Перестановки.

Размещения.

Сочетания.

комбинаторика

Определение

Область математики,
в которой изучают
комбинаторные задачи,
называется
комбинаторикой

Комбинаторика

Слово "комбинаторика" происходит от латинского "combinare", которое означает "соединять, сочетать".

Комбинаторика - раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

Комбинаторными задачами интересовались и математики, занимавшиеся составлением и разгадыванием шифров, изучением древних рукописей.

Сейчас комбинаторика находит приложения во многих областях науки: в биологии, в химии, механике и т.д.

Факториал

Факториа́л числа *n* (обозначается *n*!, произносится *эн факториа́л*) — это произведение всех натуральных чисел до *n* включительно:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$$

Факториал

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

Главное свойство факториала

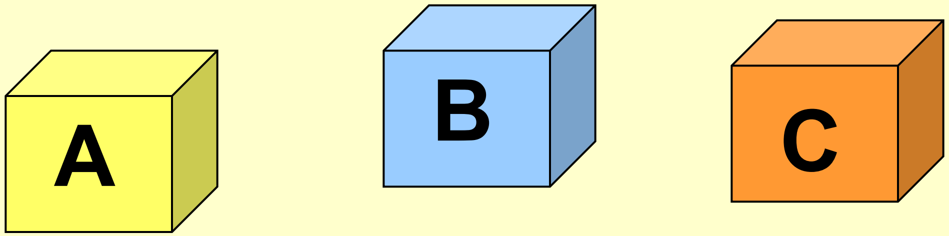
$$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$$

Следствие

$$1! = 1$$

$$0! = 1$$

Пусть имеются три кубика с буквами А, В и С. Составьте всевозможные комбинации из этих букв.



ABC	ACB
BCA	BAC
CAB	CBA

Эти комбинации отличаются друг от друга только расположением букв (перестановка букв).

Перестановки

Перестановки — это комбинации, составленные из одних и тех же элементов и отличающиеся порядком их следования.

Число всех возможных перестановок элементов обозначается P_n, и может быть вычислено по формуле:

Формула перестановки:

$$P_n=n!$$

При перестановке число объектов остается неизменными, меняется только их порядок

С ростом числа объектов количество перестановок очень быстро растет и изображать их наглядно становится затруднительно.

3 объекта

количество перестановок 6

$$P_n = n!$$

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

Задача 1. В турнире участвуют семь команд. Сколько вариантов распределения мест между ними возможно?

P_7=7!=1*2*3*4*5*6*7=5040

Ответ: 5040

Задача 2. Сколькими способами могут разместиться за круглым столом 10 человек?

P_{10} =10! = = 1*2*3*4*5*6*7*8*9*10 = 3628800

Ответ: 3628800

1. Вычислить: $a)\ 5!$

$$б)\ \frac{7!}{3!}$$

$$в)\ \frac{11!}{8!}$$

2. В среду в 9 классе 6 уроков: алгебра, русский язык, черчение, биология, химия, обществознание. Сколько вариантов расписания можно составить на среду?

Размещения

Пусть имеется n различных объектов.
Будем выбирать из них m объектов и переставлять всеми возможными способами между собой .

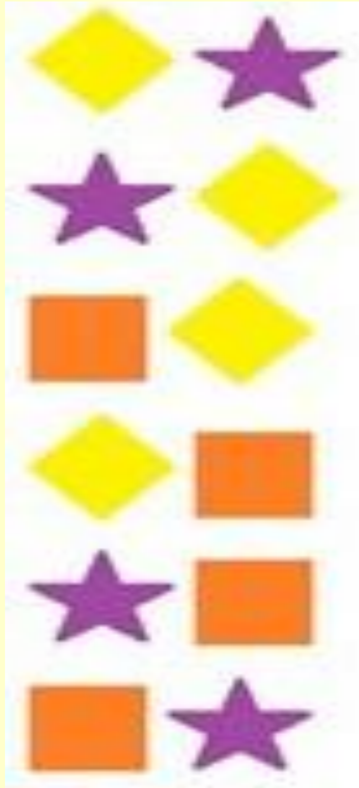
Получившиеся комбинации называются **размещениями** из n объектов по m, а их число равно:

Формула размещения:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

При размещениях меняется и состав выбранных объектов, и их порядок.

3 объекта



Размещение по 2 фигуры

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

n=3 - всего объектов (различных фигур)
m= 2 – выбор и перестановка объектов

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1} = 6$$

Сколькими способами можно расставить 5 томов на книжной полке, если выбирать их из имеющихся в наличии семи книг?

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$A_7^5 = \frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7!}{2!} = \frac{2! \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{2!} = 2520$$

Ответ: 2520 способов

1. Вычислить:

$$а)\ A_6^2$$

$$б)\ \frac{A_{12}^4 - A_{11}^4}{A_{10}^3}$$

2. Найти количество трехзначных чисел с неповторяющимися цифрами, которые можно составить из цифр: 1, 2, 3, 4, 5.

$$A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Ответ: 60 чисел

Сочетания

3 объекта

Пусть имеется *n* различных объектов.
Будем выбирать из них *m* объектов все возможными способами

Получившиеся комбинации называются **сочетаниями** из *n* объектов по *m*,

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!}$$

В сочетаниях меняется состав выбранных объектов, но порядок не важен

Задача: Сколькими способами можно распределить три путевки в один санаторий между пятью желающими?

Так как путевки предоставлены в один санаторий, то варианты распределения отличаются друг от друга хотя бы одним желающим. Поэтому число способов распределения

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!}$$

$$C_5^3 = \frac{5!}{(5-3)! * 3!} = \frac{5!}{2! * 3!} = \frac{3! * 4 * 5}{3! * 2!} = \frac{4 * 5}{2} = 10$$

Ответ: 10 способов.

Задача: В цехе работают 12 человек: 5 женщин и 7 мужчин. Сколькими способами можно сформировать бригаду из 7 человек, чтобы в ней было 3 женщины?

Из пяти женщин необходимо выбирать по три, поэтому число способов отбора C_5^3

Так как требуется отобрать четырех мужчин из семи, то число способов отбора мужчин C_7^4

$$C_5^3 * C_7^4 = \frac{5!}{3! * 2!} * \frac{7!}{4! * 3!} = \frac{3! * 4 * 5 * 4! * 5 * 6 * 7}{3! * 1 * 2 * 4! * 1 * 2 * 3} =$$

$$= \frac{4 * 5 * 5 * 6 * 7}{2 * 2 * 3} = 2 * 25 * 7 = 350$$

Ответ: 350

Задача:
Группу из 20 студентов следует рассадить в аудитории по 2 человека за каждой партой. Порядок их размещения не имеет значения. Определить количество возможных вариантов сочетаний.

Ответ: 190