Способы описания САУ (Математическое описание)

Математическое описание САУ

Предпосылка для количественной оценки работы и функционирования САУ.

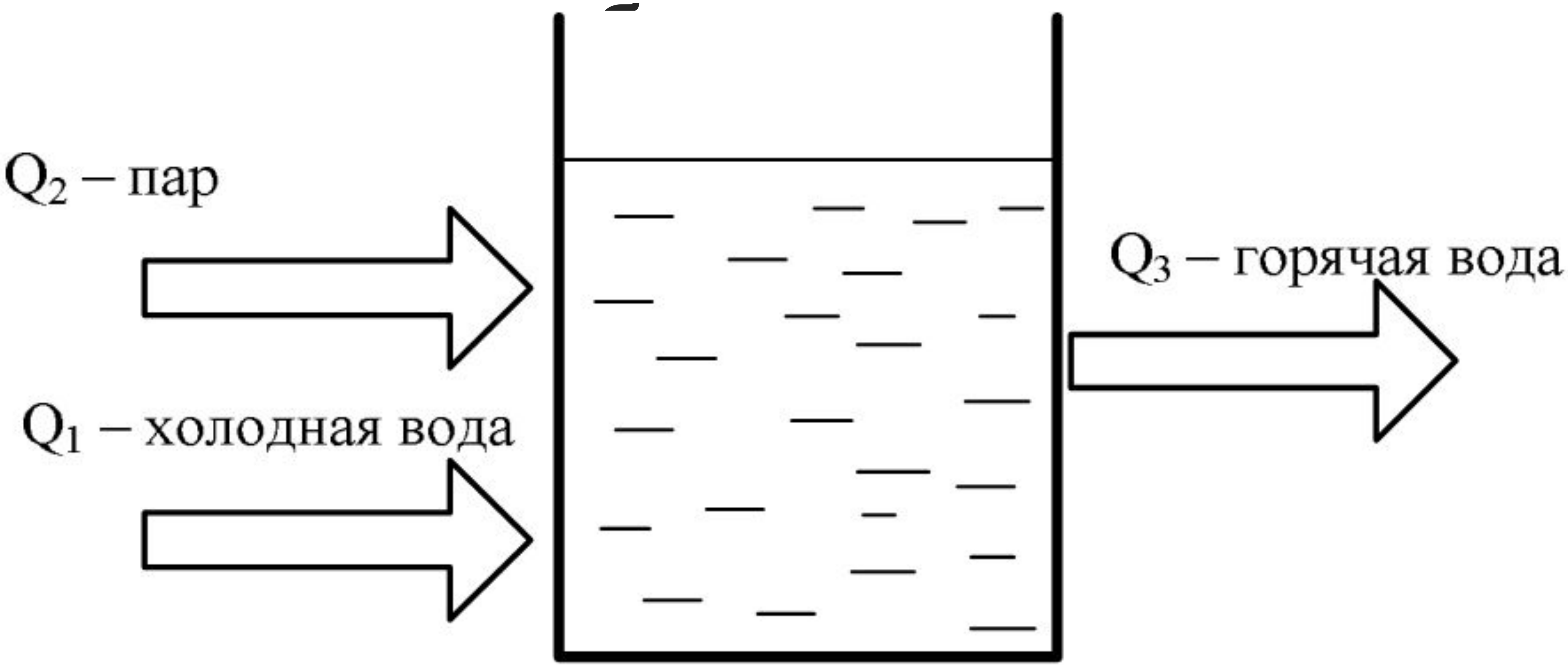
Динамические характеристики САУ – зависимость изменения выходной переменой *y* во времени *t* при известном законе изменения входной переменой *x*.

ДХ САУ могут быть описаны:

- дифференциальными уравнениями;
- передаточными функциями;
- временными характеристиками;
- частотными характеристиками.

Математическое описание САУ с помощью дифференциальных уравнений

Для описания динамических свойств ОУ используют самые разнообразные физические и химические законы и применяют уравнения материального и э



Математическое описание САУ с помощью дифференциальных уравнений

а) установившийся режим

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

$$\Theta = \text{const}$$

Θ – температура горячей воды.

б) переходный режим

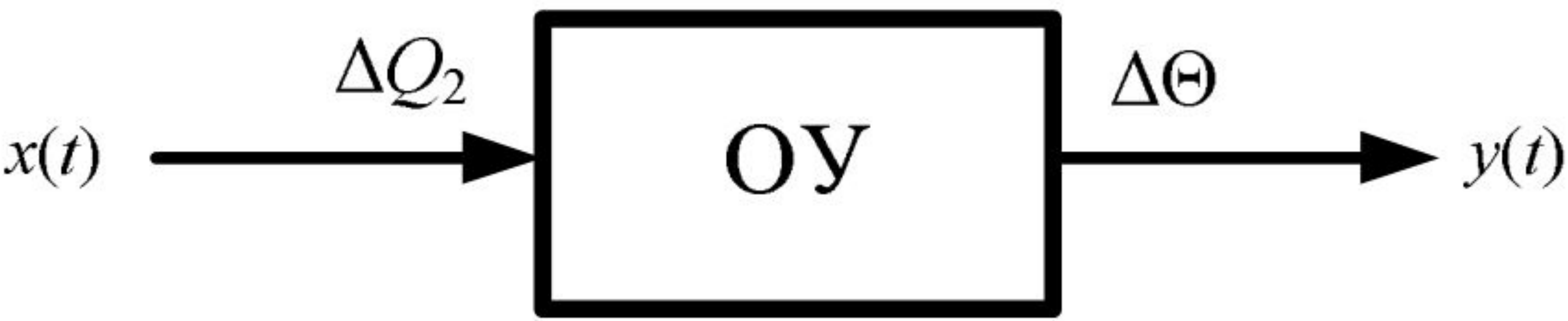
- возникает при изменении любого потока;
- скорость изменения температуры горячей воды Θ зависит от величины изменения теплового потока и коэффициента A (тепловой емкости ОУ)

Математическое описание САУ с помощью дифференциальных уравнений

б) переходный режим

$$A\frac{d(\Delta\Theta)}{dt} = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 - \Delta Q_3$$

Пусть количество тепла с холодной водой неизменно, то есть $\Delta Q_1 = 0$, а его изменение происходит за счёт потока пара Q_2.



