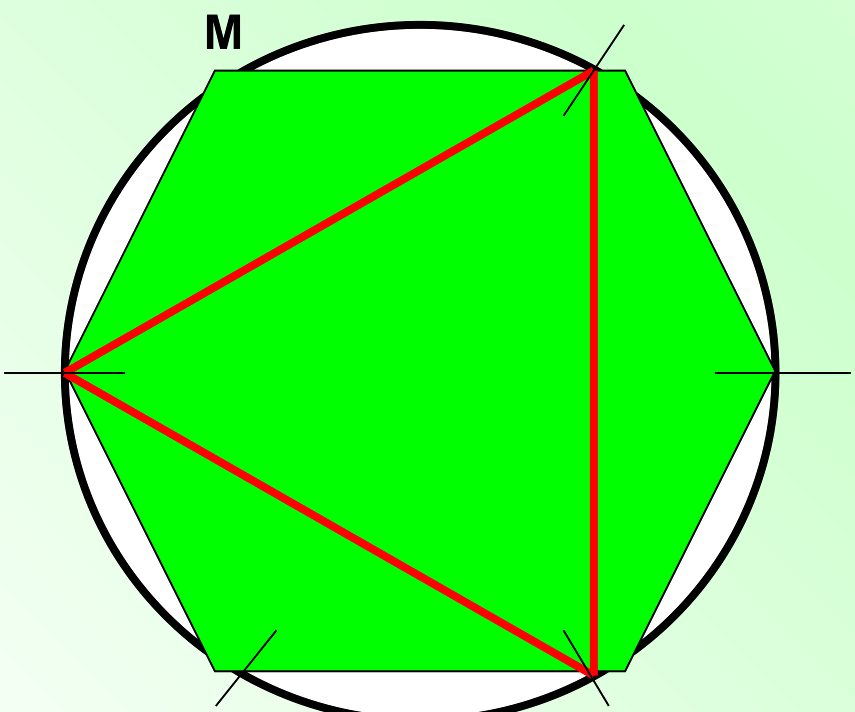
Дудник Н.М.

Алгоритм побудови правильного шестикутника

- 1) Побудувати коло довільного радіуса.
- 2) Від довільної точки М кола потрібно послідовно відкласти хорди, які дорівнюють радіусу.
- 3) З'єднати послідовно точки – це вершини правильного шестикутника.



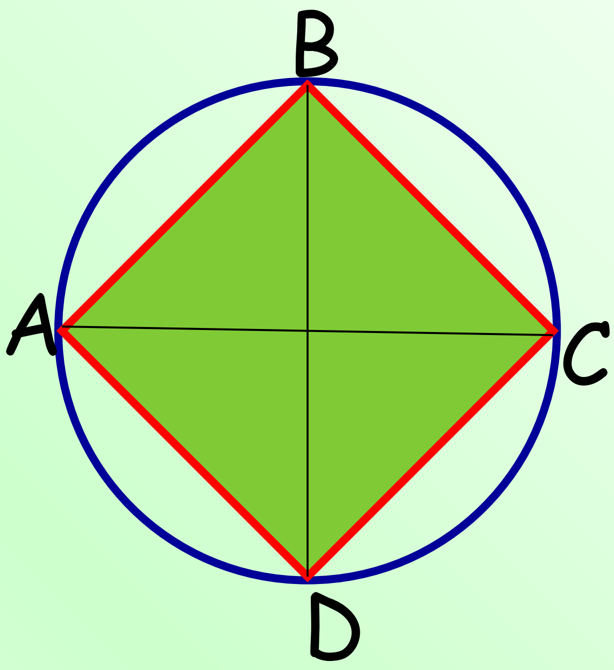
Алгоритм побудови правильного трикутника



- 1) Побудувати коло довільного радіуса.
- 2) Від довільної точки M кола послідовно відкласти хорди, які дорівнюють радіусу.
- 3) З'єднати послідовно точки – це вершини правильного шестикутника.
- 4) Сполучити через одну вершини правильного шестикутника, отримаємо правильний трикутник.

