

Тульский государственный университет  
Кафедра «Строительство, строительные материалы и конструкции»

**ТЕЛИЧКО Виктор Григорьевич**

**НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ  
ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ, ВЫПОЛНЕННЫХ ИЗ МАТЕРИАЛОВ  
С УСЛОЖНЕННЫМИ МЕХАНИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ**

*Специальность 01.02.04 - механика деформируемого  
твёрдого тела*

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель  
д. т. н., профессор Трещев А.А.

## Типы потенциалов деформаций

$$W_1 = (A_e + B_e \xi) \sigma^2 + (C_e + D_e \xi + E_e \eta) \tau^2 + \left[ (A_p + B_p \xi) \sigma^2 + (C_p + D_p \xi + E_p \eta) \tau^2 \right]^n \quad (1)$$

$$W_2 = (A_e + B_e \xi) \sigma^2 + (C_e + D_e \xi + E_e \eta) \tau^2 + \left[ (A_p + B_p \xi) \sigma^2 + (C_p + D_p \xi + E_p \eta) \tau^2 \right]^n \quad (2)$$

$$W_3 = A_e \sigma^2 + C_e \tau^2 + \left[ (C_p + D_p \xi + E_p \eta) \tau^2 \right]^n \quad (3)$$

$$\sigma = \delta_{ij} \sigma_{ij} / 3, \quad \tau = \sqrt{S_0 S_{ij}} / 3, \quad S S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma, \quad \xi = \psi = \sigma / S_0,$$

$$\eta = \text{Sin} \psi = \tau / S_0, \quad S_0 = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}, \quad \text{Cos} 3\varphi = \sqrt{2} \det(S_{ij}) / \tau^3,$$

$$e_{ij} = 2C_1 \sigma_{ij} / 3 + 2(A_1 - C_1) \sigma \delta_{ij} / 3 + T_{ij} \quad (4)$$

$$W_1 \Leftrightarrow T_{ij} = T_{ij}(\psi, \varphi, \sigma_{ij}), \quad W_2, W_3 \Leftrightarrow T_{ij} = T_{ij}(\psi, \sigma_{ij})$$

$$\sigma_{ij} = 2G(e_{ij} - T_{ij}) + 3\lambda(e - T) \delta_{ij} \quad (5)$$

$$2G = 3 / (2C_e), \quad \lambda = (C_e - A_e) / (2A_e C_e), \quad 3T = T_{ij} \delta_{ij}, \quad 3e = e_{ij} \delta_{ij}$$

$$W_1: \quad e = \sigma / (3K_0) + \tau / (3D_0), \quad (6)$$

$$W_1, W_2: \quad e = \sigma / (3K_0) + \tau / (3D_0), \quad (9)$$

$$\vartheta = \sqrt{1 + \text{tg}^2 \omega} \left[ \tau / (2G_0) + \sigma / (3D_0) \right], \quad (7)$$

$$\vartheta = \tau / (2G_0) + \sigma / (3D_0) \quad (10)$$

$$\text{tg} \omega = 3R\eta \sin 3\varphi / \left[ 3\eta / (2G_0) + \xi / D_0 \right] \quad (8)$$



## Типы потенциалов деформаций (продолжение)

### Обобщенный модуль объемных деформаций

$$K_{\varphi s} = 1 / \{ 2A_e + B_e \xi (2 + \eta^2) - E_e \eta^3 \cos 3\varphi + \\ + n [(A_p + B_p \xi) \sigma^2 + (C_p + D_p \xi + E_p \eta \cos 3\varphi) \tau^2]^{n-1} \times \\ \times [2A_p + B_p \xi (2 + \eta^2) - E_p \eta^3 \cos 3\varphi] \}; \quad (11)$$

### Обобщенный модуль формоизменения (сдвига)

$$2G_0 = 3 / \{ (2D_e - B_e) \xi^3 + 2C_e + E_e \eta \cos 3\varphi (2 + \xi^2) + \\ + n [(A_p + B_p \xi) \sigma^2 + (C_p + D_p \xi + E_p \eta \cos 3\varphi) \tau^2]^{n-1} \times \\ \times [(2D_p - B_p) \xi^3 + 2C_p + E_p \eta \cos 3\varphi (2 + \xi^2)] \}; \quad (12)$$

### Обобщенный модуль дилатации

$$D_0 = 1 / \{ D_e \eta^3 + n [(A_p + B_p \xi) \sigma^2 + (C_p + D_p \xi + E_p \eta \cos 3\varphi) \tau^2]^{n-1} D_p \eta^3 \}; \quad (13)$$

$$R = EA_e + nB_p \left[ (A_p + B_p \xi) \sigma^2 + (C_p + D_p \xi + E_p \eta \cos 3\varphi) \tau^2 \right]^{n-1}. \quad (14)$$

# Диаграммы деформирования материалов при пропорциональном нагружении

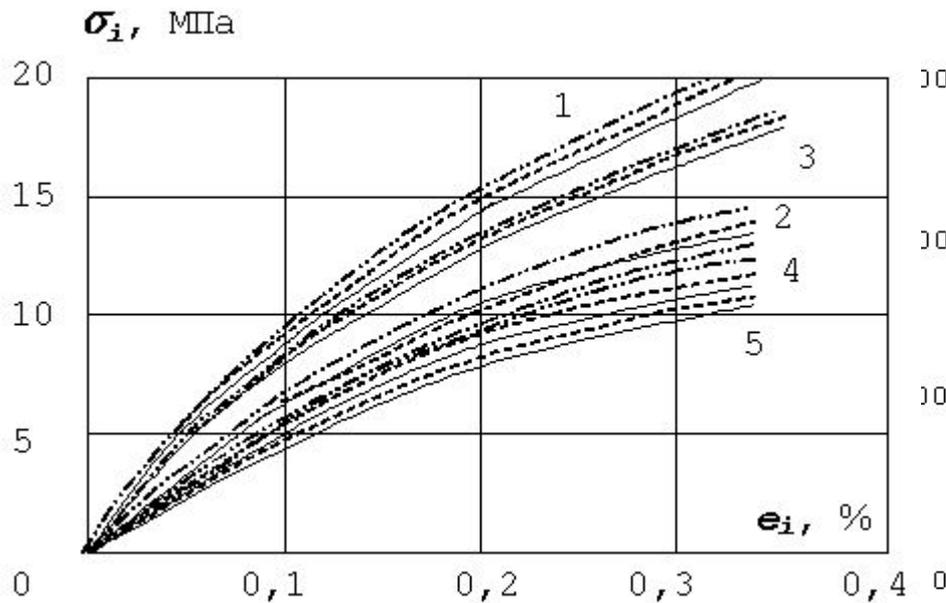


Рис. 1. Графит АРВ:

- 1 -  $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : 0 : 0$ ; 2 -  $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = 1 : 0 : 0$ ;  
 3 -  $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : 1 : 0$ ; 4 -  $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = 1 : 0,325 : 0$ ;  
 5 -  $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = 1 : 1 : 0$

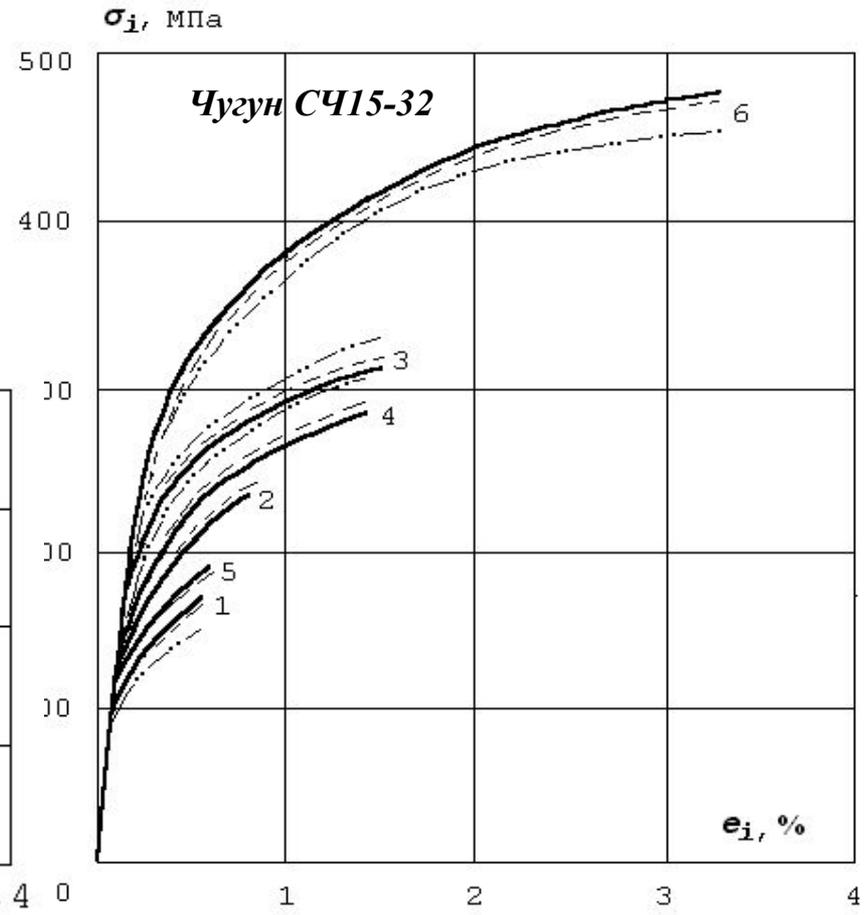


Рис. 2. Чугун СЧ15-32:

- 1 -  $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = 1 : 0 : 0$ ; 2 -  $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : 0 : 0$ ;  
 3 -  $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : 1 : 0$ ; 4 -  $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : -1 : 0$ ;  
 5 -  $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : -0,52 : -0,06$ ;  
 6 -  $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : -1 : -0,16$ ;  
 7 -  $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : -0,1 : -0,1$

# Диаграммы деформирования материалов при пропорциональном нагружении (продолжение)

## Бетон R=28,4 МПа

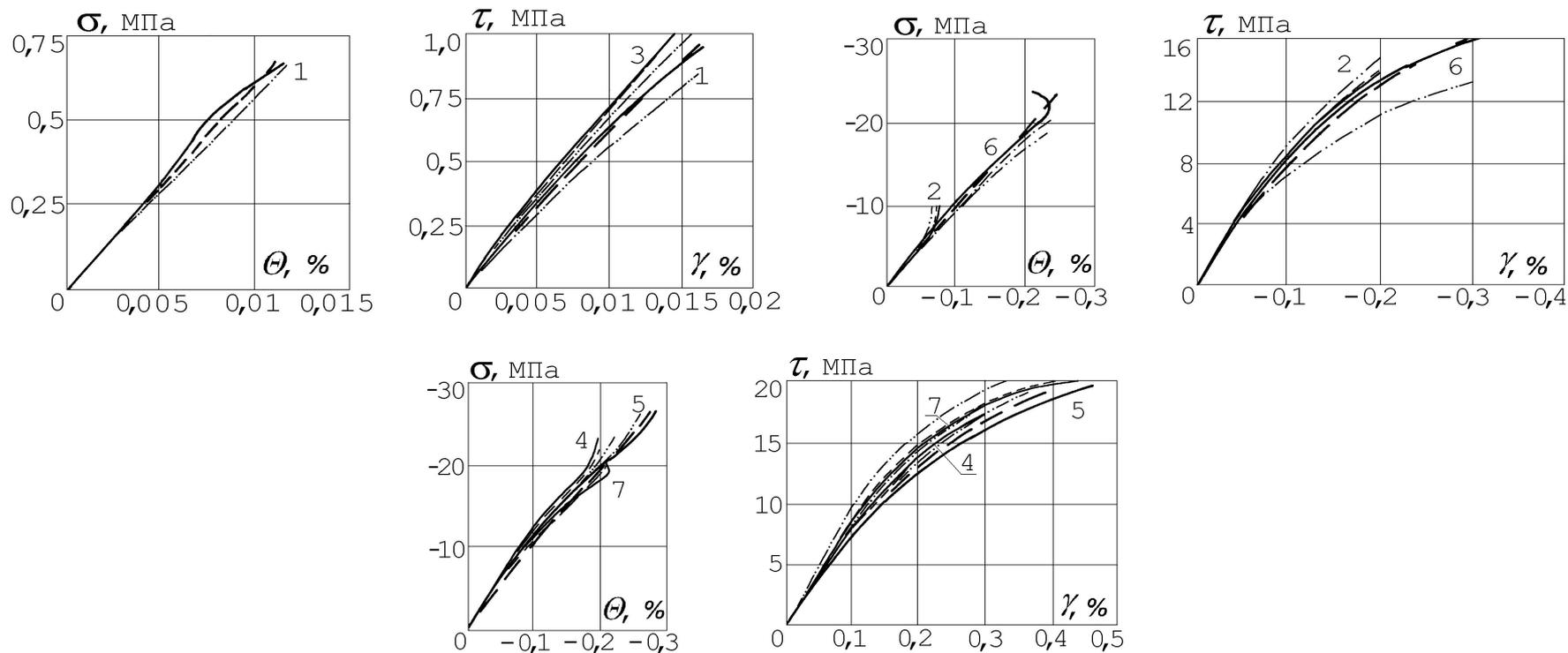


Рис. 3. Бетон R=28,4 МПа

- 1 –  $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = 1 : 0 : 0$ ; 2 –  $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : 0 : 0$ ;  
 3 –  $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : 1 : 0$ ; 4 –  $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : -1 : 0$ ;  
 5 –  $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : -0,52 : -0,06$ ; 6 –  $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : -1 : -0,16$ ;  
 7 –  $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : -0,1 : -0,1$

