Понятие логарифма

Изобретение логарифмов, сократив работу астронома, продлило ему жизнь.

П.С. Лаплас

Рассмотрим уравнения:

$$2^x = 8$$

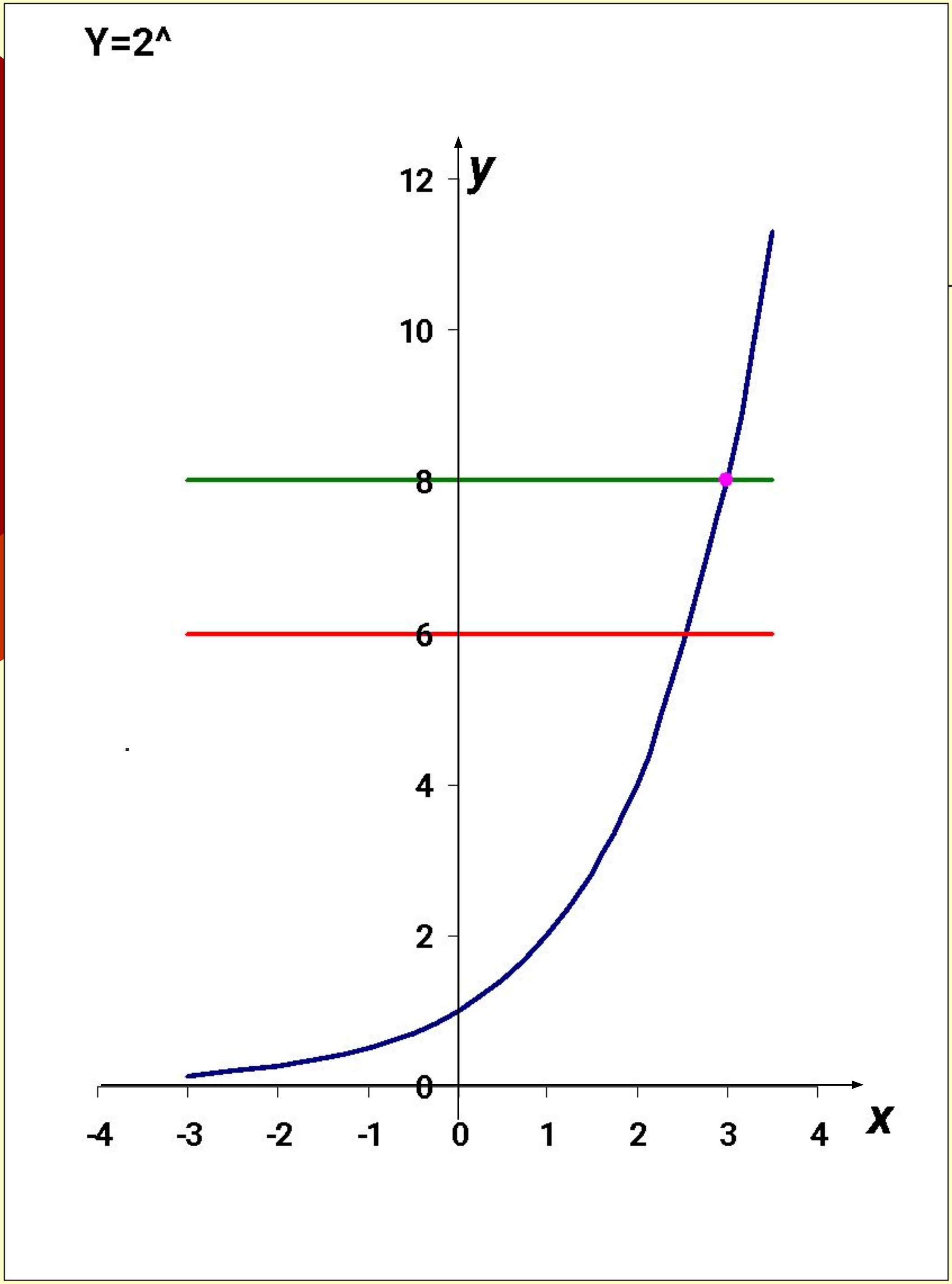
$$3^x = 4$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = 4$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^x = 2$$

Мотивация

Решая показательные уравнения, мы обратили внимание, на то что не всегда можно в правой и левой частях уравнения привести выражения к одному основанию. Такие уравнения решаем графически и можем указать только приближенное значение корня уравнения.



Итак, для любого уравнения вида,

$$a^x = b$$

где *a* и *b* – положительные числа, причем $a \neq 1$, существует единственный корень и его условились записывать так:

$$x = \log_a b$$

Определение

Логарифмом положительного числа b по положительному и отличному от 1 основанию a называют показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b.