Алгоритм побудови правильного чотирикутника

- Для побудови правильного чотирикутника достатньо в колі провести два перпендикулярні діаметри AC і BD.
- Чотирикутник ABCD- квадрат.

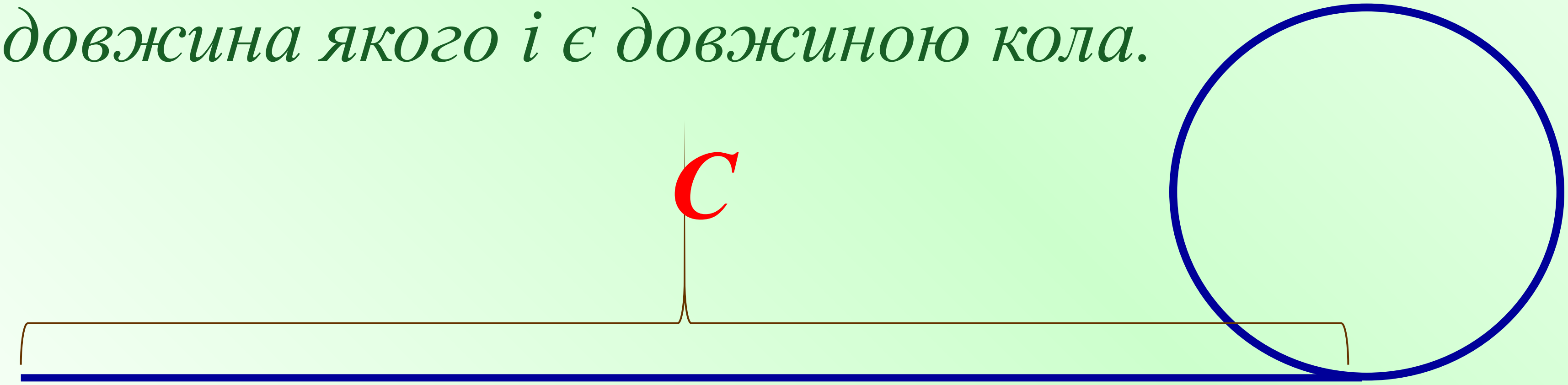


Довжина кола
і дуги кола

Дудник Н.М.