## Основные уравнения и зависимости

$$\begin{aligned}
 U_1(x_1, x_2, x_3) &= u_1(x_1, x_2) + x_3 \psi_2(x_1, x_2); \\
 U_2(x_1, x_2, x_3) &= u_2(x_1, x_2) - x_3 \psi_1(x_1, x_2); \\
 U_3(x_1, x_2, x_3) &= w(x_1, x_2); \\
 \psi_1 &= w_2 - \gamma_{23}; \psi_2 = -w_1 + \gamma_{13}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
 e_{11} &= u_{1,1} + x_3 \psi_{2,1}; \quad e_{22} = u_{2,2} - x_3 \psi_{1,2}; \\
 e_{33} &= 0; \\
 \gamma_{12} &= u_{1,2} + u_{2,1} + x_3 (\psi_{2,2} - \psi_{1,1}); \\
 \gamma_{13} &= \psi_2 + w_1; \quad \gamma_{23} = -\psi_1 + w_2.
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
 N_{11,1} + N_{12,2} &= 0; \quad N_{12,1} + N_{22,2} = 0; \\
 M_{11,1} + M_{12,2} &= Q_1; \quad M_{12,1} + M_{22,2} = Q_2; \\
 Q_{1,1} + Q_{2,2} &= q.
 \end{aligned} \tag{17}$$

$$\{\sigma\} = [B]\{e\} \tag{18}$$

$$Q_k = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{k3} dx_3, \quad (k=1,2) \tag{19}$$

$$M = \begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \\ Q_1 \\ Q_2 \\ N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{Bmatrix}; \quad [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} & K_{14} & K_{15} & K_{11} & K_{12} & K_{16} \\ & D_{22} & D_{26} & K_{24} & K_{25} & K_{12} & K_{22} & K_{26} \\ & & D_{66} & K_{64} & K_{65} & K_{16} & K_{26} & K_{66} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{14} & C_{24} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{15} & C_{25} & C_{65} \\ & & & & & C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ & & & & & & C_{22} & C_{26} \\ & & & & & & & C_{66} \end{bmatrix}; \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \psi_{2,1} \\ -\psi_{1,2} \\ \psi_{2,2} - \psi_{1,1} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \\ u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \end{Bmatrix}; \tag{20}$$

$$C_{km} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{km} dx_3; \quad K_{km} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{km} x_3 dx_3; \quad D_{km} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{km} x_3^2 dx_3. \tag{21}$$

## Вывод матрицы жесткости конечного элемента

$$\{M\} = [P]\{\beta\} \quad (22) \quad \{\varepsilon\} = [D]^{-1}\{M\} = [E]\{M\} \quad (23)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_S \{M\}^T [E] \{M\} dS \quad (24)$$

$$\Pi = \sum_n \left( U_n - \int_{V_n} \{\Phi\}^T \{t\} dS + \int_S \{\bar{\Phi}\}^T \{t\} dS \right) \quad (25) \quad \{t\} = [L]\{q\} \quad (26) \quad \{\Phi\} = [R]\{\beta\} \quad (27)$$

$$[(11),(13),(15),(16) \Rightarrow (14)] \Rightarrow \Pi = \sum_n \left( \frac{1}{2} \{\beta\}^T [H] \{\beta\} - \{\beta\}^T [T] \{q\} + \{\Phi_0\}^T \{q\} \right) \quad (28)$$

$$[H] = \int_S [P]^T [E] [P] dS \quad (29) \quad [T] = \int_{V_n} [R]^T [L] dS \quad (30) \quad \{\Phi_0\}^T = \int_S \{\bar{\Phi}\} [L] dS \quad (31)$$

$$\sum_n [T]^T [H]^{-1} [T] \{q\} = \sum_n \{\Phi_0\} \quad (32)$$

$$[K] = [T]^T [H]^{-1} [T] \quad (33) \quad \{\beta\} = [H]^{-1} [T] \{q\} \quad (34) \quad \{M\} = [P] [H]^{-1} [T] \{q\} \quad (35)$$

$$M_{11} = \beta_1 + \beta_4 x_1 + \beta_9 x_2; \quad M_{22} = \beta_2 + \beta_5 x_2 + \beta_{10} x_1; \quad M_{12} = \beta_3 + \beta_{12} x_1 + \beta_{11} x_2; \quad (36)$$

$$Q_1 = \beta_4 + \beta_{11}; \quad Q_2 = \beta_5 + \beta_{12}; \quad N_{11} = \beta_6; \quad N_{22} = \beta_7; \quad N_{12} = \beta_8$$

$$\{\beta\} = \{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 \beta_5 \beta_6 \beta_7 \beta_8 \beta_9 \beta_{10} \beta_{11} \beta_{12}\}^T \quad (37)$$

$$\left( \left( (22) \Rightarrow [P(M_{12} \dots N_{12})] \right) + (37) \right) \Rightarrow [H]_{12 \times 12}$$

$$\bar{M}_{11} = M_{11}C_{ij} + M_{12}S_{ij}; \quad \bar{M}_{22} = -M_{22}S_{ij} - M_{12}C_{ij}; \quad \bar{N}_{11} = N_{11}C_{ij} + N_{12}S_{ij}; \quad (38)$$

$$\bar{N}_{22} = N_{22}S_{ij} + N_{12}C_{ij}; \quad \bar{Q} = Q_1C_{ij} + Q_2S_{ij}, \quad C_{ij} = \cos \varphi_{ij}; \quad S_{ij} = \sin \varphi_{ij}$$

$$A_{ij} = L_{ij} \int_0^1 [(Q_1C_{ij} + Q_2S_{ij})w - (M_{12}C_{ij} + M_{22}S_{ij})\psi_1 + (M_{12}S_{ij} + M_{11}C_{ij})\psi_2 + (N_{11}C_{ij} + N_{12}S_{ij})u_1 + (N_{22}S_{ij} + N_{12}C_{ij})u_2] d\xi \quad (39)$$

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{31} \quad (40)$$

$$\{q_i\} = \{w_i \ \psi_{1i} \ \psi_{2i} \ u_{1i} \ u_{2i}\}^T = \{q_{i1} \ q_{i2} \ q_{i3} \ q_{i4} \ q_{i5}\}^T \quad (41) \quad \{q\} = \{q_1 \ q_2 \ q_3 \ \dots \ q_{15}\}^T \quad (42)$$

$$w = [(1-\xi) \ \xi] \{w_i \ w_j\} + L_{ij}\xi(1-\xi)(\theta_i - \theta_j)/2;$$

$$\psi_1 = [(1-\xi) \ \xi] \{\psi_{1i} \ \psi_{1j}\}; \quad \psi_2 = [(1-\xi) \ \xi] \{\psi_{2i} \ \psi_{2j}\}; \quad (43)$$

$$u_1 = [(1-\xi) \ \xi] \{u_{1i} \ u_{1j}\}; \quad u_2 = [(1-\xi) \ \xi] \{u_{2i} \ u_{2j}\};$$

$$\theta_i = \psi_{1i}c_{ij} + \psi_{2i}s_{ij}; \quad \theta_j = \psi_{1j}c_{ij} + \psi_{2j}s_{ij}; \quad L_{ij}$$

$$x_1 = x_{1i} - L_{ij}\xi s_{ij}; \quad x_2 = x_{2i} + L_{ij}\xi c_{ij} \quad (44)$$

$$\left[ [(36), (39), (43), (44)] \Rightarrow (40) \right] + (42) + \{\beta\}^T + \{q\} \Rightarrow [T]_{12 \times 15}$$



# Оценка сходимости разработанной конечно-элементной модели

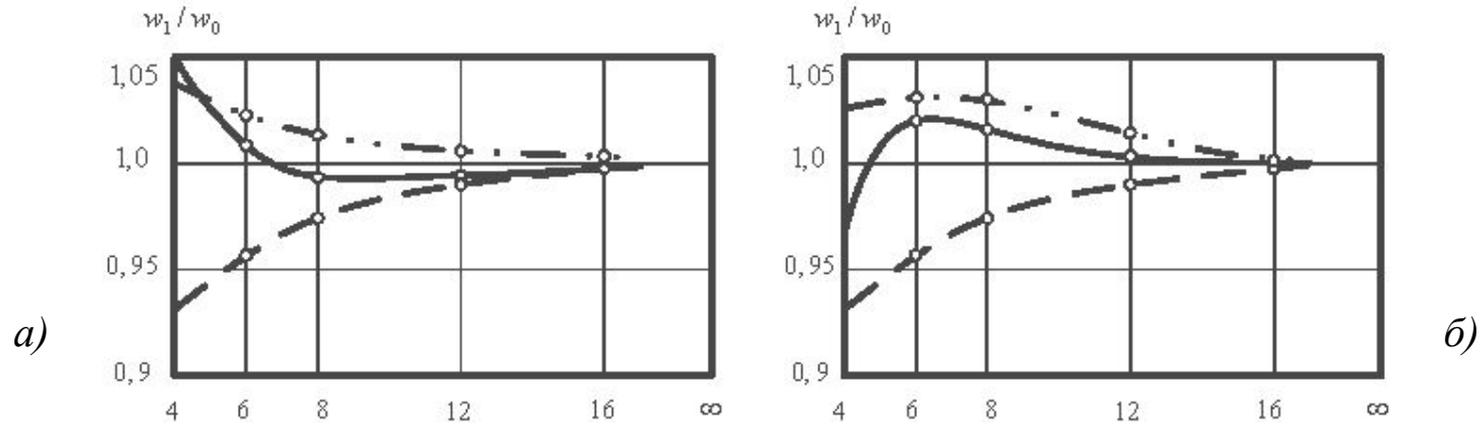


Рис. 4. Сходимость решения по максимальным прогибам пластины, опертой по контуру:  
 а – в середине шарнирно опертой; б – в середине жесткозащемленной

