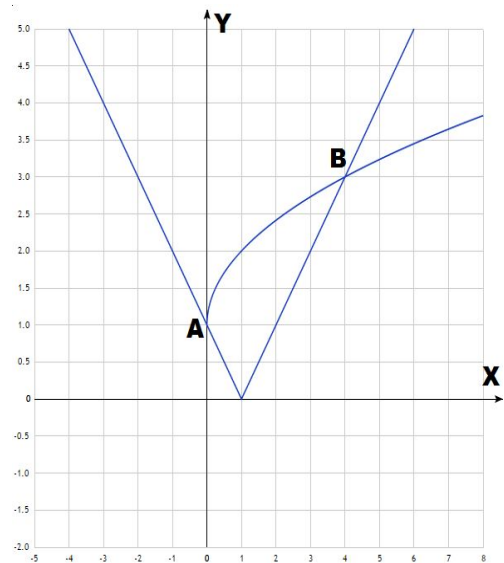


УРОК НА ТЕМУ:

**ФУНКЦИОНАЛЬНО-
ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД
РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И
НЕРАВЕНСТВ**



Функционально-графический метод решения уравнений.

Пусть нам дано уравнение вида $f(x)=g(x)$. Мы строим два графика $y=f(x)$ и $y=g(x)$ на одной координатной плоскости, и отмечаем точки, в которых наши графики пересекаются. Абсцисса точки пересечения (координата по x) и есть решение нашего уравнения.

Так как метод называется функционально графическим, то не всегда нужно строить графики функций, можно пользоваться и свойствами функций. Например, вы видите явное решение уравнения, в какой-то точке, если одна из функций строго возрастает, а другая строго убывает, то это и будет единственным решением уравнения. Свойства монотонности функций, часто помогают при решении различных уравнений.

Вспомним еще один метод: Если на промежутке X , наибольшее значение одной из функций $y=f(x)$ или $y=g(x)$ равно A , а соответственно наименьшее значение другой функции так же равно A , то уравнение $f(x)=g(x)$ равносильно системе:

$$\begin{cases} f(x) = A \\ g(x) = A \end{cases}$$

Функционально-графический метод решения уравнений.

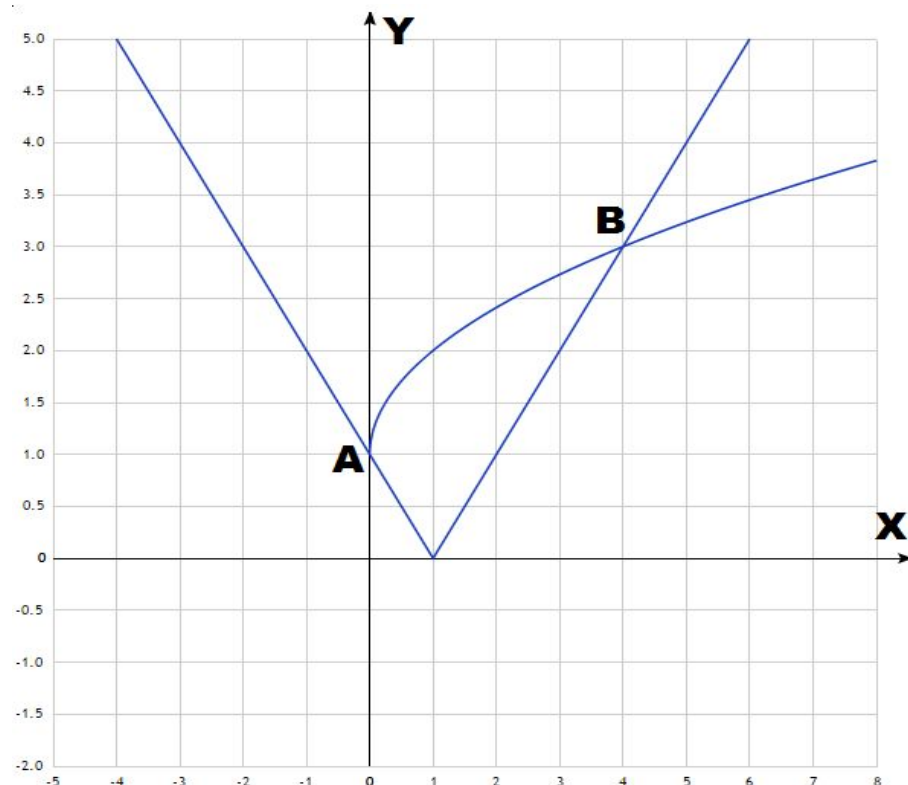
Пример. Решить уравнение:

$$\sqrt{x} + 1 = |x - 1|$$

Решение. Построим графики функций, на одной координатной плоскости: $y = \sqrt{x} + 1$ и $y = |x - 1|$