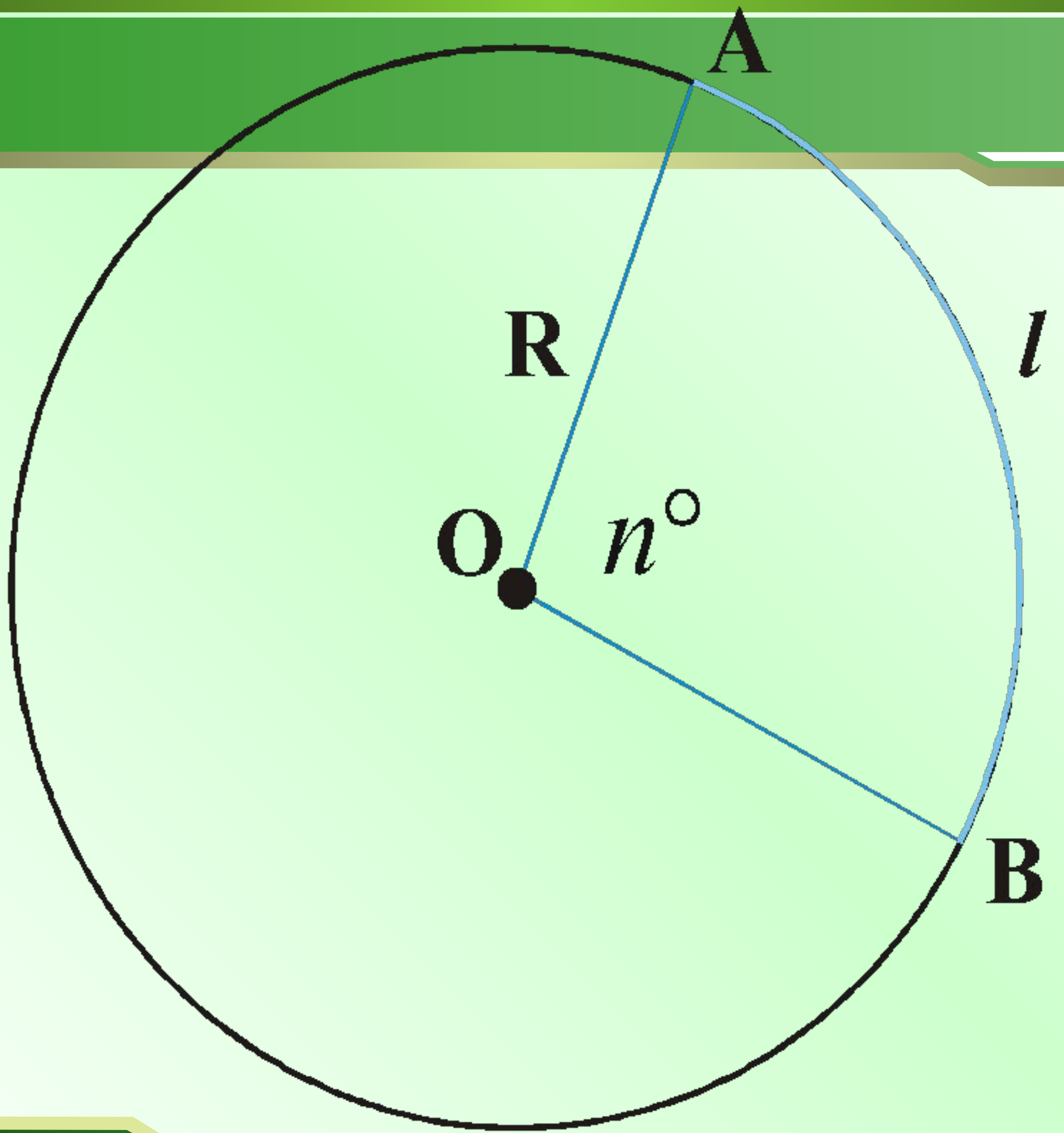
ДОВЖИНА КОЛА

Щоб наочно уявити, що таке довжина кола, уявимо, що коло зроблено з тонкого дроту. Якщо таке коло розрізати в деякій точці А і розпрямити коло, то одержимо відрізок AA_1, довжина якого і є довжиною кола.



$$C = 2\pi R = \pi D$$

1



2

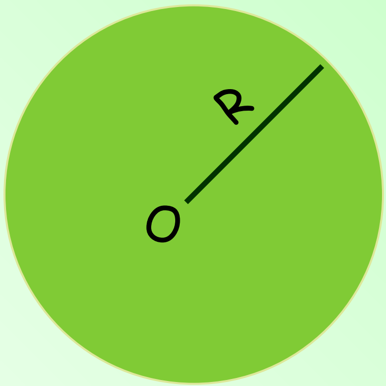
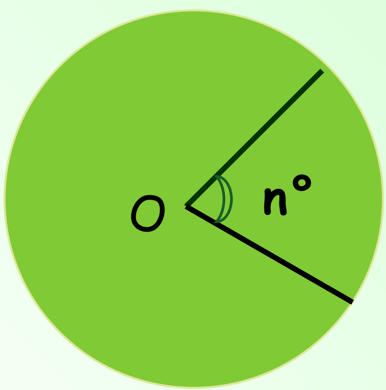
Довжина кола

$$C = 2\pi R = \pi D$$

Довжина дуги кола

$$l = \frac{\pi \cdot R \cdot n^{\circ}}{180^{\circ}}$$

Довжина кола. Довжина дуги

Назва формули	Формула	Позначення
Довжина кола  	$C=2\pi R$	**C** - довжина кола **R** – радіус кола
	$C=\pi D$	**D** - діаметр
Довжина дуги  	$$l=\frac{\pi R n}{180}$$	l - довжина дуги **R**- радіус кола **n°** - градусна міра відповідного центрального кута