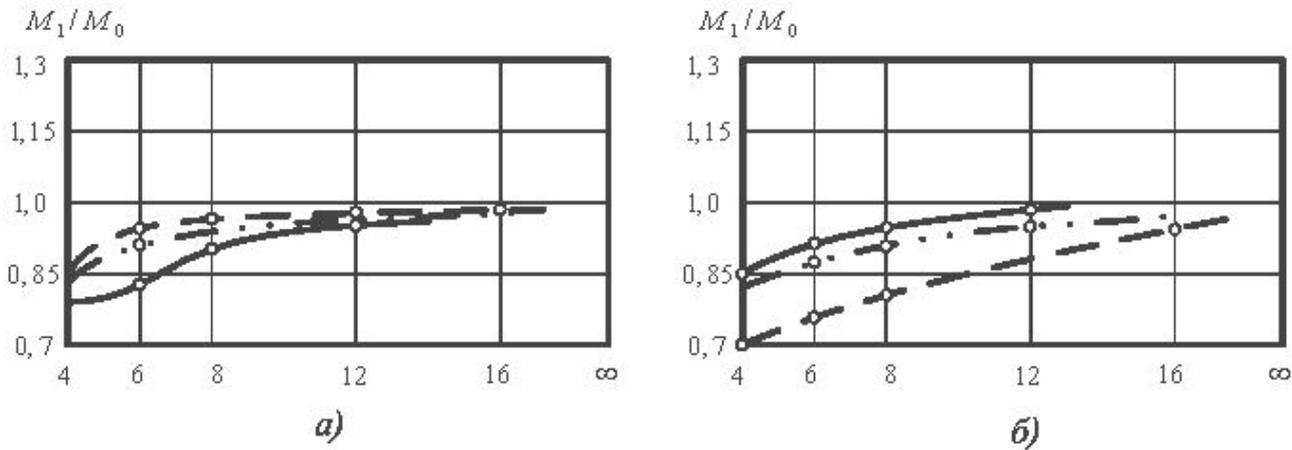
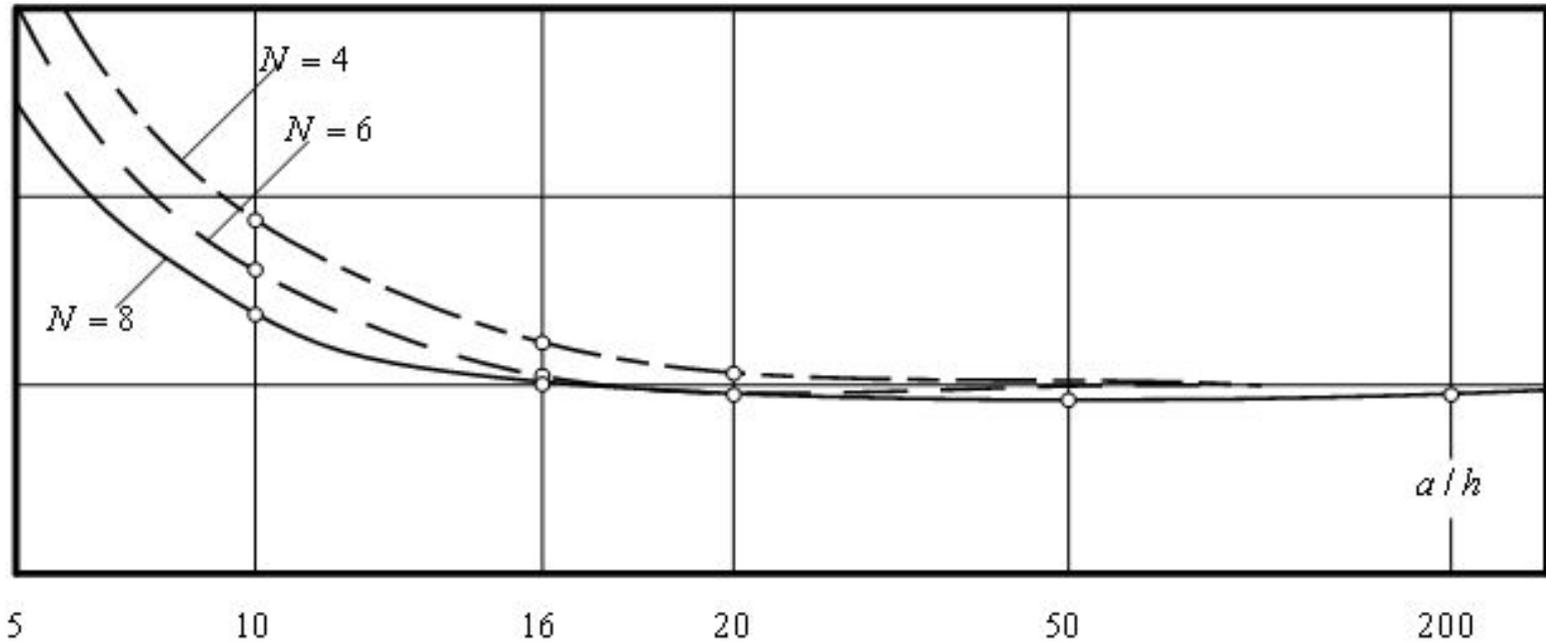


Рис. 5. Сходимость решения по максимальным моментам для пластин рис. 4

$w_0$  – точное решение;  $w_1$  – решение в модификациях  $H12, H9$

# Оценка сходимости разработанной КЭ-модели (продолжение)

$w_1/w_0$



*Рис. 6. Оценка сходимости решения для жесткозащемленной по контуру плиты*

# Расчет оболочки из графита АРВ

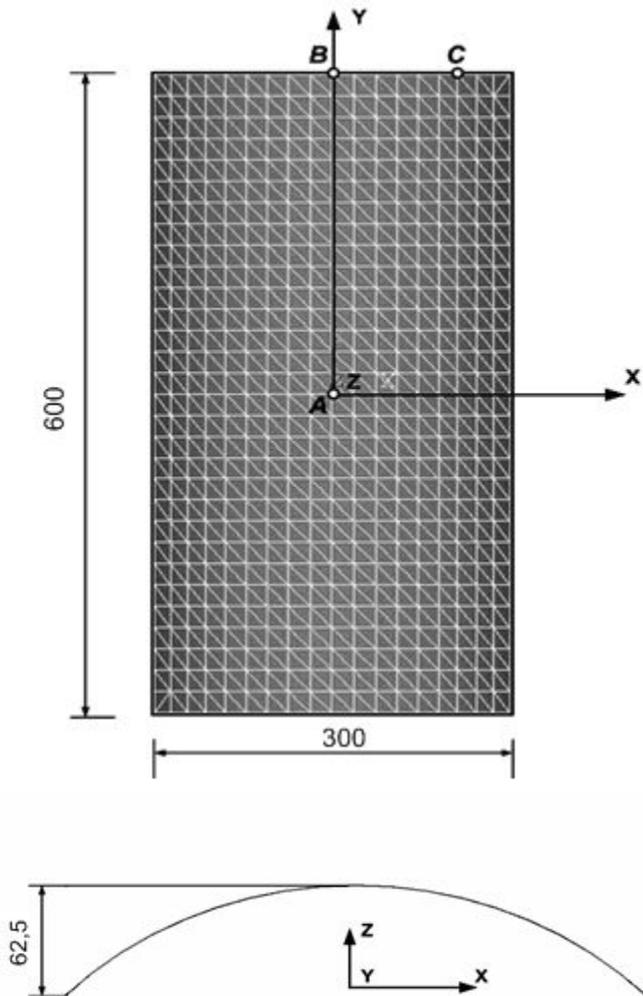


Рис. 7. Геометрические параметры и характерные точки

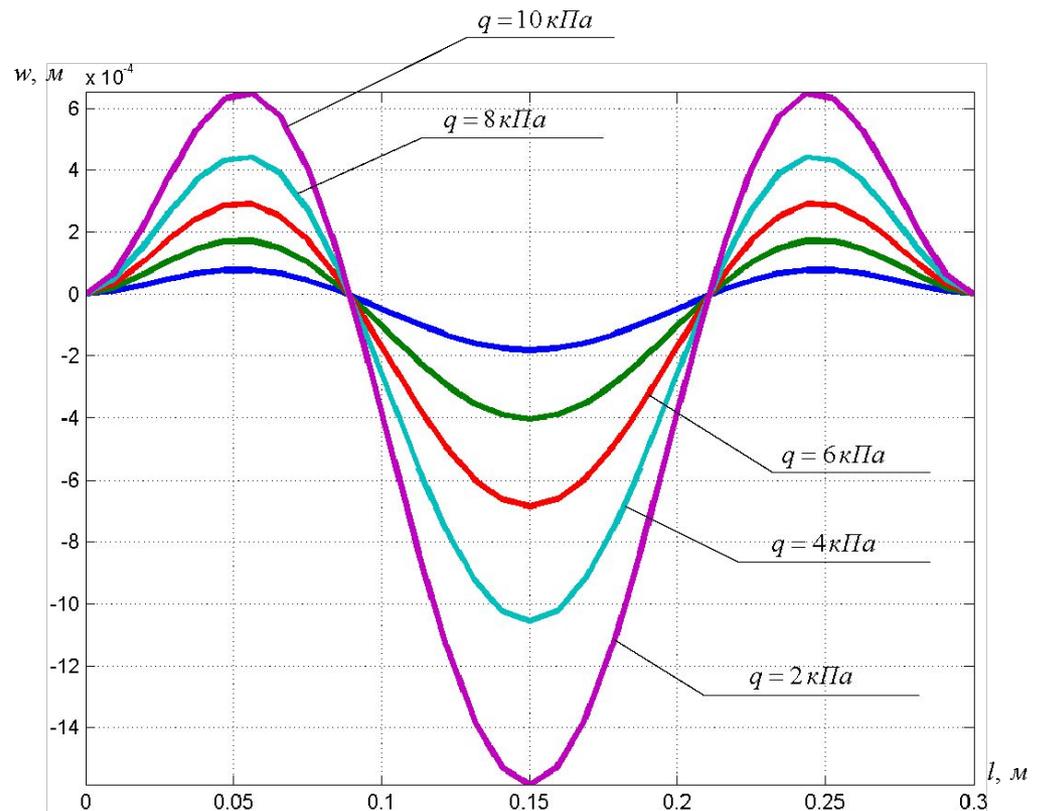


Рис. 8. Распределение вертикальных прогибов в оболочке

# Расчет оболочки из графита АРВ (продолжение)

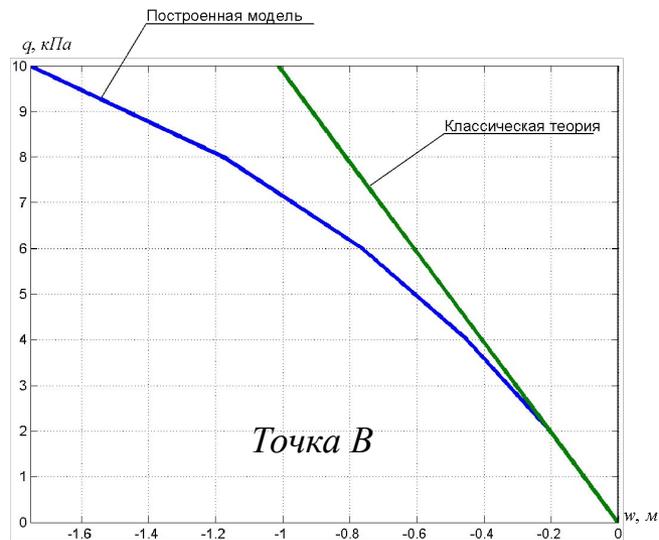
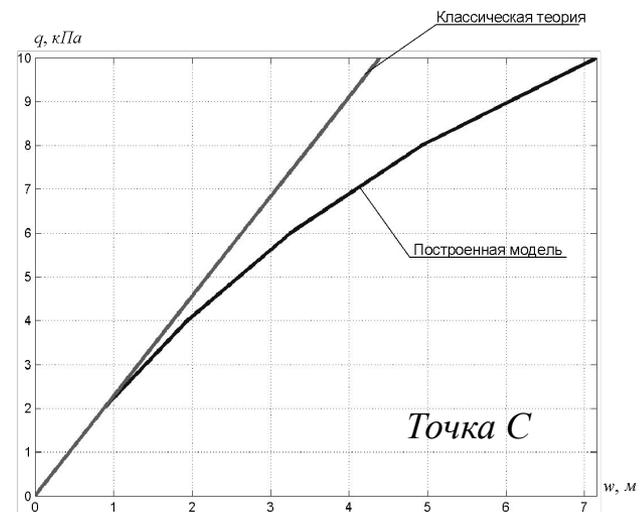
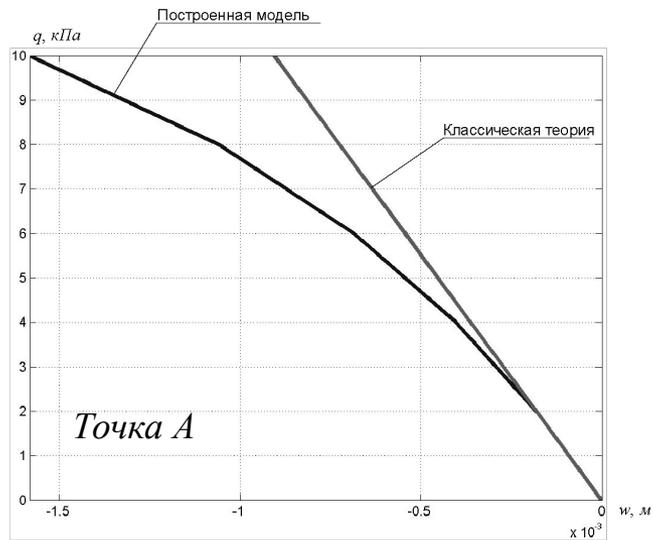


Рис. 9. График вертикальных прогибов в характерных точках



## Моделирование фиктивных слоев (дополнительные технические гипотезы)

1. Нагружение простое, деформация активная.
2. Деформации ползучести бетона на учитываются.
3. Размеры оболочек в плане велики по сравнению со средним расстоянием между арматурными стержнями.
4. В качестве модели для стальной арматуры примем идеальное упругопластическое тело, воспринимающее только нормальные напряжения в поперечных сечениях, а ее коэффициенты Пуассона примем равными нулю.
5. Напряжения в пределах армированных слоев оболочки определим как сумму напряжений в бетоне и арматуре, а за условие совместности бетона и арматуры примем равенство деформаций этих двух сред.
6. Срединную поверхность оболочки представим сетью гибридных конечных элементов модификации  $H12$  с учетом разбиения по толщине на ряд фиктивных слоев .
7. Жесткостные характеристики, рассчитанные для центра фиктивного слоя данного конечного элемента, распространим на все точки слоя.
8. Критерий прочности бетона в каждом фиктивном слое – по П.П. Баландину.
9. Трещины нормальны к срединной поверхности оболочки в точке трещинообразования, главные напряжения вычисляются по формулам плоского напряженного состояния.
10. Трещины в области треснувшего фиктивного слоя будем считать сквозными и параллельными друг другу. Влияние растянутого бетона учитывается по В.И. Мурашеву.
11. При наличии трещин бетон моделируем трансверсально-изотропным телом с плоскостью изотропии, параллельной плоскости трещин.