Математическое описание САУ с помощью дифференциальных уравнений

б) переходный режим

Изменение теплового потока ΔQ_3 пропорционально изменению температуры горячей воды $\Delta\Theta$, её удельной теплоёмкости *c* и массе *m*.

$$\Delta Q_3 = c \cdot m \cdot \Delta\Theta$$

$$A\frac{d(\Delta\Theta)}{dt} + c \cdot m \cdot \Delta\Theta = \Delta Q_2$$

$$\frac{A}{c \cdot m}\frac{d(\Delta\Theta)}{dt} + \Delta\Theta = \frac{1}{c \cdot m}\Delta Q_2$$

Математическое описание САУ с помощью дифференциальных уравнений

б) переходный режим

$$\frac{A}{c \cdot m}\frac{d(\Delta\Theta)}{dt} + \Delta\Theta = \frac{1}{c \cdot m}\Delta Q_2$$

Введем обозначения:

- *T = A / (c • m)* – постоянная времени ОУ
- *K = 1 / (c • m)* – коэффициент передачи ОУ
- $y = \Delta\Theta$ $\qquad$ $x = \Delta Q_2$

$$T\frac{dy}{dt} + y = k \cdot x$$

- дифференциальное уравнение 1 порядка

Математическое описание САУ с помощью дифференциальных уравнений

В общем случае САУ может быть описана:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y =$$

$$= b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x \quad (*)$$

Решение дифференциальных уравнений высокого порядка вызывает значительные трудности. Поэтому применяется форма записи дифференциальных уравнений в виде передаточных функций.

Математическое описание САУ с помощью передаточных функций

Передаточная функция – это особая форма преобразованного по Лапласу дифференциального уравнения, которая рассматривает не дифференциальное, а алгебраическое уравнение. Преобразование Лапласа позволяют представить функцию вещественного переменного (времени) как функцию комплексного переменного.

Математическое описание САУ с помощью передаточных функций

Преобразование осуществляется с помощью прямого преобразования Лапласа *L[x(t)]*:

$$x(p) = \int_{0}^{\infty} x(t) \cdot e^{-pt} dt$$

где *x(t)* – называют оригиналом;
x(p) – изображением.

Если известно *x(p)* и требуется найти функцию времени, то оригинал находят по правилу обратного преобразования Лапласа, т.е. $x(t) = L^{-1}[x(p)]$

Математическое описание САУ с помощью передаточных функций

Основные свойства преобразования Лапласа:

1. Умножение оригинала на постоянную величину *a* соответствует умножению изображен

$$L[a \cdot x(t)] = a \cdot x(p);$$

2. Суммирование оригиналов соответствует суммированию изображений:

$$L[x_1(t) + x_2(t)] = x_1(p) + x_2(p);$$

Математическое описание САУ с помощью передаточных функций

Основные свойства преобразования Лапласа:

3. Дифференцированию оригиналов соответствуют следующие выражения для

$$L\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = p \cdot x(p) - x(0);$$

$$L\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right] = p^2 \cdot x(p) - p \cdot x(0) - x'(0);$$

Математическое описание САУ с помощью передаточных функций

Основные свойства преобразования Лапласа:

3. Дифференцированию оригиналов соответствуют следующие выражения для

$$L\left[\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right] = p^n \cdot x(p) - \left[p^{n-1} \cdot x(0) + p^{n-2} \cdot x'(0) + \ldots + p \quad \cdot x^{n-2}(0) + x^{n-1}(0)\right];$$

Математическое описание САУ с помощью передаточных функций

Основные свойства преобразования Лапласа:

При нулевых начальных условиях *(t = 0)* выходная величина *x(0)* и все её производ … а:

$$L\left[\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right] = p^n \cdot x(p);$$

Математическое описание САУ с помощью передаточных функций

Основные свойства преобразования Лапласа:

Интегрирование оригинала соответствует делению из

$$L\left[\int x(t)dt\right]=\frac{x(p)}{p};$$

Пользуясь свойством Лапласа 1, 2, 3 при нулевых начальных условиях уравнение (*) приводится к виду:

$$[a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0]\cdot y(p) =$$

$$= [b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0]\cdot x(p) \quad (**)$$

Математическое описание САУ с помощью передаточных функций

Основная трудность не в решении уравнения, а в переходе от оригинала к изображению и обратно.
Прямое и обратное преобразование Лапласа осуществляют с помощью таблиц оригиналов и изображений [в специальных справочниках].

Уравнение алгебраическое (**) в изображениях несет такую же информацию о динамике системы, как и дифференциальное.

Математическое описание САУ с помощью передаточных функций

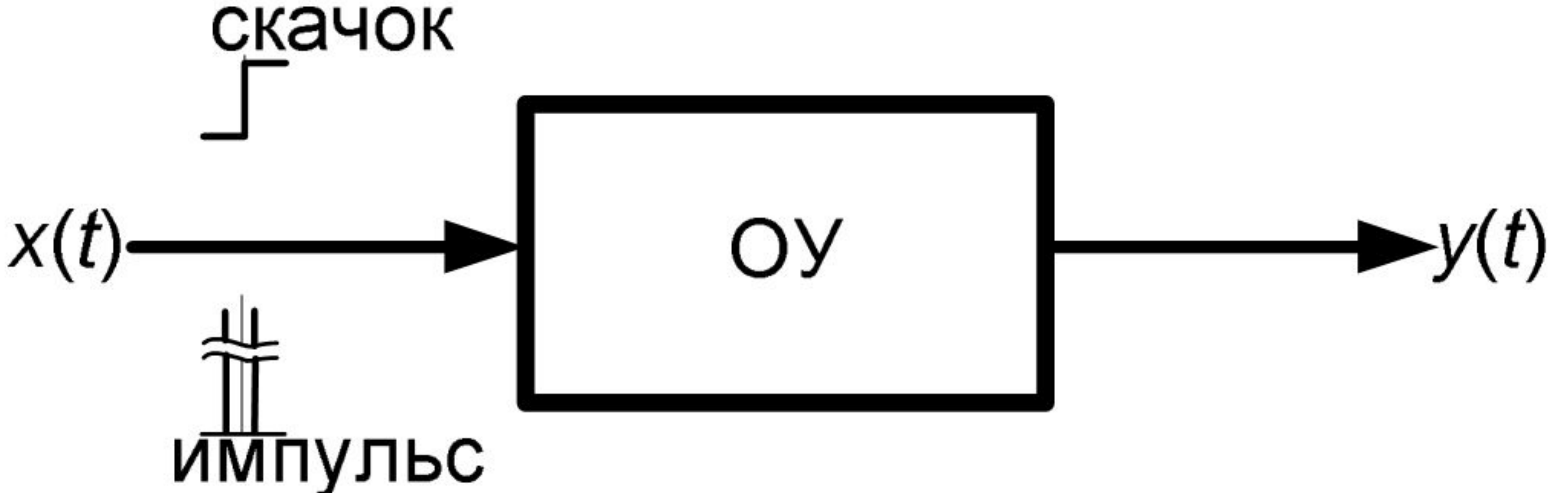
Отношение *W(p) = y(p)/x(p)* называют передаточной функцией:

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{b_m p^m + \ldots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \ldots + a_1 p + a_0}$$

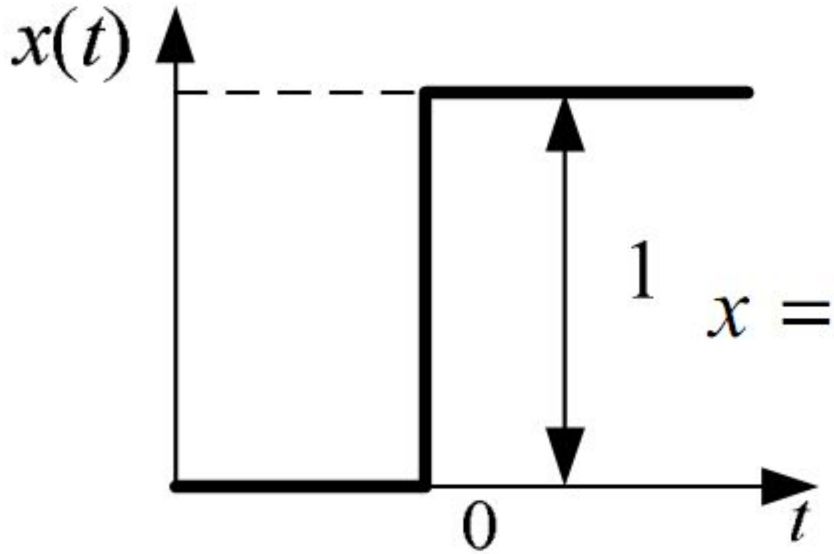
Передаточные функции получили очень широкое распространение в САУ при расчете систем.

Математическое описание САУ с помощью временных характеристик

Временная характеристика – зависимость от времени *t* выходной переменной *y(t)* при подаче на вход объекта управления *x(t)* типового воздействия (*скачок и импульс*).



Математическое описание САУ с помощью временных характеристик



$$x = \begin{cases} 0 & при\ \ t \le 0 \\ 1 & при\ \ t > 0 \end{cases}$$

Скачок – единичное ступенчатое входное воздействие *x(t)*, которое часто возникает в системе при её включении (отключении) и/или резком изменении заданного режима.

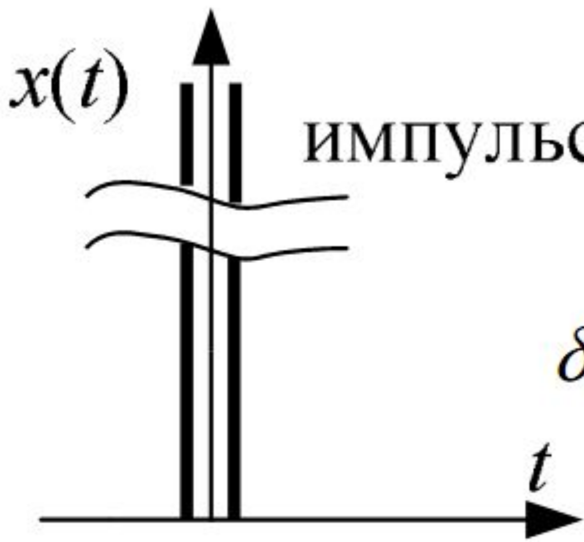
Математическое описание САУ с помощью временных характеристик

Если скачок приложен к системе в течение всего времени ее перехода из одного устойчивого состояния в другое, то временную характеристику называют **переходной функцией**, а её графическое изображение – **переходной** **ха**

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} \rightarrow y(p) = W(p) \cdot x(p)$$

где *x(p)* – скачок на входе

<u>Математическое описание САУ с помощью временных характеристик</u>



импульсная переходная функция

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq 0 \\ \infty & \text{при } t = 0 \end{cases}$$

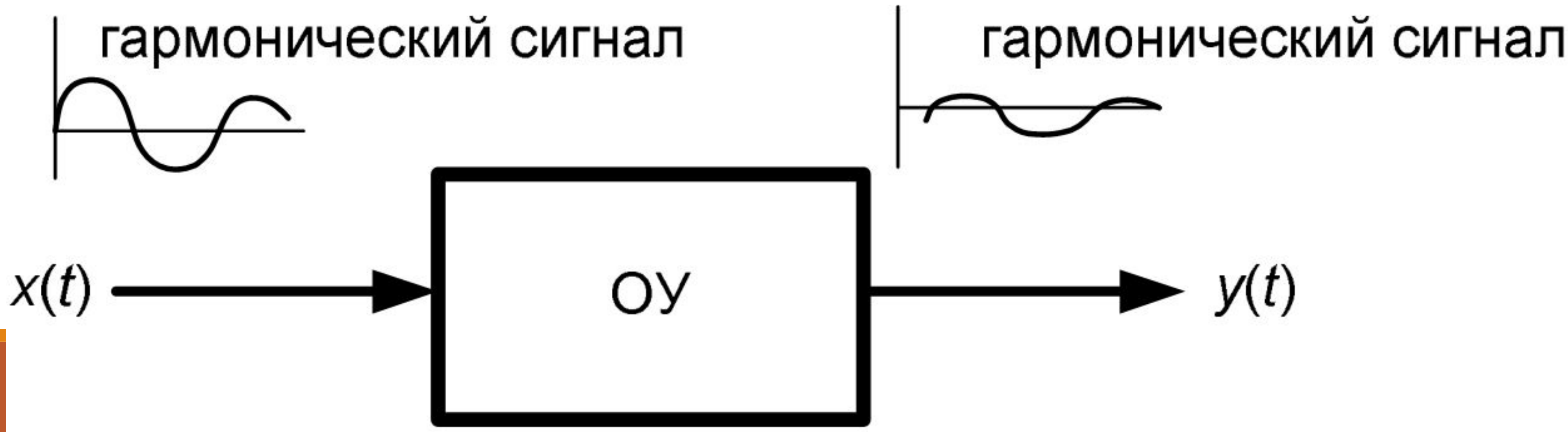
<u>**Импульс**</u> – мгновенное (кратковременное) изменение входного воздействия x(t). Используется для имитации возмущающего воздействия на систему.