Площа круга та його частин

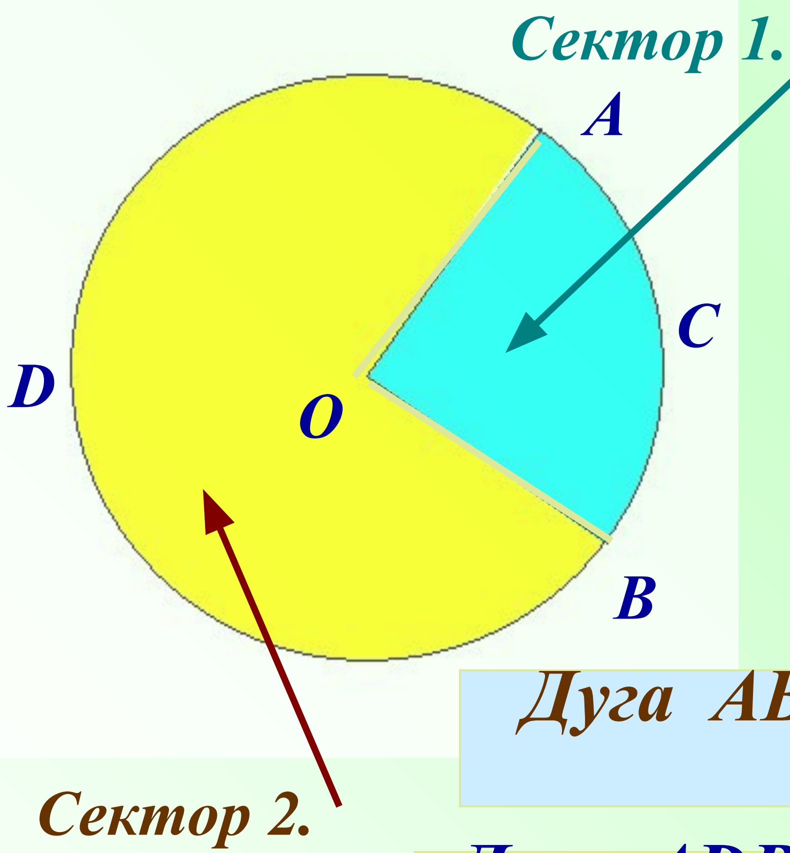
Дудник Н.М.

Площа круга

Частина площини, обмежена колом.

$$S = \pi R^2$$

Круговий сектор

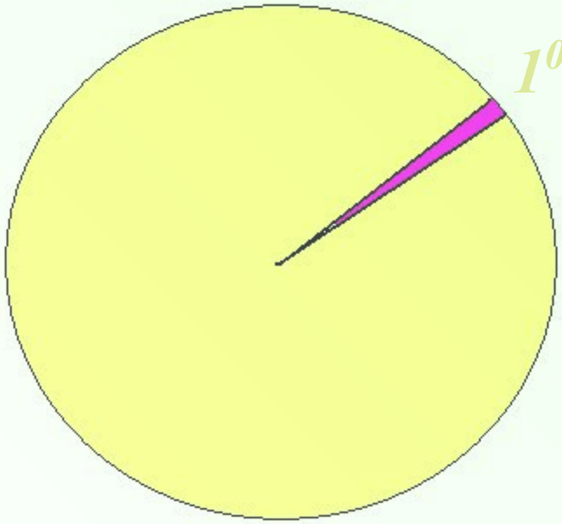


Круговим сектором називається частина круга, обмежена дугою і двома радіусами, що з'єднують кінці дуги з центром круга.

Дуга ABC – дуга кругового сектора 1.

Дуга ADB – дуга кругового сектора 2.