## Моделирование фиктивных слоев (продолжение)

Бетонные слои  
без трещин:

$$(1) \Rightarrow \{e\} = [A]\{\sigma\} \quad (45)$$

$$[B] = [A]^{-1} \quad (46)$$

Армированные  
(железобетонные) слои:

$$[B] = [A]^{-1} + [B_S] \quad (47) \quad [B_S] = \begin{bmatrix} B_{S11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & B_{S22} & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ sim & & 0 & 0 & \\ & & & 0 & \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} B_{S11} &= E_S \mu_{11}; \\ B_{S22} &= E_S \mu_{22} \\ \mu_{11} &= A_{Si} / S_{i11} h_S, \\ \mu_{22} &= A_{Si} / S_{i22} h_S \end{aligned}$$

Критерий прочности П.П. Баландина:

Бетонные слои  
с трещиной:

$$\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + 3 \cdot (\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{13}^2) - (\sigma_{11} \sigma_{22}) - (R_{bt} - R_b)(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - R_{bt} R_b > 0 \quad (48)$$

$$[B] = 0 \quad (49)$$

Железобетонные  
слои с трещиной:

$$\sigma_{B11}^2 + \sigma_{B22}^2 + 3 \cdot (\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{13}^2) - (\sigma_{B11} \sigma_{B22}) - (R_{bt} - R_b)(\sigma_{B11} + \sigma_{B22}) - R_{bt} R_b > 0 \quad (50)$$

$\chi_1 = \arctg \left( \frac{\text{Направление развития трещин}}{\text{Направление разрыва}} \right)$

$$\chi_1 = \angle \left( (X_1^* O X_2^*), (X_1 O X_2) \right) \quad (51)$$

$$e_{22}^* = A_{12}^* \sigma_{B11}^* + A_{22}^* \sigma_{B22}^* = (\sigma_{B22}^* - \nu_B \sigma_{B11}^*) / E_B \Rightarrow \quad (52)$$

$$\Rightarrow E_B = 1 / A_{22}^*, \nu_B = -A_{12}^* / A_{22}^*; \{e^*\} = [A^*]\{\sigma_B^*\}$$



$$\{e^*\} = \begin{Bmatrix} e_{11}^* \\ e_{22}^* \\ \gamma_{12}^* \\ \gamma_{13}^* \\ \gamma_{23}^* \end{Bmatrix}; [A^*] = \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* & 0 & 0 & 0 \\ & A_{22}^* & 0 & 0 & 0 \\ & & A_{66}^* & 0 & 0 \\ & Sim & & A_{44}^* & 0 \\ & & & & A_{55}^* \end{bmatrix}; \{\sigma_B^*\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{B11}^* \\ \sigma_{B22}^* \\ \tau_{B12}^* \\ \tau_{B13}^* \\ \tau_{B23}^* \end{Bmatrix};$$

$$0 < \omega \leq 1: A_{11}^* = 1/(E_B \omega); A_{12}^* = -\nu_B / E_B; A_{22}^* = 1/E_B;$$

$$A_{44}^* = A_{66}^* = 2(1 + \nu_B)/(E_B \omega); A_{55}^* = 2(1 + \nu)/E_B;$$

Железобетонные  
слои с трещиной  
(продолжение) :

$$[B_S^C] = \begin{bmatrix} E_{S11} \mu_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & E_{S22} \mu_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & Sim & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \text{ для арматуры в } (X_1 O X_2) \quad (53)$$

$$[B] = [B_B^C] + [B_S^C], [B_B^C] = [A^C]^{-1} \quad (54)$$

$$\text{В.И. Мурашев: } \psi_S = E_{sn} / (E_B \omega + E_{sn}) \quad (55) \quad E_{sn} = E_{S11} \mu_{11} \cos^4 \chi_1 + E_{S22} \mu_{22} \sin^4 \chi_1 \quad (56)$$

$$((55), (56)) \Rightarrow \omega = (E_{S11} \mu_{11} \cos^4 \chi_1 + E_{S22} \mu_{22} \sin^4 \chi_1) (1/\psi_s - 1) / E_B \quad (57)$$

$$\text{Г.А. Гениев, В.Н. Киссюк, Г.А. Тюпин: } \psi_S = 1 - 0,7 R_{bt} / \sigma_{11}^* \quad (58) \quad \text{при } \sigma_{B11}^* = 0,7 R_{bt} \quad (59)$$

$$(48) \Rightarrow (B_{B11}^C e_{11} + B_{B12}^C e_{22} + B_{B16}^C \gamma_{12}) \cos^2 \chi_1 + (B_{B12}^C e_{12} + B_{B22}^C e_{22} + B_{B26}^C \gamma_{12}) \sin^2 \chi_1 + \\ + (B_{B16}^C e_{11} + B_{B26}^C e_{26} + B_{B66}^C \gamma_{12}) \sin 2\chi_1 = 0,7 R_{bt} \quad (60) \Rightarrow [A^C](\omega, \psi_s), [B](\omega, \psi_s)$$



# Моделирование фиктивных слоев (алгоритм решения уравнения (48) )

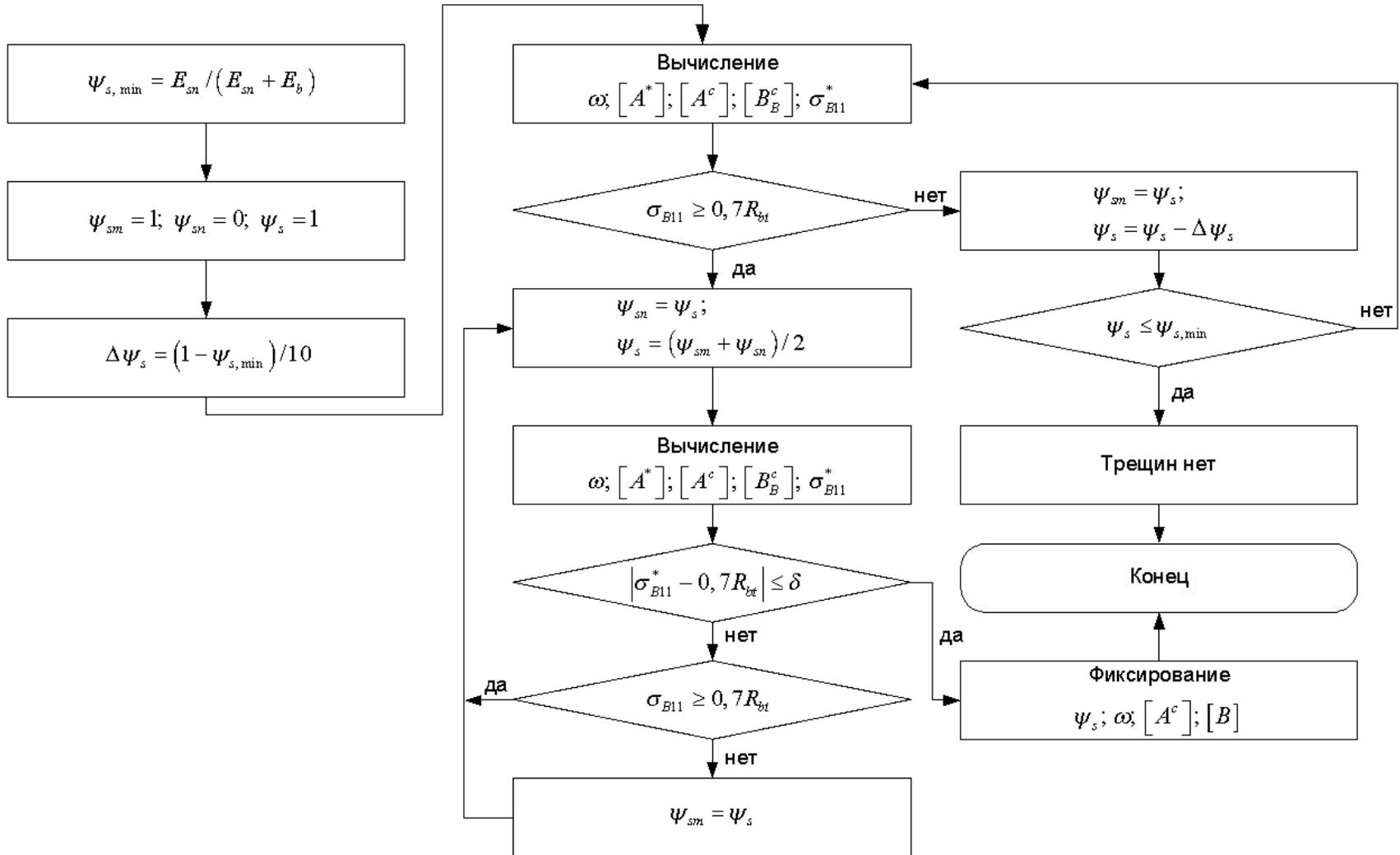


Рис. 10. Блок-схема алгоритма



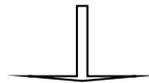
## Моделирование фиктивных слоев (окончание )

*Железобетонные слои  
с пересекающимися  
трещинами:*

$$\begin{aligned} [B] &= [B_s^C] \\ [B_s^C] &\Leftarrow (42) \end{aligned} \quad (61)$$

### Алгоритм решения задачи об определении НДС армированных оболочек из материалов с усложненными свойствами

1. Формирование задания на расчет конструкции.
2. Формирование матрицы связи узлов конечных элементов.
3. Формирование граничных условий.
4. Задание нагружения оболочки.
5. Формирование матриц жесткости конечных элементов.
6. Расчет вектора узловых перемещений.



- Повышение помехозащищенность вычислительного процесса
- Возможность искусственно прервать ход решения для:
  - оценки динамику сходимости,
  - корректировки дальнейшего вычислительного процесса,
  - продолжения процесса с прерванной операции.



# Чистое кручение трубчатого образца кольцевого сечения

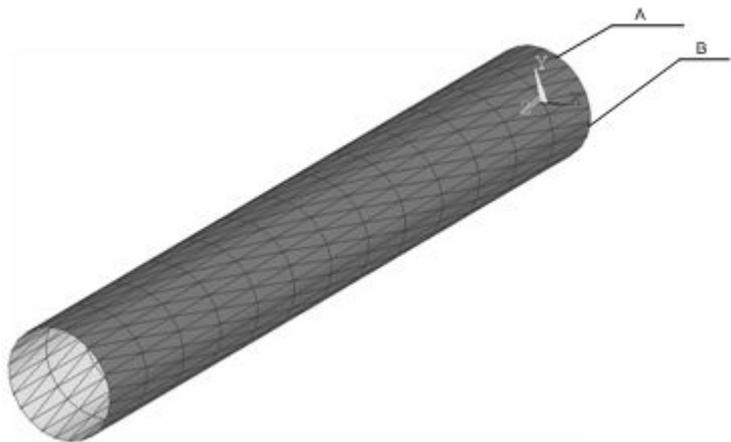


Рис. 11. Конечно-элементная сетка

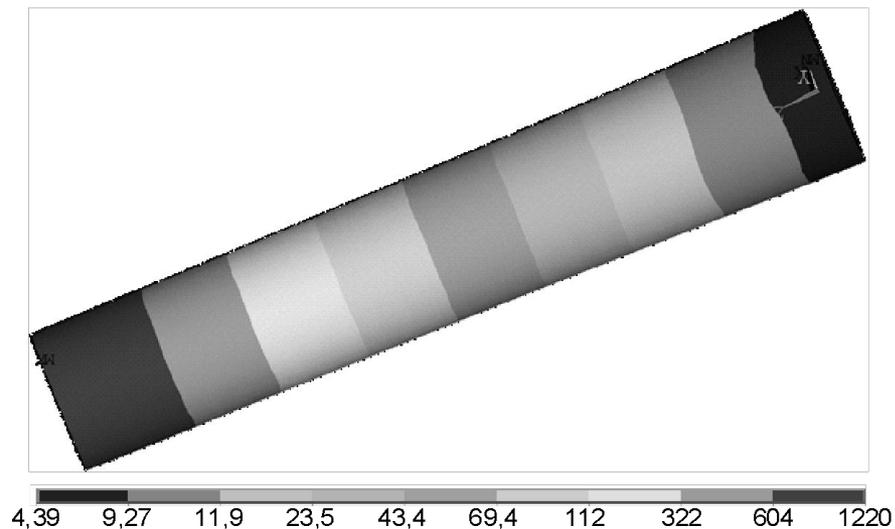


Рис. 12. Перемещения вдоль образующих ( $\times 10^6$  м)