Математическое описание САУ с помощью частотных характеристик

Для определения динамических свойств системы на ее вход подают гармонические колебания вида

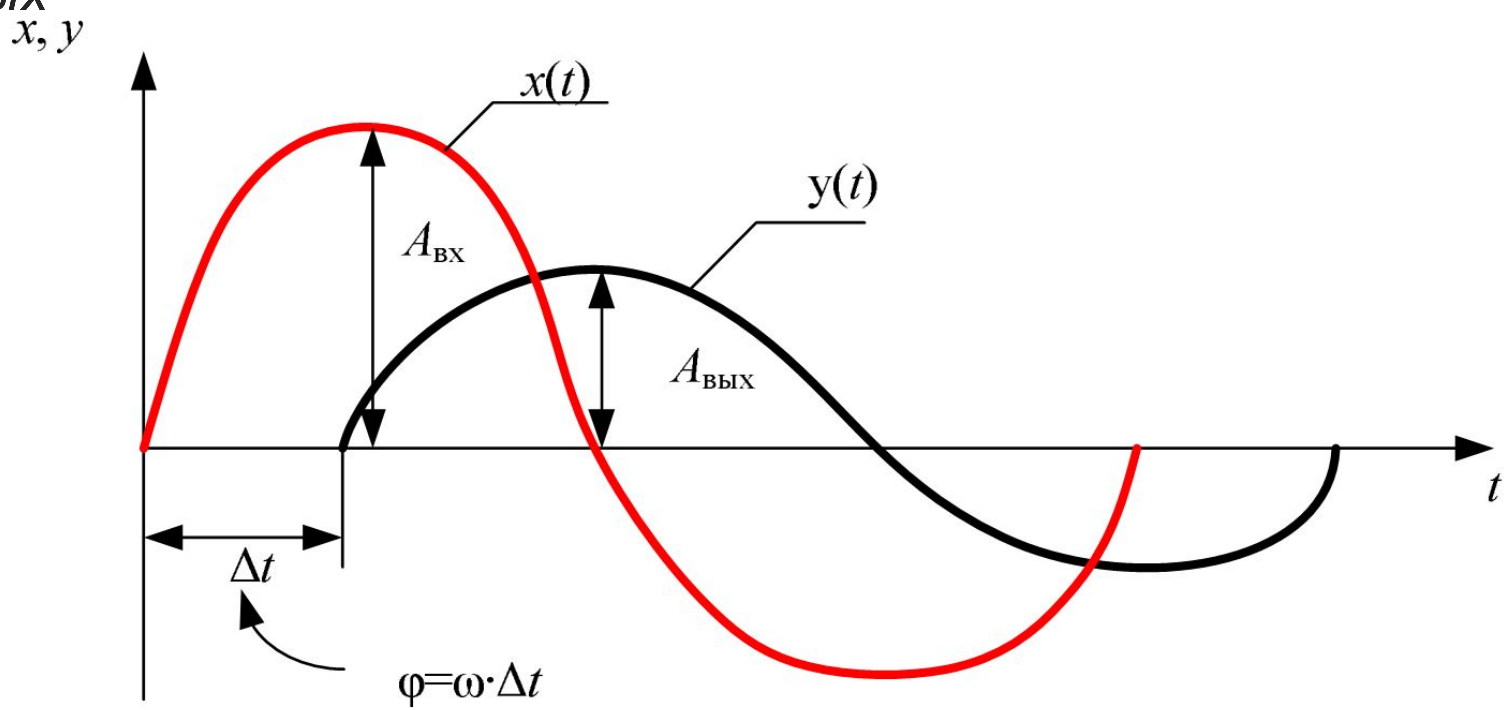
$$x(t) = A_{вх} \sin(\omega \cdot t);$$

где $A_{вх}$ – амплитуда входных колебаний;
ω – угловая частота колебаний;
t – время.



Математическое описание САУ с помощью частотных характеристик

Если САУ линейная, то на её выходе также устанавливаются синусоидальные колебания с частотой ω, но с амплитудой $A_{вых}$ и сдвинутые по фазе относительно вх



$$y = A_{вых} \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi);$$

Математическое описание САУ с помощью частотных характеристик

$$y = A_{вых} \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi)$$

Параметры $A_{вых}$ и φ зависят от частоты и амплитуды входных сигналов и динамических свойств системы.
Знак «минус» перед φ обусловлен тем, что в реальных системах выходное колебание отстаёт по фазе от входного.

Математическое описание САУ с помощью частотных характеристик

Запишем переменные *x* и *y* в комплексной форме:

$$x(t) = A_{вх}\sin(\omega \cdot t) = A_{вх} \cdot e^{j\omega \cdot t}$$

$$y(t) = A_{вых} \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi) = A_{вых} \cdot e^{j(\omega \cdot t - \varphi)}$$

$$j\omega \equiv p \qquad j = \sqrt{-1}$$

Тогда:

$$\frac{y_{вых}(t)}{x_{вх}(t)} = \frac{A_{вых}}{A_{вх}} \cdot e^{-j\varphi}$$

Математическое описание САУ с помощью частотных характеристик

Поведение динамической системы характеризуют частотные характеристики:

- амплитудно-фазовая $W(\omega)$ (АФХ);
- амплитудно-частотная $A(\omega)$ (АЧХ);
- фазово-частотная $\phi(\omega)$ (ФЧХ).

Математическое описание САУ с помощью частотных характеристик

Пример Построить АФХ для динамической системы, описываемой передаточной функцией вида

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1}$$

Проводим замену *p* на *jω*

$$\frac{y(p)}{x(p)} = \frac{k}{Tp + 1} = \frac{k}{Tj\omega + 1}$$

Математическое описание САУ с помощью частотных характеристик

Выделяем действительную *Re* (real) и мнимую *Im* (image) части:

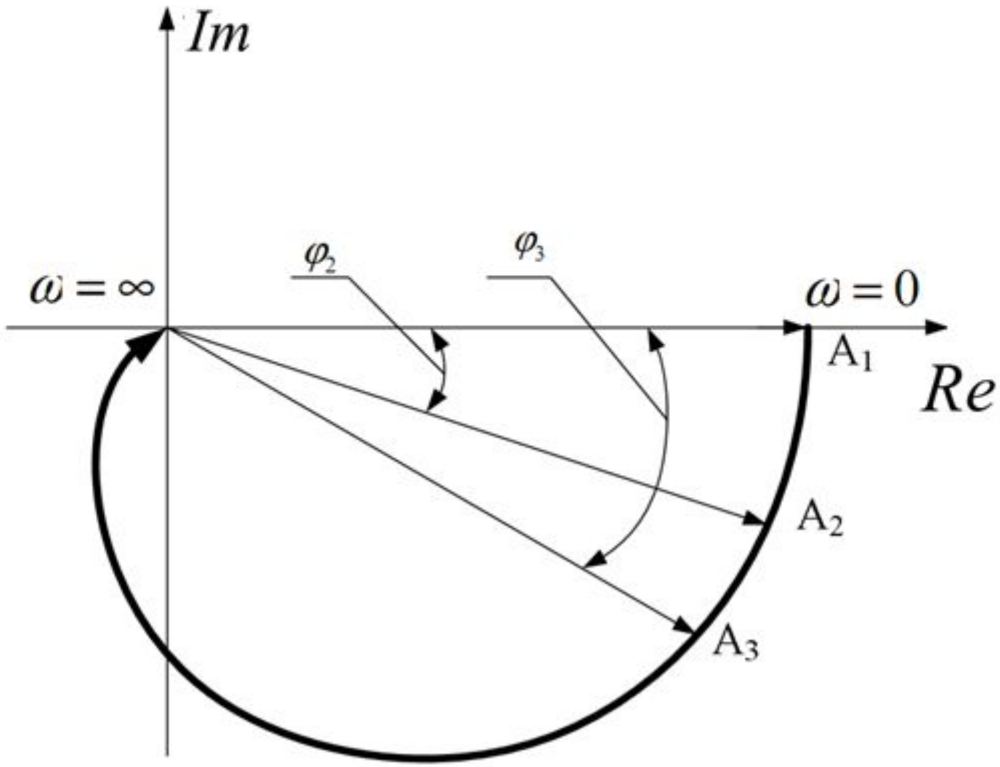
$$W(\omega) = \frac{k}{Tj\omega + 1} \cdot \frac{Tj\omega - 1}{Tj\omega - 1} = \frac{+k}{T^2 \cdot \omega^2 + 1} - j\frac{k \cdot T \cdot \omega}{T^2 \cdot \omega^2 + 1}$$

$$Re(\omega) = \frac{k}{T^2 \cdot \omega^2 + 1}$$

$$Im(\omega) = -j\frac{k \cdot T \cdot \omega}{T^2 \cdot \omega^2 + 1}$$

Изменяя частоты *ω* от 0 до *n*, строится **АФХ**.

Математическое описание САУ с помощью частотных характеристик

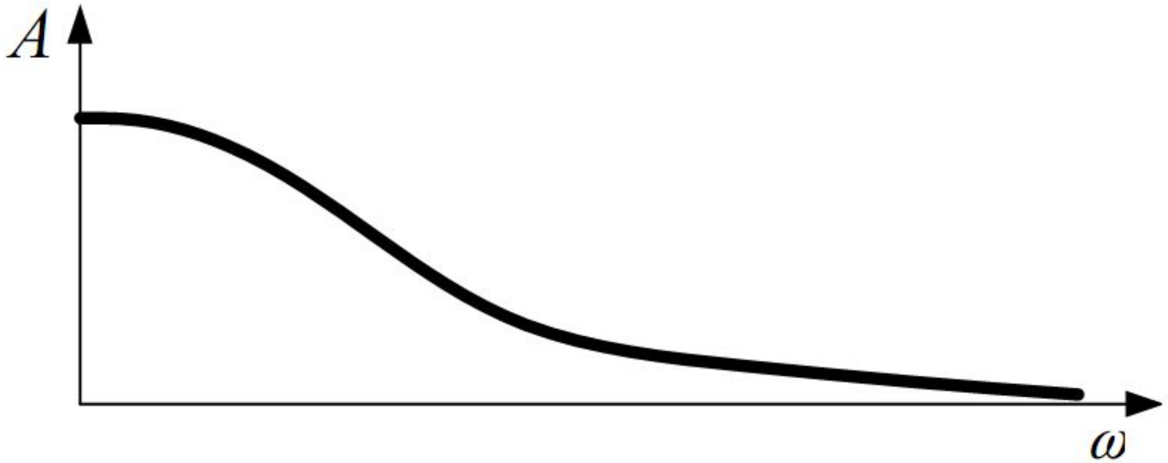


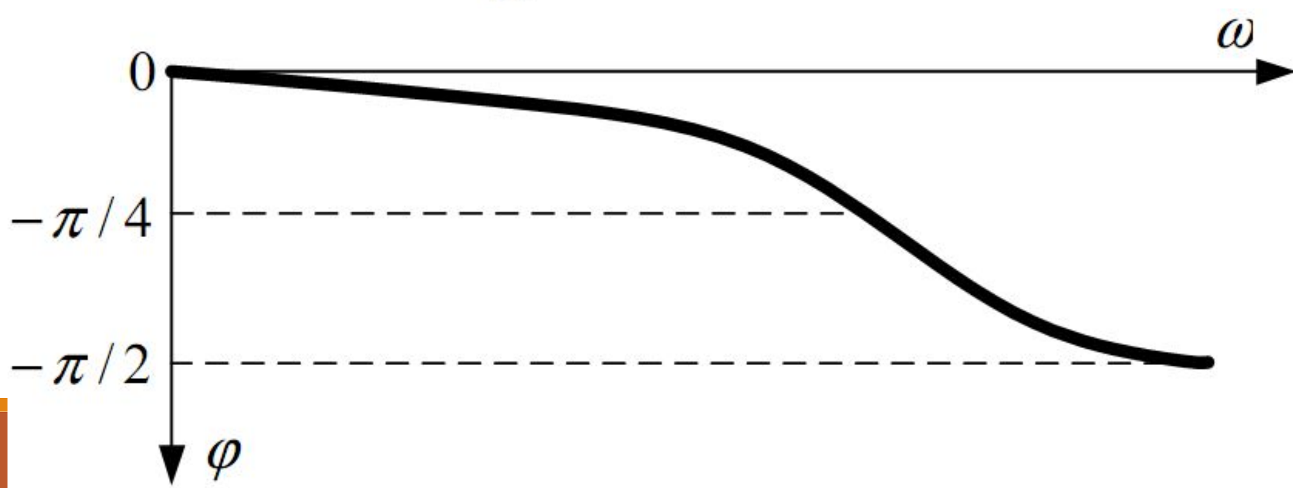
$$A = \sqrt{\mathrm{Re}^2(\omega) + \mathrm{Im}^2(\omega)} \text{ – амплитуда}$$

$$\varphi = arctg\frac{Im(\omega)}{Re(\omega)} \text{ – фаза.}$$

Математическое описание САУ с помощью частотных характеристик

На основе этих формул строится **АЧХ** *A(ω)* **ФЧХ** *ϕ(ω)*.