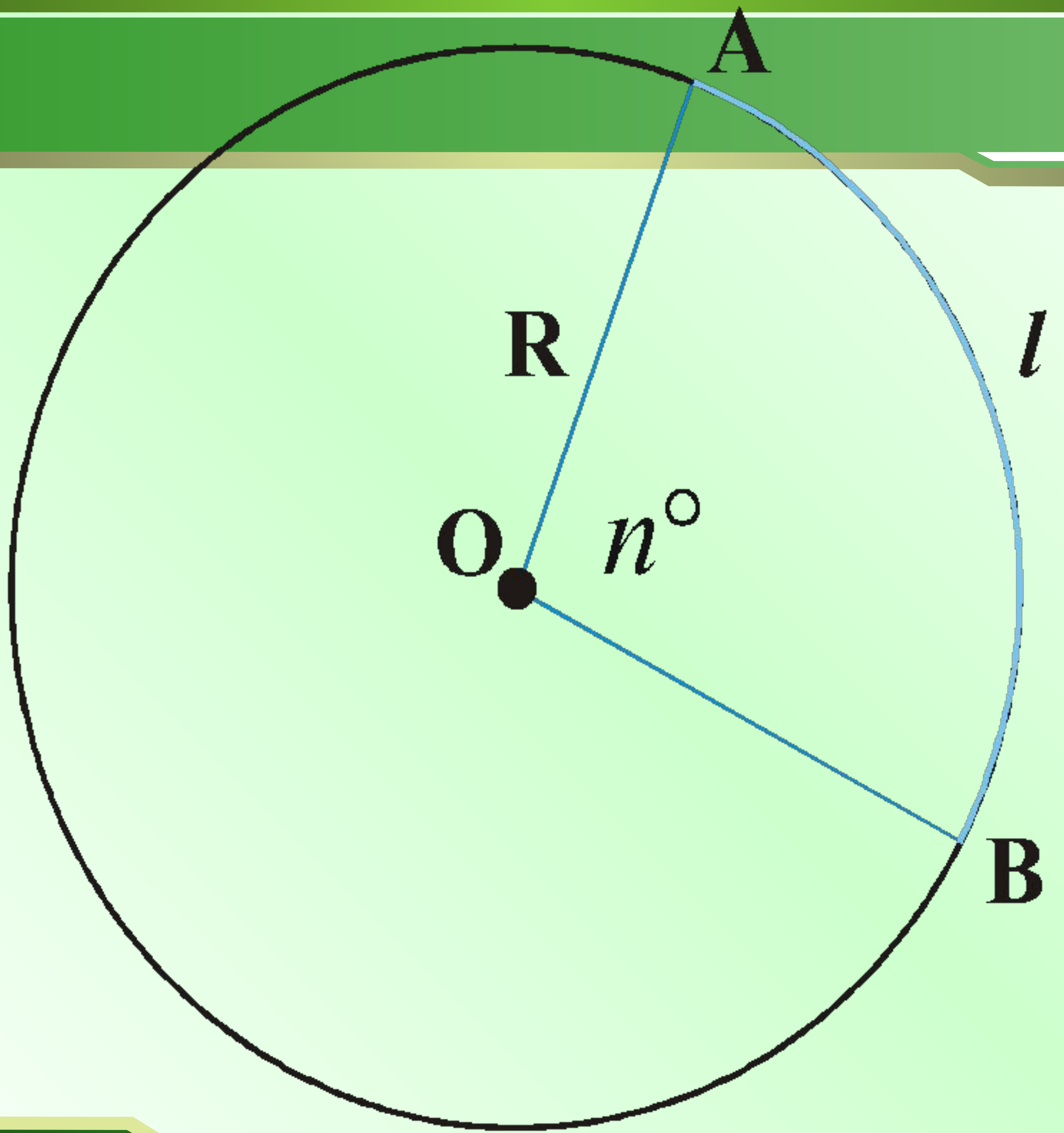
Площа кругового сектора



$$S = \pi R^2$$

$$S_1 = \frac{S}{360^0} = \frac{\pi R^2}{360^0}$$

$$S_\alpha = \frac{\pi R^2}{360^0} \cdot \alpha$$


A
R
l
O
n°
B

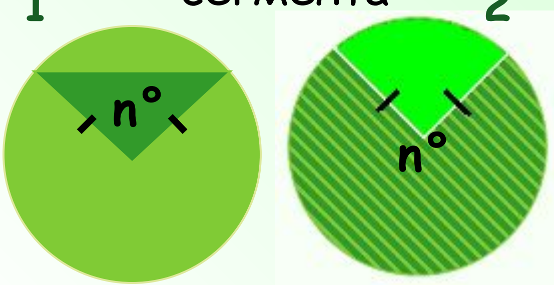
3

Площа круга

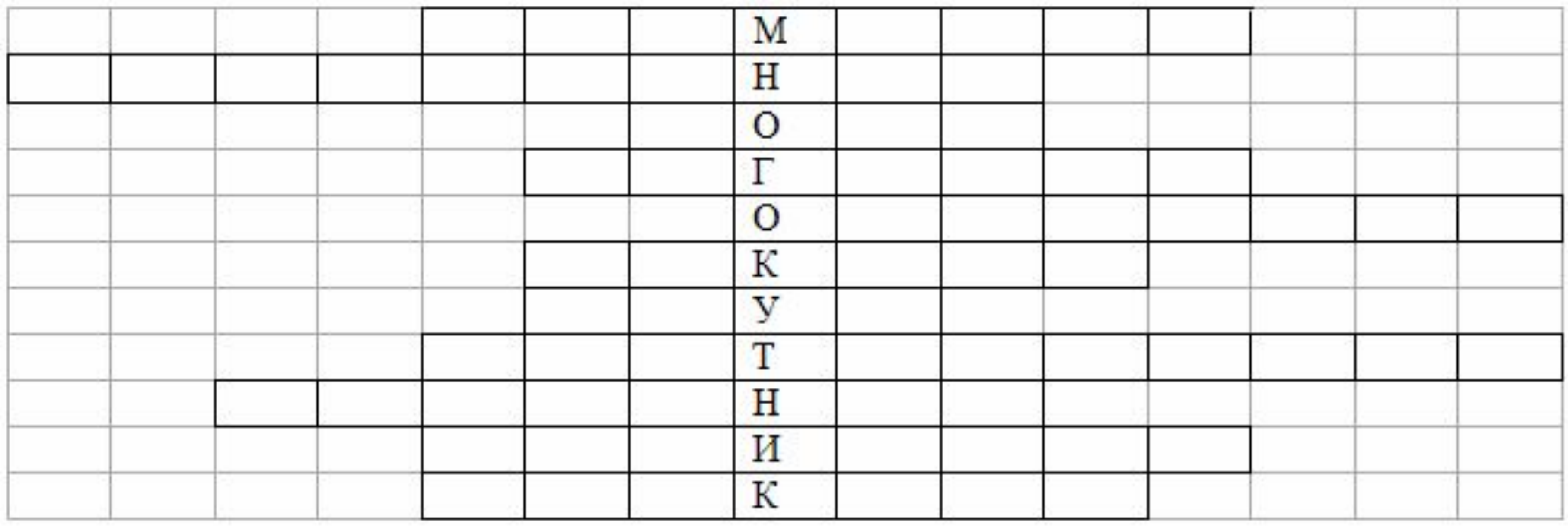
$$S = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4}$$

Площа сектора

$$S = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot n^\circ}{360^\circ} = \frac{lR}{2}$$

Площа круга 	$$S=\pi R^2$$	S – площа круга R – радіус круга
	$$S=\frac{\pi D^2}{4}$$	D - діаметр
Площа кругового сектора 	$$S_{кр.с}=\frac{\pi R^2 n}{360}$$	$S_{кр.с.}$ - площа кругового сектора n° - градусна міра відповідного центрального кута
Площа кругового сегмента 1 2 	1 n < 180° $$S_{сегм}=S_{\text{кр.с.}}-S_{\Delta}$$	$S_{сегм}$ - площа кругового сегмента S_{Δ} - площа трикутника
	2 n > 180° $$S_{сегм}=S_{\text{кр.с.}}+S_{\Delta}$$	

Кросворд



1. Сторони, кути і вершини многокутника?
2. Многокутник з рівними сторонами і кутами?
3. Геометрична фігура, яка складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки.
4. Частина круга, обмежена хордою і відповідною їй дугою?
5. Багатогранник, всі сторони якого дотикаються до кола, називається…
6. Частина центрального кута кола, яку обмежує відповідна дуга цього кола.
7. Внутрішня частина площини, що обмежена колом, називається…
8. Кут, вершина якого знаходиться в центрі кола.
9. Багатогранник, у якого всі його вершини лежать на колі, називається…
10. Сума довжини сторін многокутника.
11. Многокутник, який знаходиться в одній півплощині відносно прямої, що містить будь – яку сторону, називається…