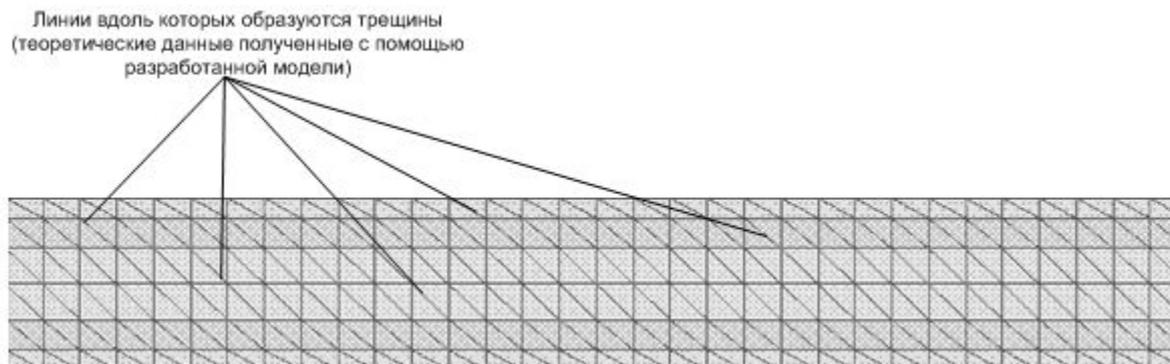
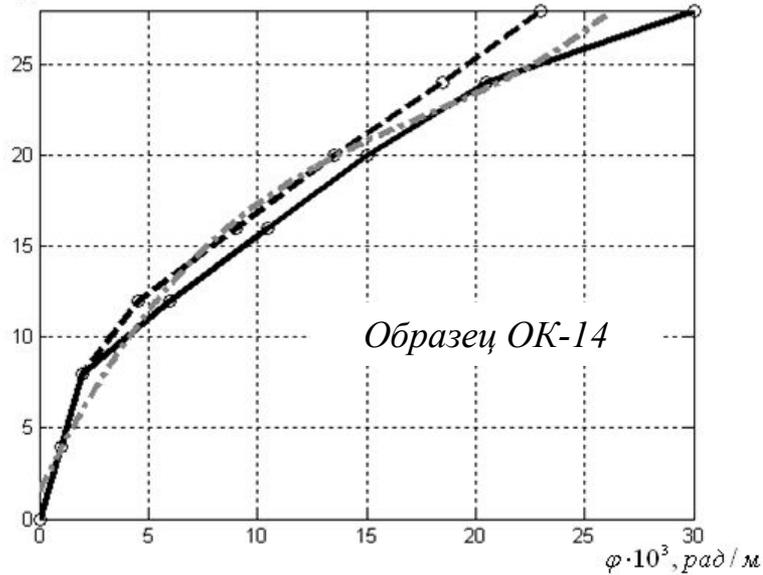


Рис. 13. Схема образования трещин

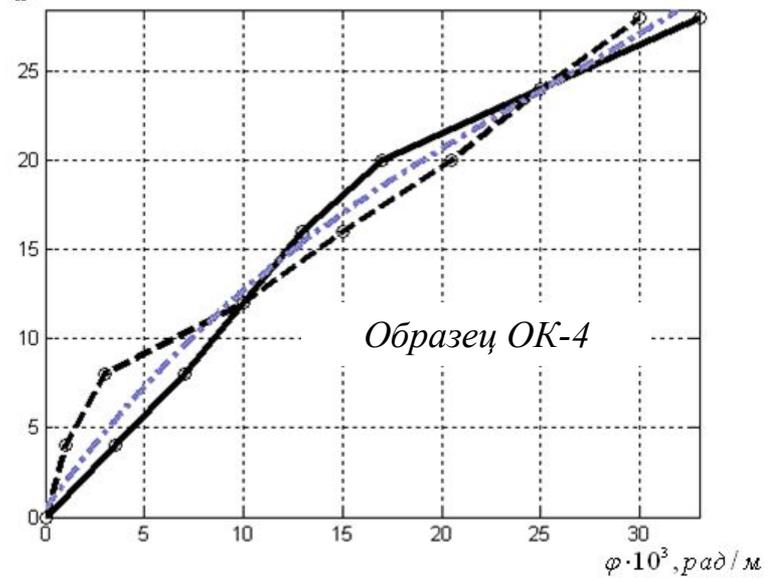


# Чистое кручение трубчатого образца кольцевого сечения (расчет)

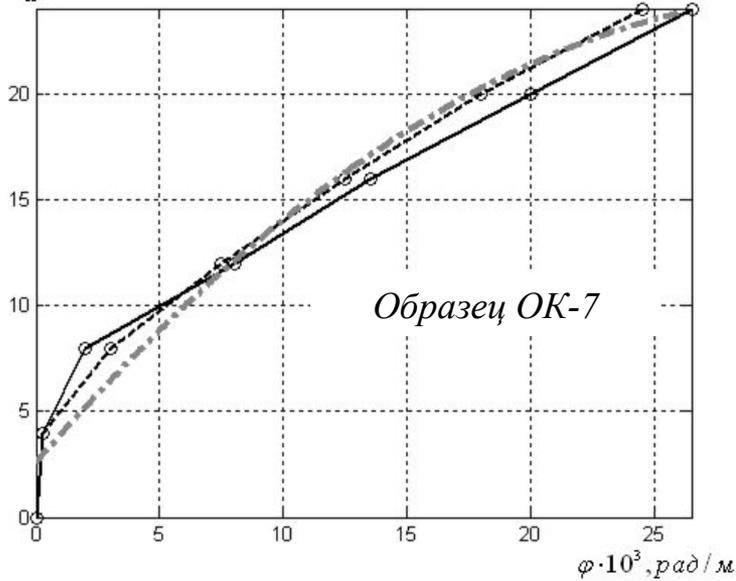
$M_x, \text{кН} \cdot \text{м}$



$M_x, \text{кН} \cdot \text{м}$



$M_x, \text{кН} \cdot \text{м}$



$M_x, \text{кН} \cdot \text{м}$

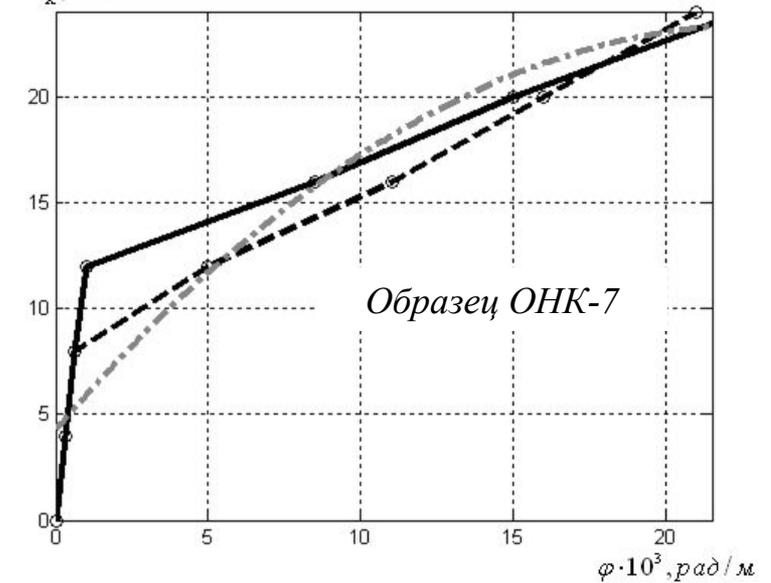


Рис. 14. Зависимость угла закручивания от крутящего момента



# Цилиндрическая железобетонная оболочка

(размеры в плане 24x12 м, высота подъема 2,5 м, жесткое защемление по образующим)