Примеры

$$\log_2 8 = 3,\ \textit{так как}\ 2^3 = 8;$$

$$\log_3\left(\frac{1}{27}\right) = -3,\ \textit{так как}\ 3^{-3} = \frac{1}{27};$$

$$\log_{\frac{1}{5}} 25 = -2,\ \textit{так как}\ \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 25;$$

$$\log_4 2 = \frac{1}{2},\ \textit{так как}\ 4^{\frac{1}{2}} = 2.$$

Определение логарифма на языке символов:

1. $\log_a b = p$:

$$\begin{cases} a \rangle 0, a \neq 1; \\ b \rangle 0; \\ a^p = b. \end{cases}$$

2. $a^{\log_a b} = b$

Свойства, следующие из определения

- 1. $\log_a a = 1; \qquad a^1 = a.$
- 2. $\log_a 1 = 0; \qquad a^0 = 1.$
- 3. $\log_a a^c = c; \qquad a^c = a^c.$

Взаимосвязь операции возведения в степень и логарифмирования

- Возведение в степень
- Логарифмирование

$$7^2 = 49; \qquad \log_7 49 = 2.$$

$$10^3 = 1000; \qquad \log_{10} 1000 = 3.$$

$$0,2^5 = 0,0032; \qquad \log_{0,2} 0,00032 = 5.$$

$$5^{-3} = \frac{1}{125}; \qquad \log_5 \frac{1}{125} = -3.$$

Некоторые особые обозначения

- Логарифм по основанию 10 обычно называют десятичным логарифмом и используют символ $\lg$, $\lg 3{,}4; \lg 5; \lg b$

- В математике и технике большее применение имеют логарифмы, основанием которых служит особое число *e* и используют символ $\ln 25; \ln x$.

Изобретение логарифмов

Изобретение логарифмов в начале XVII в. тесно связано с развитием в XVI в. производства и торговли, астрономии и мореплавания, требовавших усовершенствования методов вычислительной математики.

Все чаще требовалось быстро производить громоздкие действия над многозначными числами, все точнее и точнее должны были быть результаты действий.

Вот тогда-то и нашла воплощение идея логарифмов, ценность которых состоит в сведении сложных действий III ступени (возведения в степень и извлечения корня) к более простым действиям II ступени (умножению и делению), а последних - к самым простым, к действиям I ступени (сложению и вычитанию).

Историческая справка

Термин «ЛОГАРИФМ» предложил Дж. Непер; он возник из сочетания греческих слов logos (здесь — отношение) и arithmos (число); в античной математике квадрат, куб и т. д. отношения a/b называются «двойным», «тройным» и т. д. отношением.

Таким образом, для Непера слова «lógu arithmós» означали «число (кратность) отношения», то есть логарифм у Дж. Непера — *вспомогательное число для измерения отношения двух чисел.*

Современное определение логарифма впервые дано английским математиком В. Гардинером (1742).

Знак логарифма — результат сокращения слова «ЛОГАРИФМ».

Портретная галерея

Непер Джон
(1550 - 1617)

Шотландский математик, изобретатель логарифмов.

Учился в Эдинбургском университете. Основными идеями учения о логарифмах Непер овладел не позднее 1594 г., однако его "Описание удивительной таблицы логарифмов", в котором изложено это учение, было издано в 1614 г.

В этом труде содержались определение логарифма, объяснение их свойств, таблицы логарифмов синусов, косинусов, тангенсов и приложения логарифмов в сферической тригонометрии.

В "Построении удивительной таблицы логарифмов" (опубликовано в 1619) Непер изложил принцип вычисления таблиц.

Изобретение логарифмов

Уже в 1623 г., т. е. всего через 9 лет после издания первых таблиц, английским математиком **Д. Гантером** была изобретена первая логарифмическая линейка, ставшая рабочим инструментом для многих поколений.

Устная работа

1. Найдите логарифм следующих чисел по основанию 3:
   9; 1; 1/27; . $\sqrt{3}$

2. Найдите числа, логарифмы которых по основанию 3, равны:
   0; –1; 3; –2.

3. При каком основании логарифм числа 1/16 равен:
   1; 2; 4; –1?

4. Вычислите:

$\log_2 8;$ $\lg 0{,}01;$ $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{25};$ $\log_{\sqrt{2}} 8.$

5. Имеет ли смысл выражение:

$\log_4(-16);$ $\log_2\left(3-2\sqrt{2}\right);$ $\sqrt{\log_{\frac{1}{3}} 9;}$ $\log_{0,5} \cos\frac{\pi}{3}.$

Проверка

1	2	0	−3	1/2
2	0	1/3	27	1/9
3	1/16	1/4	1/2	16
4	3	−2	2	6
5	нет	да	нет	да