Типовые динамические звенья САУ

Типовые динамические звенья САУ

При расчёте САУ ее разбивают на отдельные части (звенья), у которых математическая зависимость между входными *x* и выходными *y* переменными и временем *t* описывается дифференциальными уравнениями **не выше** 2-го порядка.

Эти блоки называют **типовыми элементарными динамическими звеньями**.

Типовые динамические звенья САУ

На практике используют 6 основных типовых элементарных динамических звеньев:

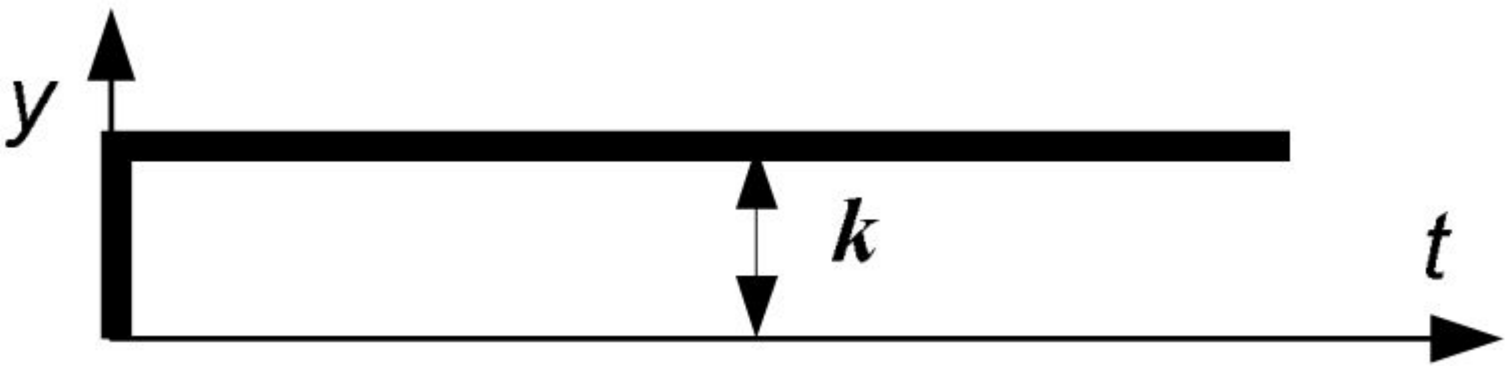
- усилительное;
- апериодическое;
- колебательное;
- интегрирующее;
- дифференцирующее;
- чистого запаздывания.

Типовые динамические звенья САУ

1) **Усилительное звено** – передача сигнала без замедлений и ускорений во времени, т.е. переходные процессы отсутствуют.