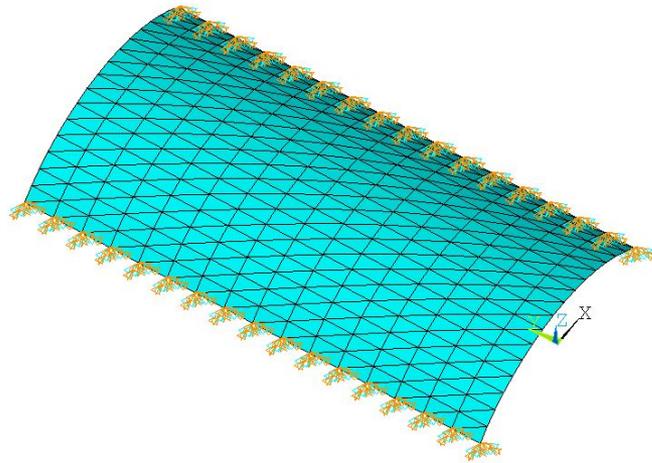


Рис. 15. Конечно-элементная сетка

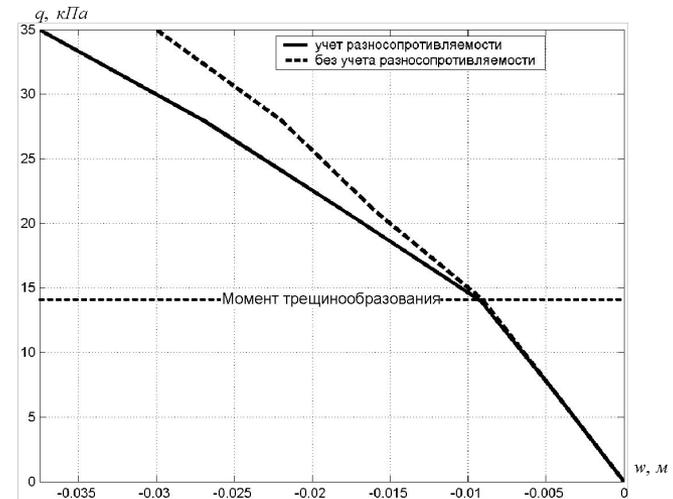


Рис. 16. График вертикальных прогибов  $w(q)$  в центре плана оболочки

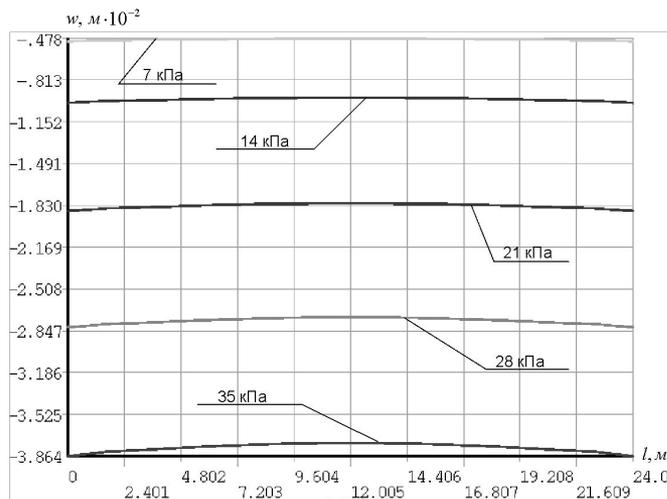


Рис. 17. Распределение вертикальных прогибов вдоль длинной оси

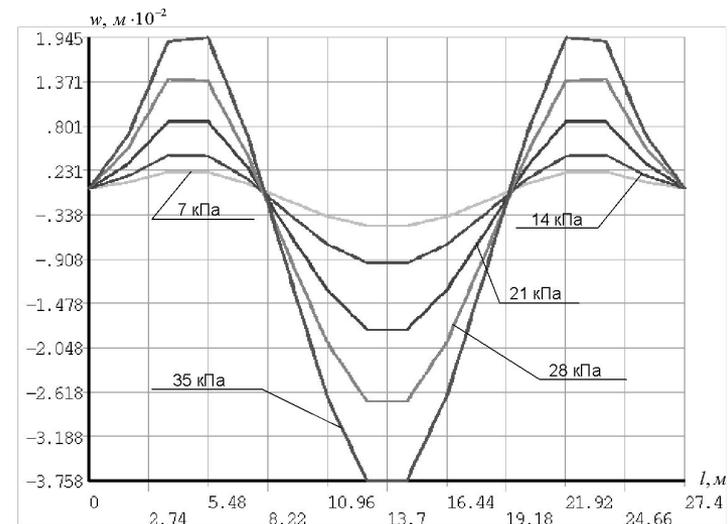
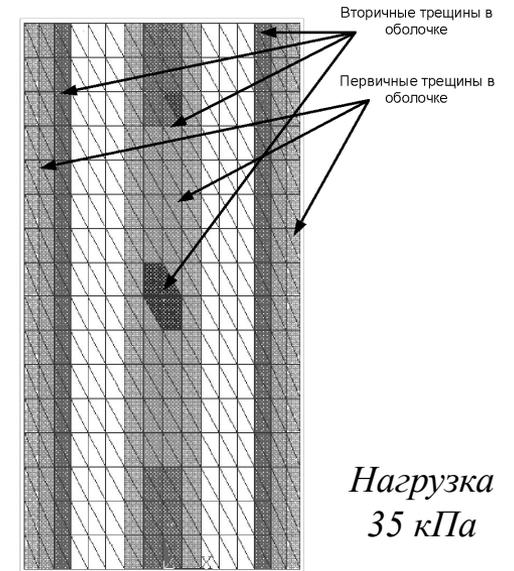
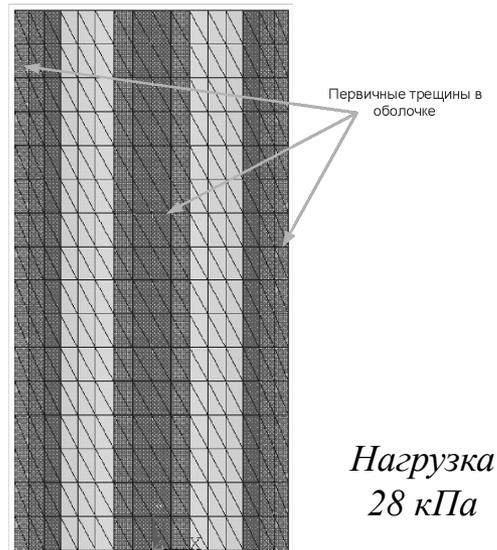
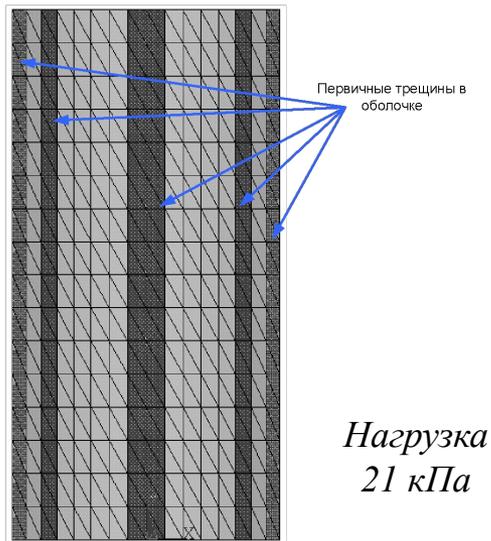
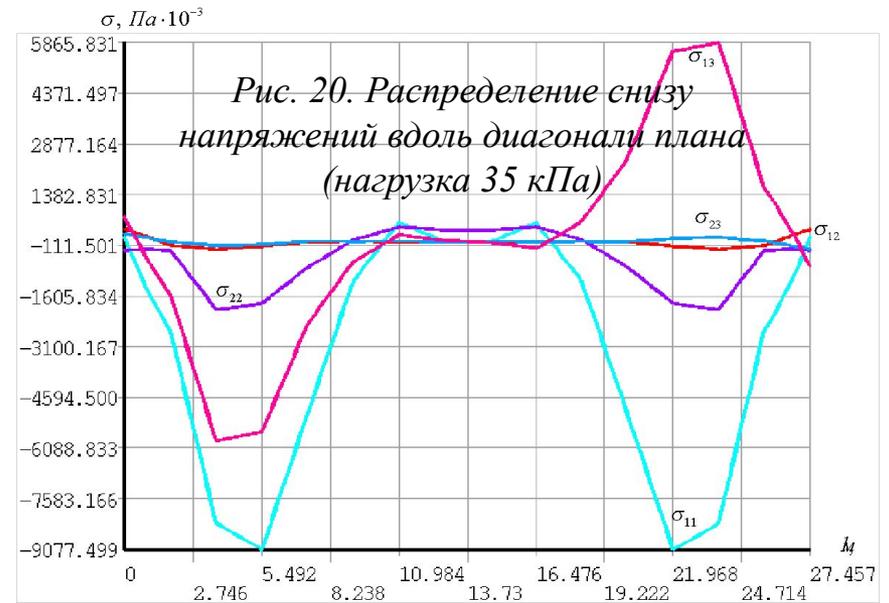
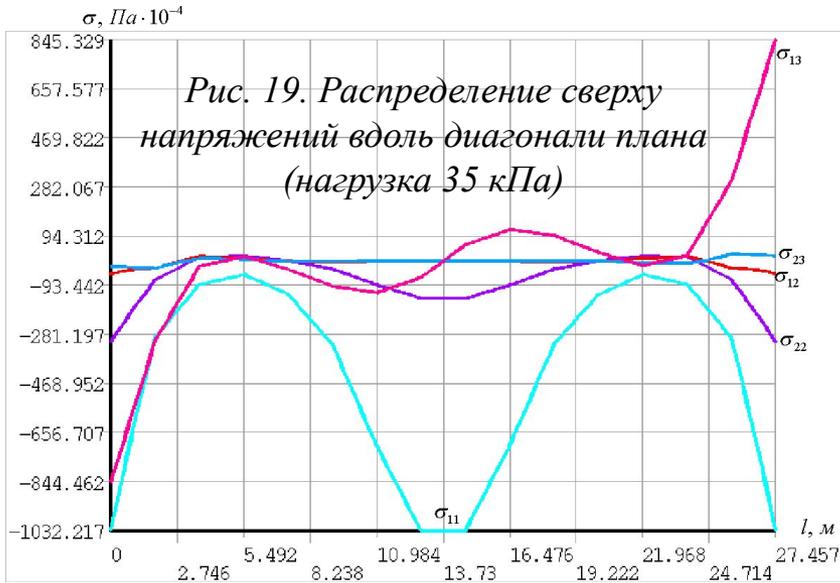


Рис. 18. Распределение вертикальных прогибов вдоль диагонали плана

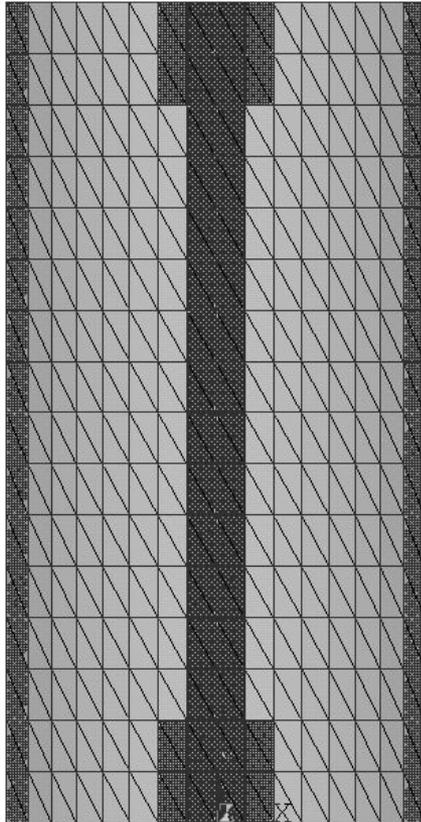
# Цилиндрическая железобетонная оболочка (продолжение)



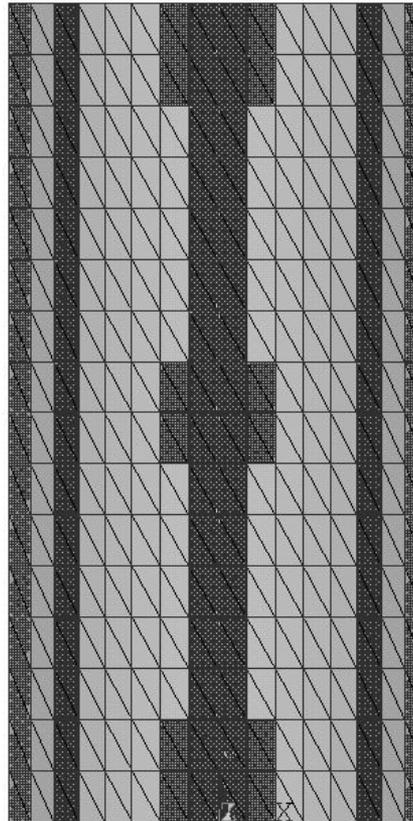
*Рис. 21. Развитие трещин в оболочке*

## Цилиндрическая железобетонная оболочка (окончание)

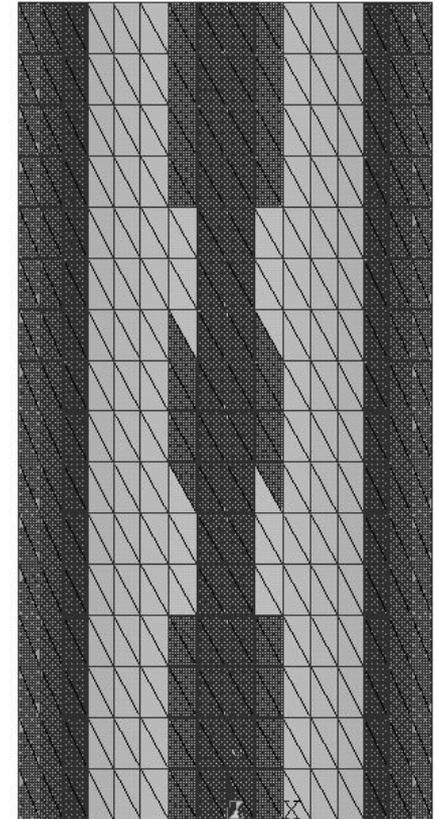
*Нагрузка 21 кПа*



*Нагрузка 28 кПа*



*Нагрузка 35 кПа*



*Рис. 22. Развитие пластических деформаций в арматуре*

# Цилиндрическая железобетонная оболочка

(размеры в плане 6х12 м, высота подъема 1,8 м, шарнирное опирание по образующим)

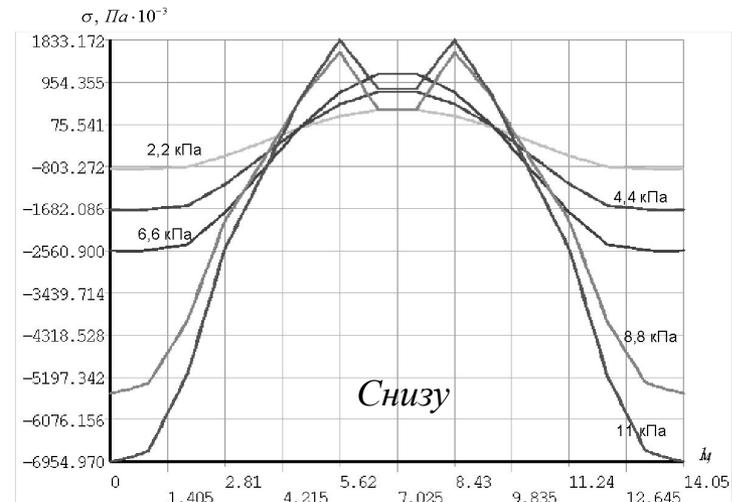
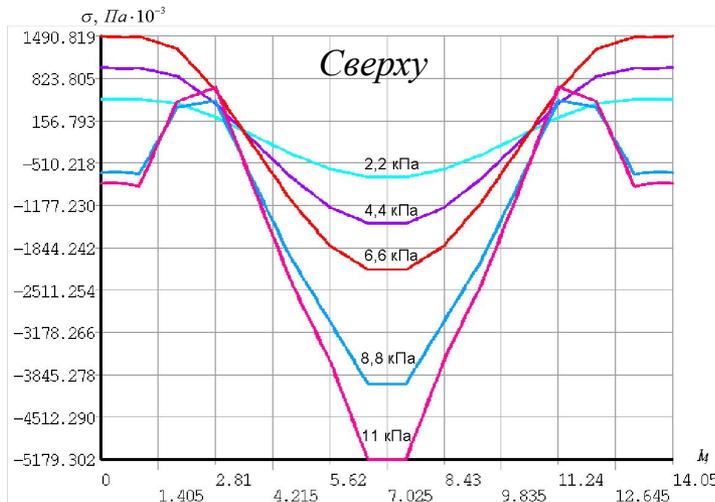