Как видно из рисунка наши графики пересекаются в двух точках с координатами: A(0;1) и B(4;3). Решением исходного уравнения будут абсциссы этих точек.

Ответ: $x=0$ и $x=4$.



Функционально-графический метод решения уравнений.

Пример. Решить уравнение:

$$x^7 + 3x - 134 = 0$$

Решение. Перейдем к равносильному уравнению:

$$x^7 = 134 - 3x$$

Можно заметить, что $x=2$ является решением данного уравнения. Давайте докажем, что это единственный корень.

Функция $y = x^7$ — строго возрастающая на всей области определения.

Функция $y = 134 - 3x$ — строго убывающая на всей области определения.

Тогда графики этих функций либо вообще не пересекаются, либо пересекаются в одной точке, эту точку мы уже нашли $x=2$.

Ответ: $x=2$.

Функционально-графический метод решения уравнений.

Пример. Решить уравнение:

$$\frac{8}{x} = \sqrt{x}$$

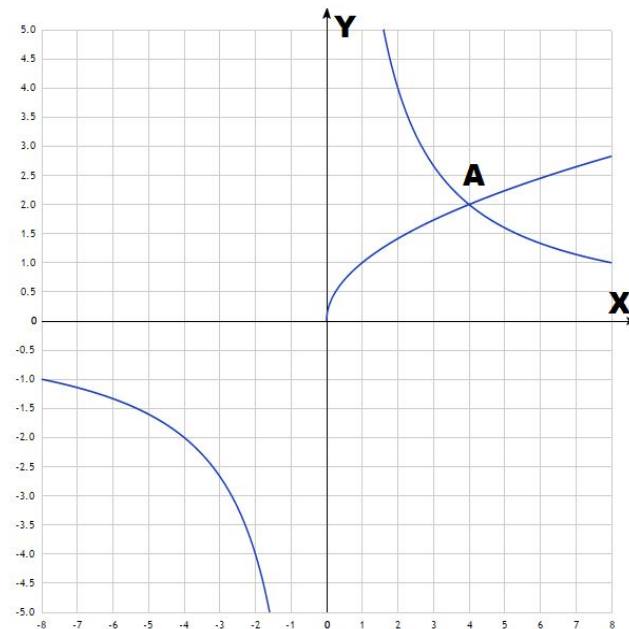
Решение. Данное уравнение можно решить двумя способами.

1. Опять же заметим, что $x=4$ – корень уравнения. На отрезке $[0; +\infty)$ гипербола убывает, а функция корня квадратного возрастает, следовательно не более одного пересечения графиков. Значит $x=4$ – единственный корень данного уравнения.

2. Построим два графика

Прекрасна видна точка пересечения графиков с координатой по $x=4$.

Ответ: $x=4$.



Функционально-графический метод решения уравнений.

Пример. Решить уравнение:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) = x^2 - 6x + 10$$

Решение. Функция $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)$ периодическая функция, с максимальным значением равным одному.

Функция $y = x^2 - 6x + 10$ парабола, ветви которой смотрят вверх, что означает, что минимальное значение функция достигает в своей вершине. Найдем вершину и значение в вершине:

$$x_{\text{верш.}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2} = 3$$

$$y_{\text{верш.}} = 9 - 18 + 10 = 1$$

Как мы видим минимальное значение параболы совпадает с максимальным значением косинуса на всей числовой оси, тогда мы можем решить систему:
$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) = 1 \\ x^2 - 6x + 10 = 1 \end{cases}$$

Решением данной системы, очевидно, является $x=3$.

Ответ: $x=3$.

Решить следующие уравнения:

1. $\sqrt{x} - 2 = |x| - 4$

2. $x^3 + 5x - 42 = 0$