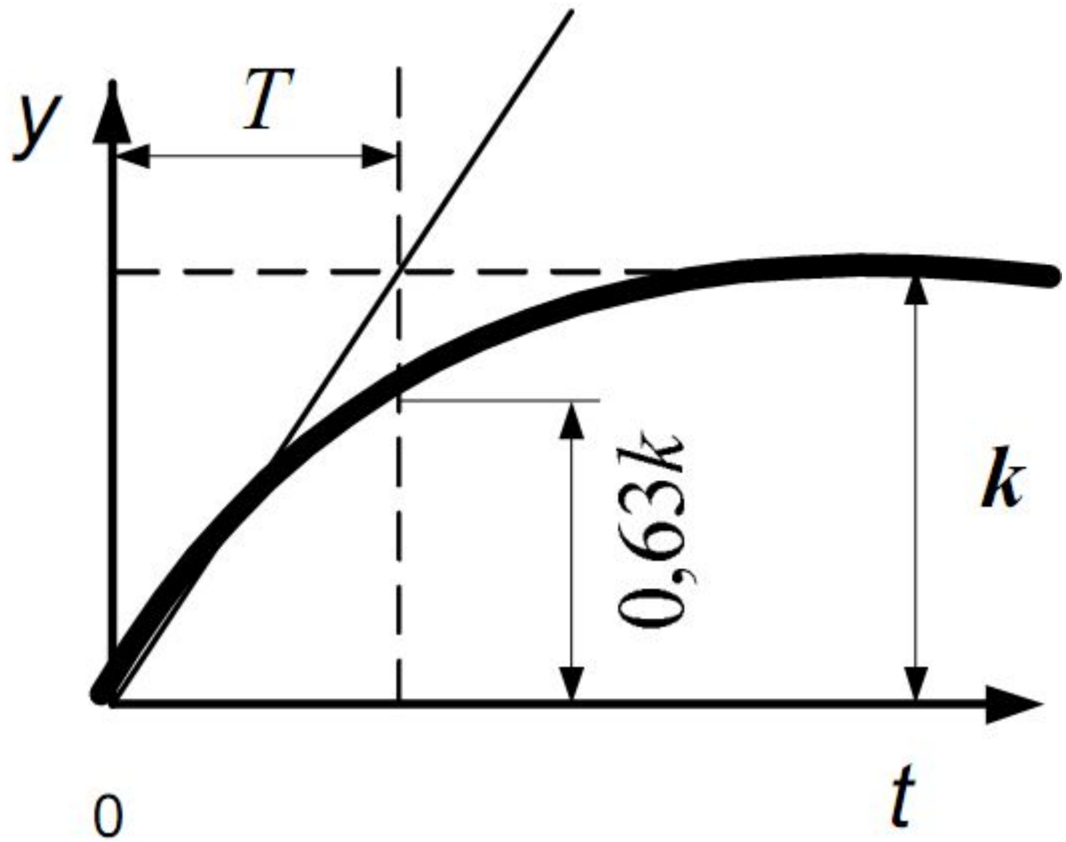
$$W_{\text{ус}}(p) = k$$

k – коэффициент усиления (числовая ве



Типовые динамические звенья САУ

2) **Апериодическое звено**

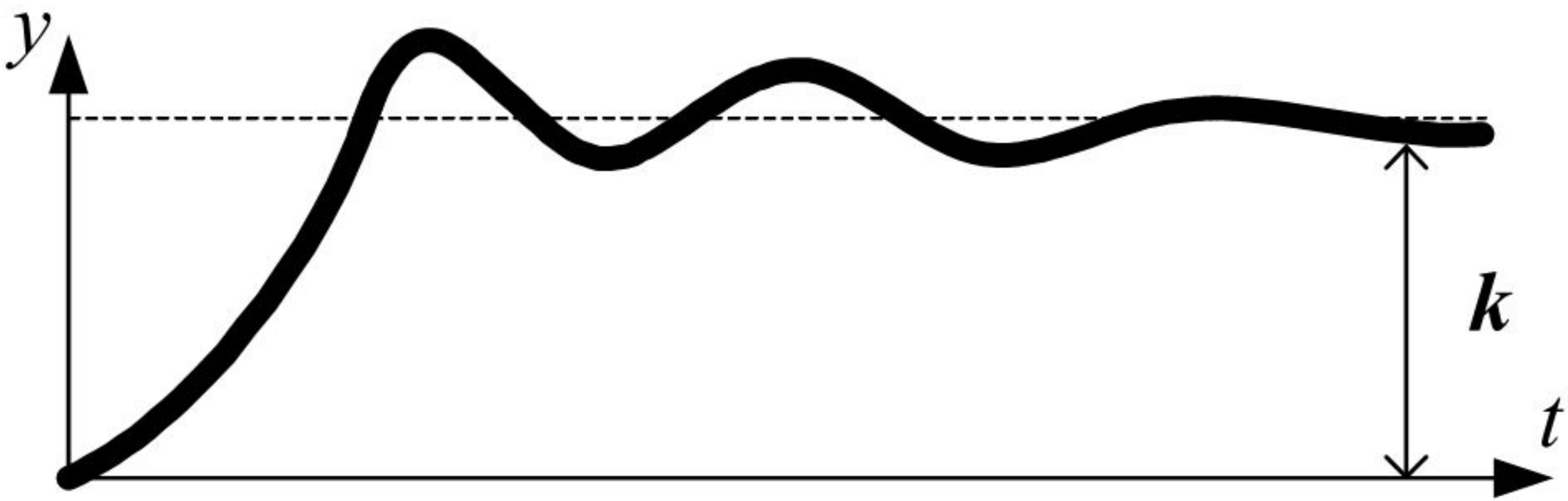


k – коэффициент усиления;
T – постоянная времени (время, через которое амплитуда процесса упадёт в e≈2.718 раз)

$$W_{апериод}(p) = \frac{k}{Tp+1};$$

Типовые динамические звенья САУ

3) **Колебательное звено**



$$W_{кол}(p) = \frac{K}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}$$

T_1 и T_2 – постоянные времени (при $T_2 = 0$ превращается в апериодическое звено).

Типовые динамические звенья САУ

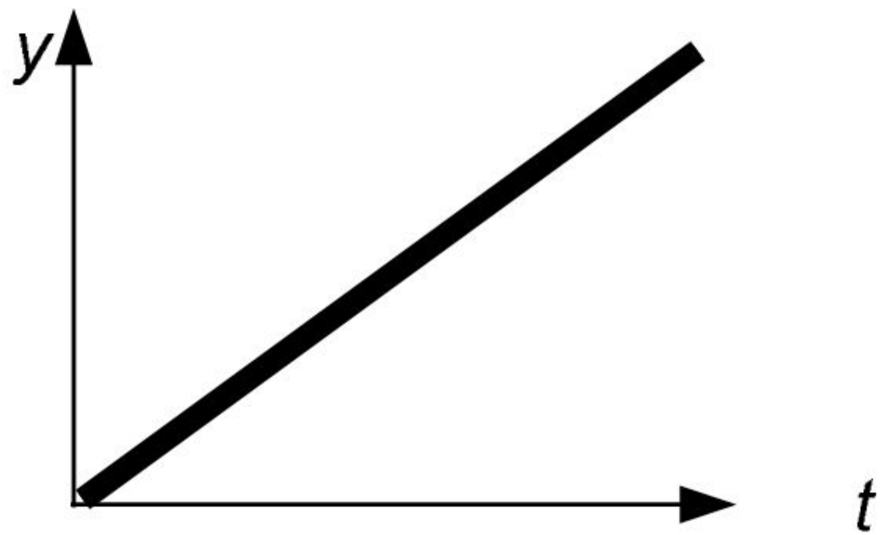
3) **Колебательное звено**

В зависимости от соотношения между T_1 и T_2 корни характеристического уравнения $T_2^2p^2 + T_1p + 1 = 0$ будут:

- при $\mathbf{T_1 > 2T_2}$ → корни вещественные;
- при $\mathbf{T_1 = 2T_2}$ → одинаковые вещественные корни, а переходные процессы протекают апериодически и звено не является колебательным;
- при $\mathbf{T_1 < 2T_2}$ → корни уравнения комплексные (колебательный процесс);
- при $\mathbf{T_1 = 0}$ → незатухающие колебания.

Типовые динамические звенья САУ

4) **Интегрирующее звено** – выходная величина пропорциональна интегралу от входной.



$$W_{\text{инт}}(p) = \frac{k}{Tp}$$

Типовые динамические звенья САУ

5) **Дифференцирующее звено**

Идеальное дифференцирующее звено:

$$W_{\text{диф.}}(p) = k\,p$$

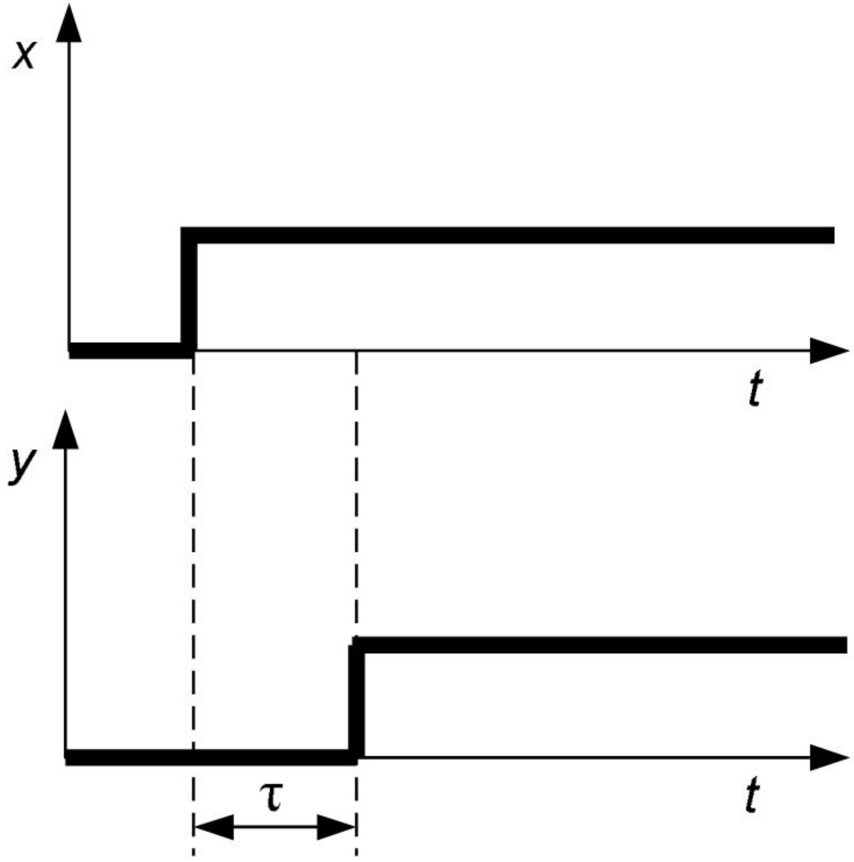
На практике невозможно, т.к. все реальные процессы инерционны, а по этому уравнению скачкообразное изменение входной величины должно вызвать мгновенное изменение выходной от 0 до ∞ и немедленный спад до 0.