Рис. 23. Распределение напряжений  $\sigma_{11}$  вдоль диагонали плана оболочки

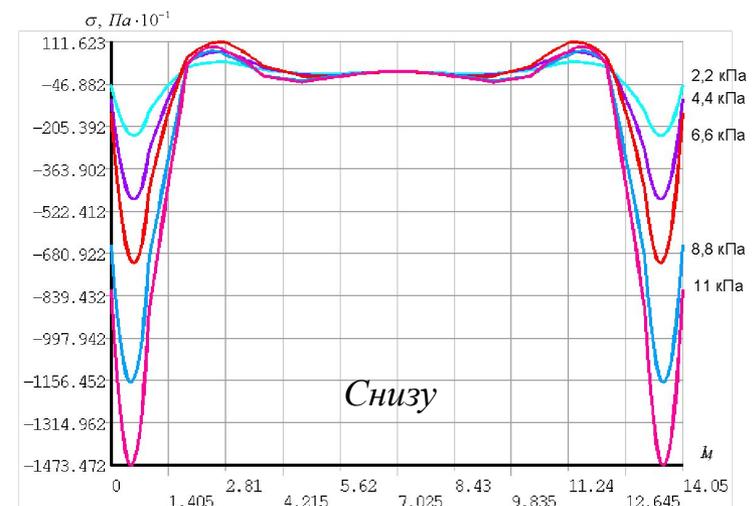
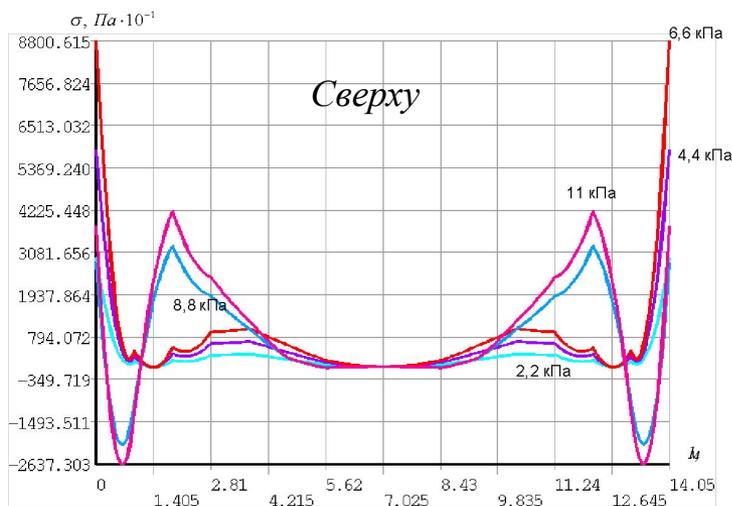


Рис. 24. Распределение напряжений  $\sigma_{12}$  вдоль диагонали плана оболочки

# Цилиндрическая железобетонная оболочка (окончание)

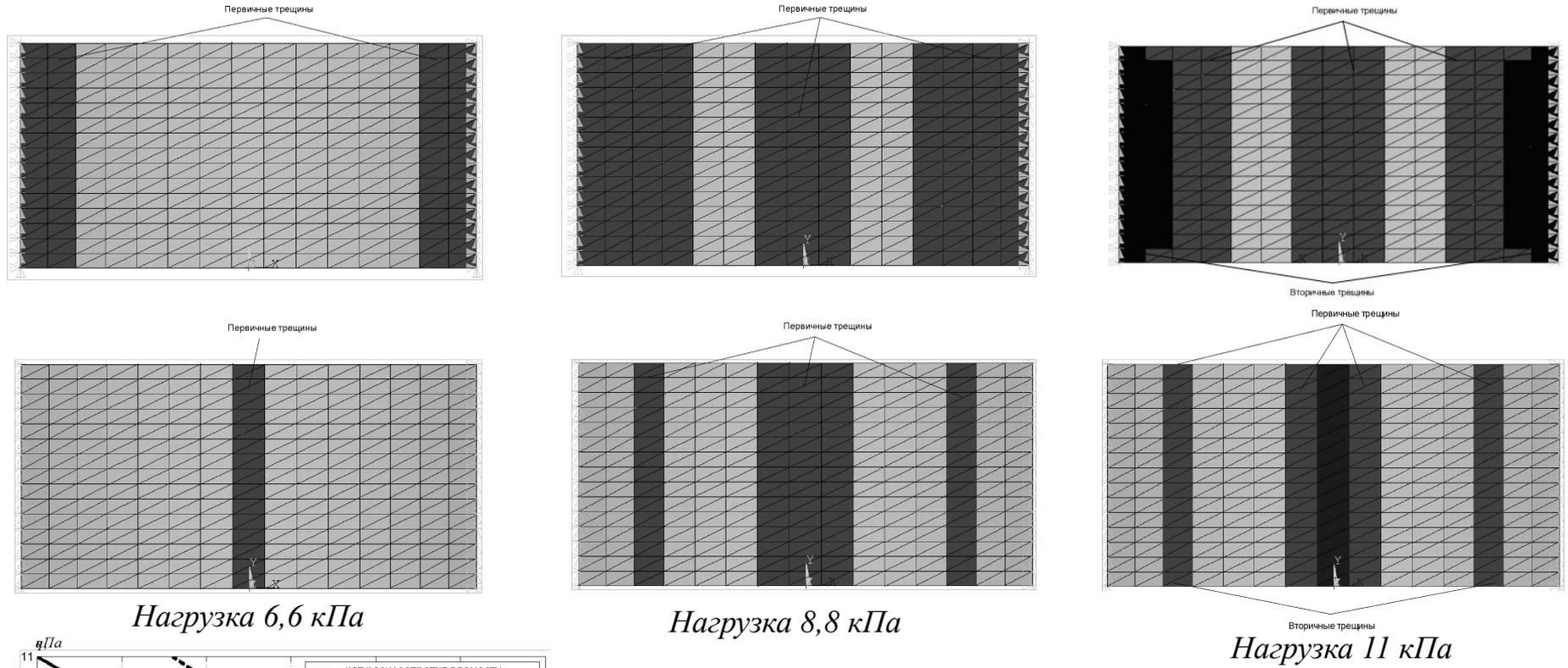


Рис. 25. Зоны образования трещин:  
верхний ряд – сверху, нижний ряд – снизу

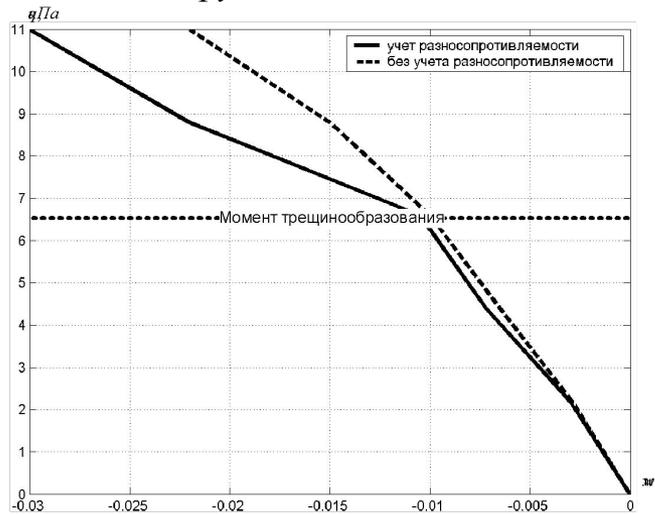


Рис. 26. График вертикальных прогибов  
 $w(q)$  в центре плана оболочки

# Оболочка положительной гауссовой кривизны

(размеры в плане 24x24 м, высота подъема 6 м)

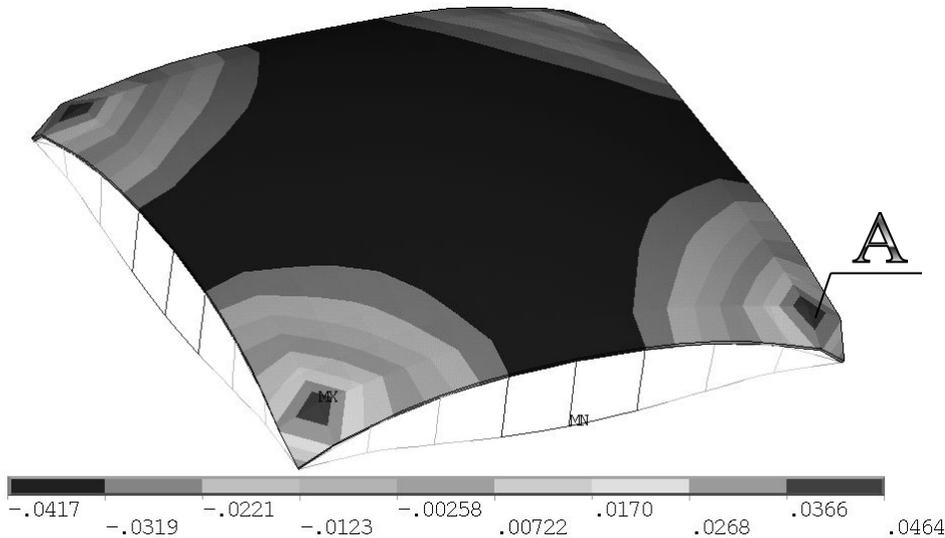


Рис. 27. Картина распределения вертикальных перемещений  $w$  (м) по поверхности оболочки

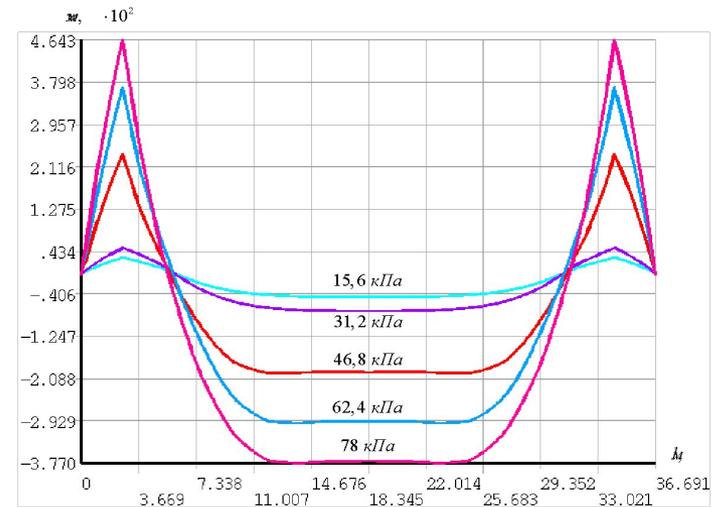


Рис. 28. Распределение вертикальных прогибов  $w$  вдоль диагонали плана оболочки