Реальное д ее звено:

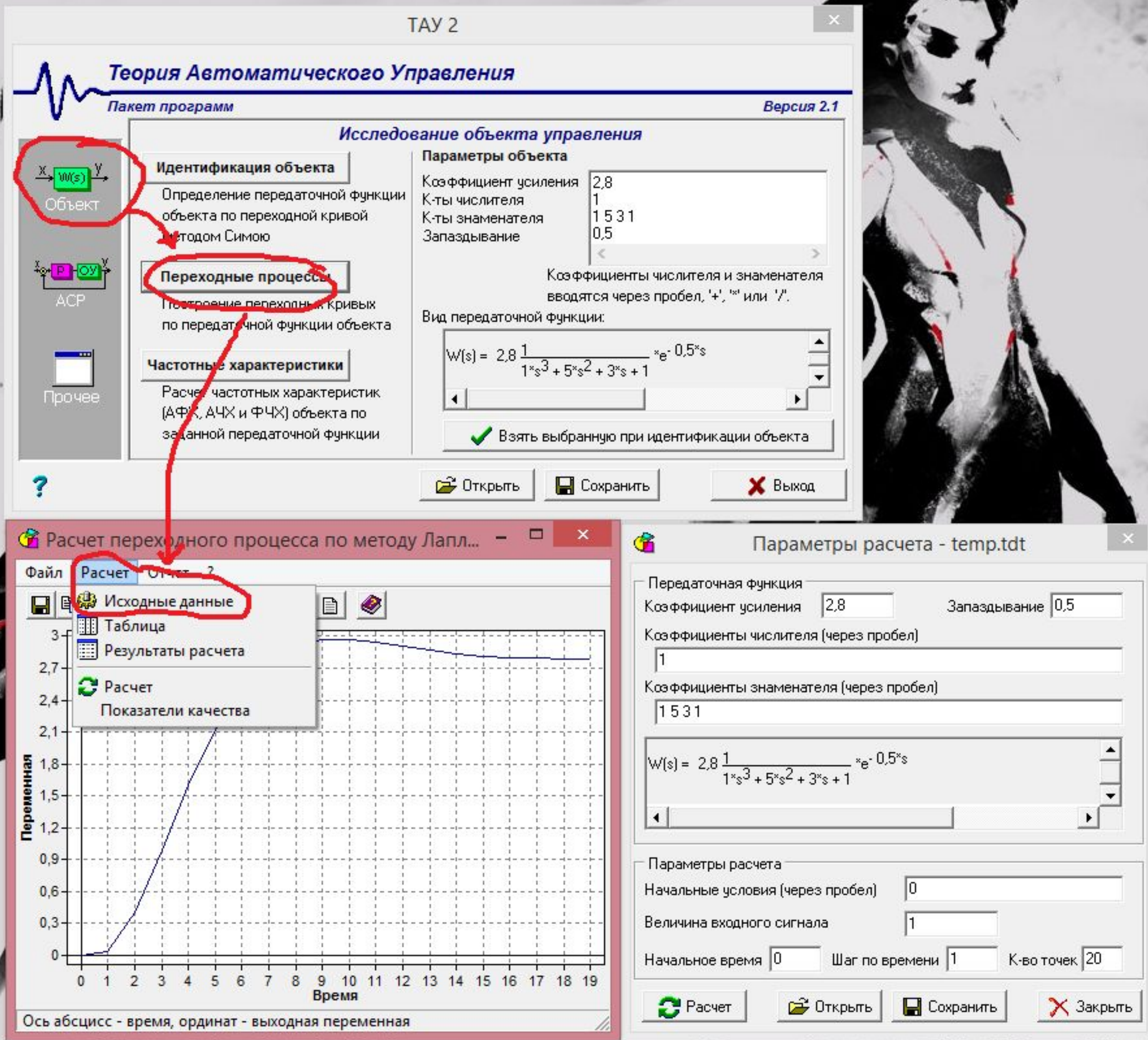
$$W_{\text{диф}}(p) = \frac{kTp}{Tp+1}$$

Типовые динамические звенья САУ

6) **Запаздывающее звено** – воспроизводит изменение входной величины без искажений, но с постоянным запаздыванием



$$W_3(p) = e^{-\tau \cdot p}$$


ТАУ 2
Теория Автоматического Управления
Пакет программ
Версия 2.1
Объект
АСР
Прочее
Исследование объекта управления
Идентификация объекта
Определение передаточной функции объекта по переходной кривой методом Симою
Переходные процессы
Построение переходных кривых по передаточной функции объекта
Частотные характеристики
Расчет частотных характеристик (АФХ, АЧХ и ФЧХ) объекта по заданной передаточной функции
Параметры объекта
Коэффициент усиления 2,8
К-ты числителя 1
К-ты знаменателя 1 5 3 1
Запаздывание 0,5
Коэффициенты числителя и знаменателя вводятся через пробел, '+', '*' или '/'.
Вид передаточной функции:
W(s) = 2,8 1 / 1*s3 + 5*s2 + 3*s + 1 *e- 0,5*s
Взять выбранную при идентификации объекта
Открыть
Сохранить
Выход
Расчет переходного процесса по методу Лапл...
Файл
Расчет
Отчет
?
Исходные данные
Таблица
Результаты расчета
Расчет
Показатели качества
Переменная
Время
Ось абсцисс - время, ордината - выходная переменная
Параметры расчета - temp.tdt
Передаточная функция
Коэффициент усиления 2,8
Запаздывание 0,5
Коэффициенты числителя (через пробел)
1
Коэффициенты знаменателя (через пробел)
1 5 3 1
W(s) = 2,8 1 / 1*s3 + 5*s2 + 3*s + 1 *e- 0,5*s
Параметры расчета
Начальные условия (через пробел) 0
Величина входного сигнала 1
Начальное время 0
Шаг по времени 1
К-во точек 20
Расчет
Открыть
Сохранить
Закрыть