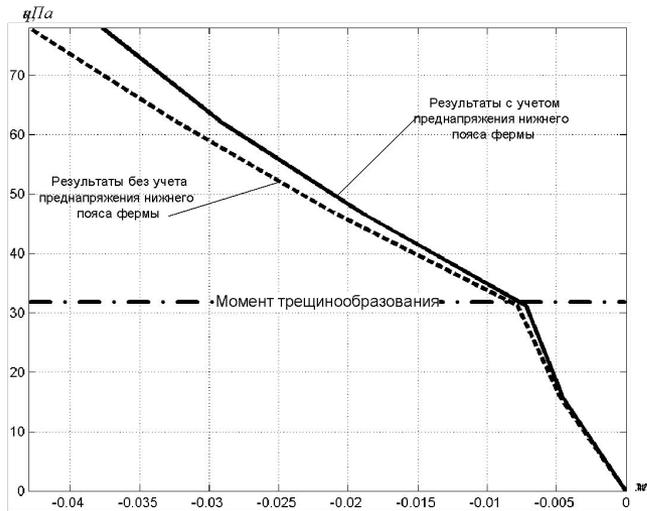


Рис. 29. График вертикальных прогибов  $w(q)$  в центре плана оболочки

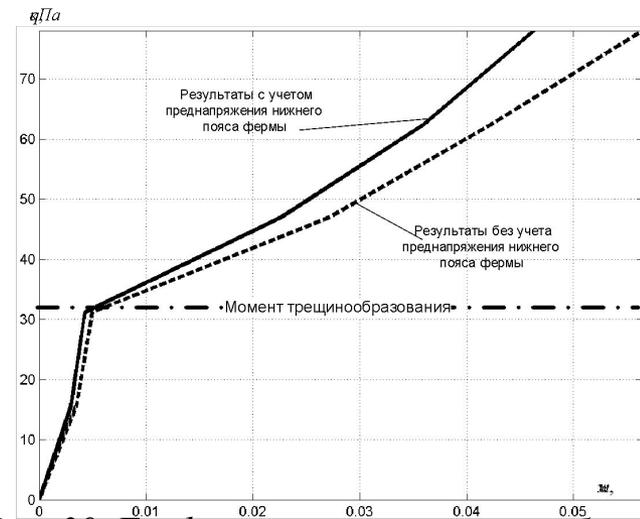


Рис. 30. График вертикальных прогибов  $w(q)$  в точке  $\max w(q)$

## Оболочка положительной гауссовой кривизны (продолжение)

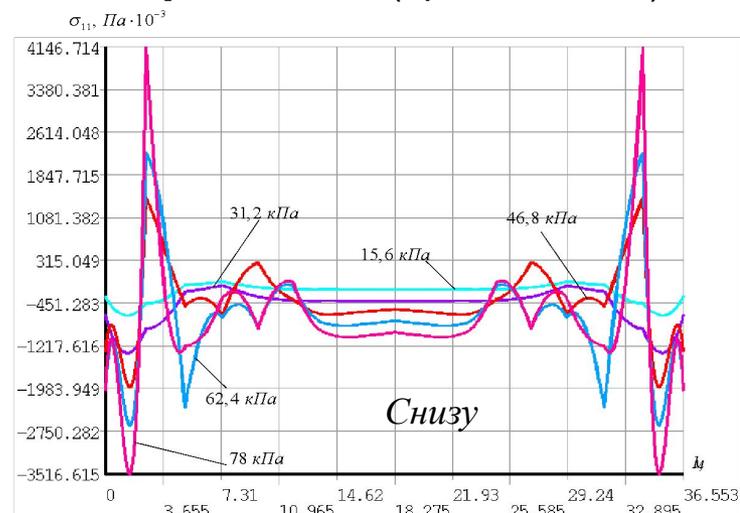
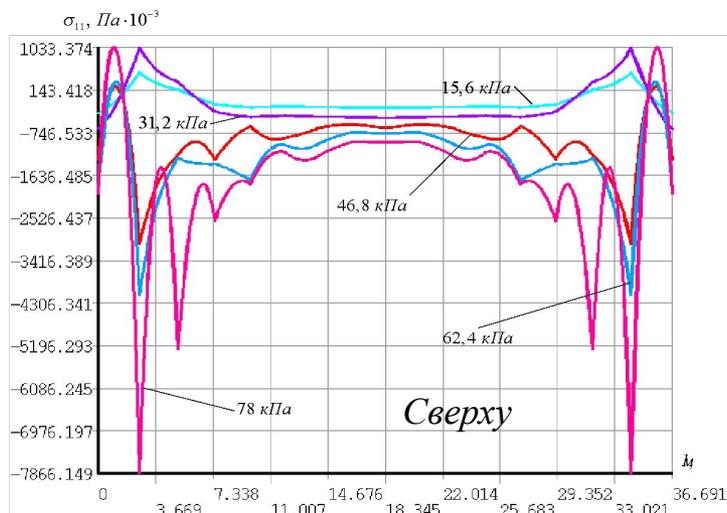


Рис. 31. Распределение напряжений  $\sigma_{11} = \sigma_{22}$  вдоль диагонали плана оболочки

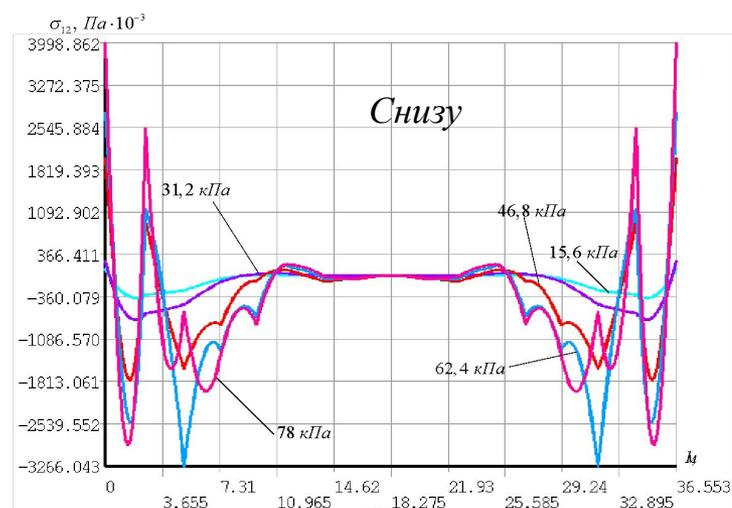
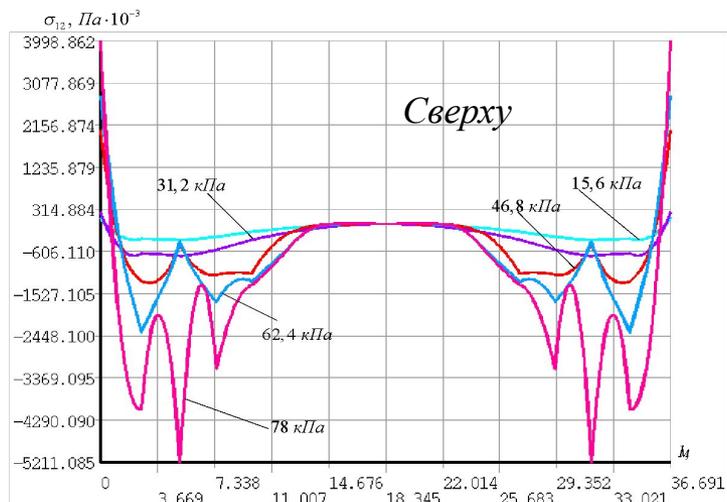
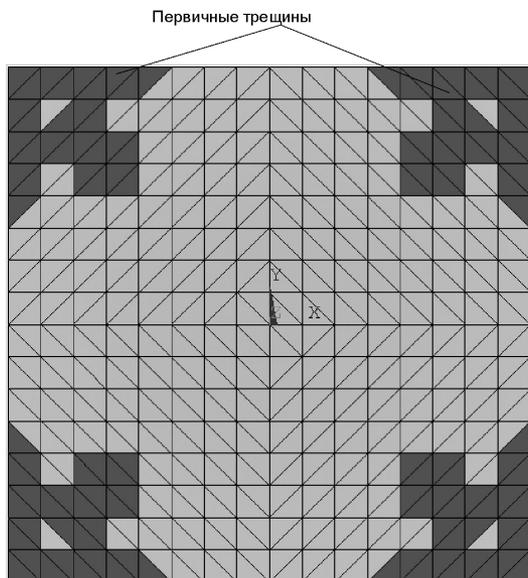


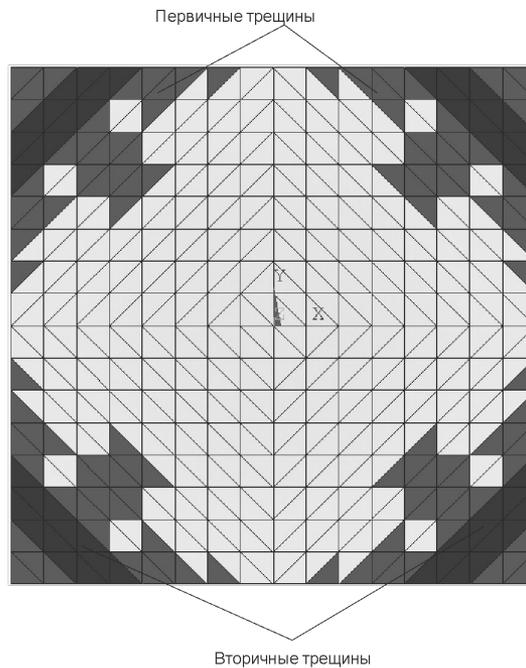
Рис. 32. Распределение напряжений  $\sigma_{12}$  вдоль диагонали плана оболочки

# Оболочка положительной гауссовой кривизны (окончание)

Нагрузка 46,8 кПа



Нагрузка 62,4 кПа



Нагрузка 78 кПа

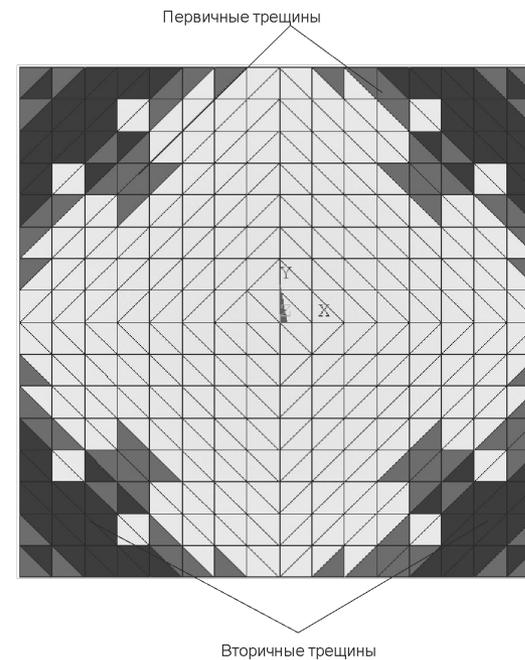


Рис. 33. Зоны образования трещин на верхней поверхности оболочки

# ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Проведенные исследования позволили получить новое решение научно-технической задачи механики деформируемого твердого тела, заключающееся в разработке математической модели и программного комплекса, ориентированных на решение задач по исследованию НДС элементов макрооднородных и армированных оболочечных конструкций, выполненных из разносопротивляющихся материалов, с учетом трещинообразования и пластических деформаций в арматуре. Получены решения для оболочек, которыми подтверждено наличие известных фактов и обнаружены новые количественные и качественные эффекты деформирования. В частности показано, что в стадии работы конструкции с трещинами на ее жесткость и прочность существенное влияние оказывает процессы образования, распространения трещин и переход арматуры в пластическую область работы. С другой стороны полученные решения свидетельствуют о необходимости учета нелинейной разносопротивляемости бетона на всех стадиях работы железобетонной конструкции.

2. В рамках нормированных пространств напряжений, предложенных в работах Н.М. Матченко, Л.А.Толоконникова и А.А.Трещева проанализированы подходы к построению определяющих соотношений деформационной теории структурно изотропных упругопластических дилатирующих материалов, чувствительных к виду напряженного состояния. Для использования в прикладных исследованиях выделен наиболее универсальный вариант потенциала деформаций. Проанализированы вытекающие из принятых уравнений состояния законы изменения объема, формы и фазовая характеристика.

## **ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ** (продолжение)

**3.** Построен плоский треугольный гибридный конечный элемент, обеспечивающий решения задач об исследовании НДС элементов оболочечных конструкций, выполненных из материалов с усложненными свойствами. Модифицирована классическая конечно-элементная модель стержня для учета усложненных свойств и трещинообразования.

**4.** Разработана математическая модель решения задачи об определении НДС оболочечных конструкций разной геометрической конфигурации, выполненных из макрооднородных материалов, обладающих физической нелинейностью. В основу этой модели положен метод многослойных конечных элементов.

**5.** На базе модифицированной пошагово-итерационной процедуры решения нелинейных задач разработан и запрограммирован алгоритм определения характеристик НДС оболочечных конструкций.

**6.** С использованием разработанного программного обеспечения решен ряд задач по определению характеристик НДС:

- трубчатых железобетонных элементов при чистом кручении;
- цилиндрической оболочки, выполненной из макрооднородного разносопротивляющегося материала. В качестве конкретного материала был принят графит марки АРВ;
- жестко защемленной вдоль образующих и свободно опертой вдоль образующих цилиндрических оболочек;
- оболочки положительной гауссовой кривизны прямоугольной в плане опертой на фермы по контуру.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ (окончание)

– для трубчатых железобетонных элементов при чистом кручении проведено сравнение с экспериментальными данными и теорией Н.И. Карпенко, получено хорошее совпадение результатов;

– цилиндрической оболочки выполненной из макрооднородного разнсопротивляющегося материала. В качестве конкретного материала был принят графит марки АРВ. Результаты расчета показали, что за счет учета разнсопротивляемости удалось получить уточнение результатов, по сравнению с «классической теорией» оболочек до 33% для перемещений и углов поворота и в среднем до 50% для напряжений;

– жестко защемленной вдоль образующих и шарнирно опертой вдоль образующих цилиндрических оболочек. Анализ результатов их расчета показал, что учет усложненных свойств существенен при проведении статических расчетов. В частности, для перемещений различия составили до 70% по сравнению с расчетами без учета усложненных свойств бетона.

– оболочки положительной гауссовой кривизны прямоугольной в плане опертой на фермы по контуру. Показано, что учет трещинообразования, пластических деформаций арматуры, а также разнсопротивляемости бетона имеет существенное влияние для расчета НДС соответствующих конструкций.