Вписанная окружность

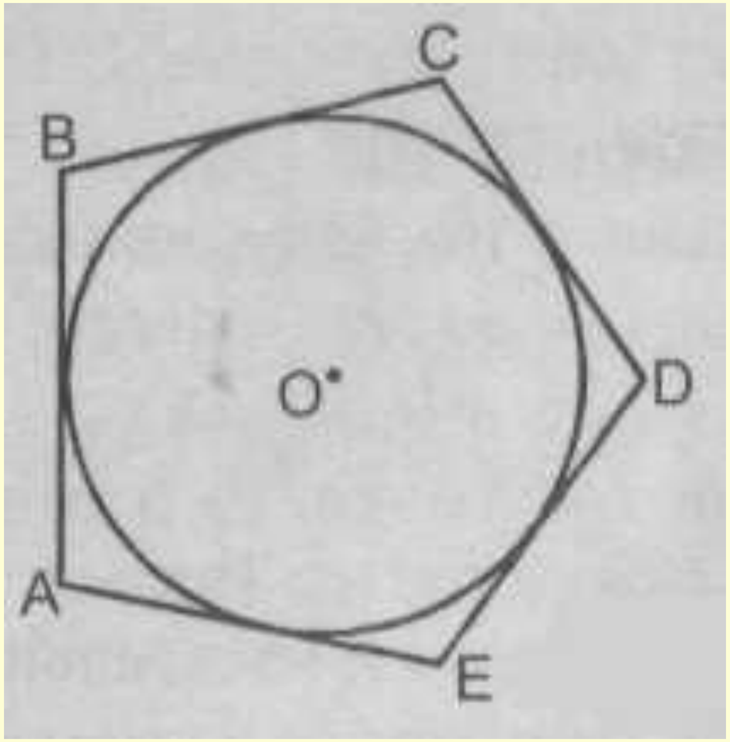
Учитель математики ГБОУ гимназии № 1504 Железнова Я.А.

Определение

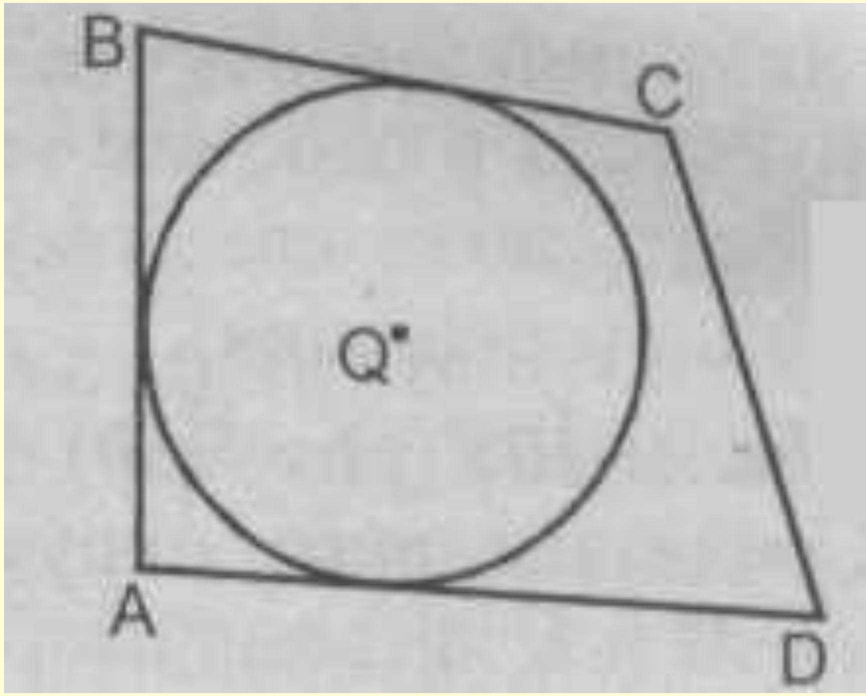
Если все стороны многоугольника касаются окружности, то окружность называется вписанной в многоугольник,

а многоугольник – описанным около этой окружности.

Пятиугольник *ABCDE* описанный.
Окр.(O,R) – вписанная.
***AB, BC, CD, DE, AE* касательные**



Окружность с центром *Q* не вписана в четырехугольник *ABCD*, т. к. *CD* не касается окружности.

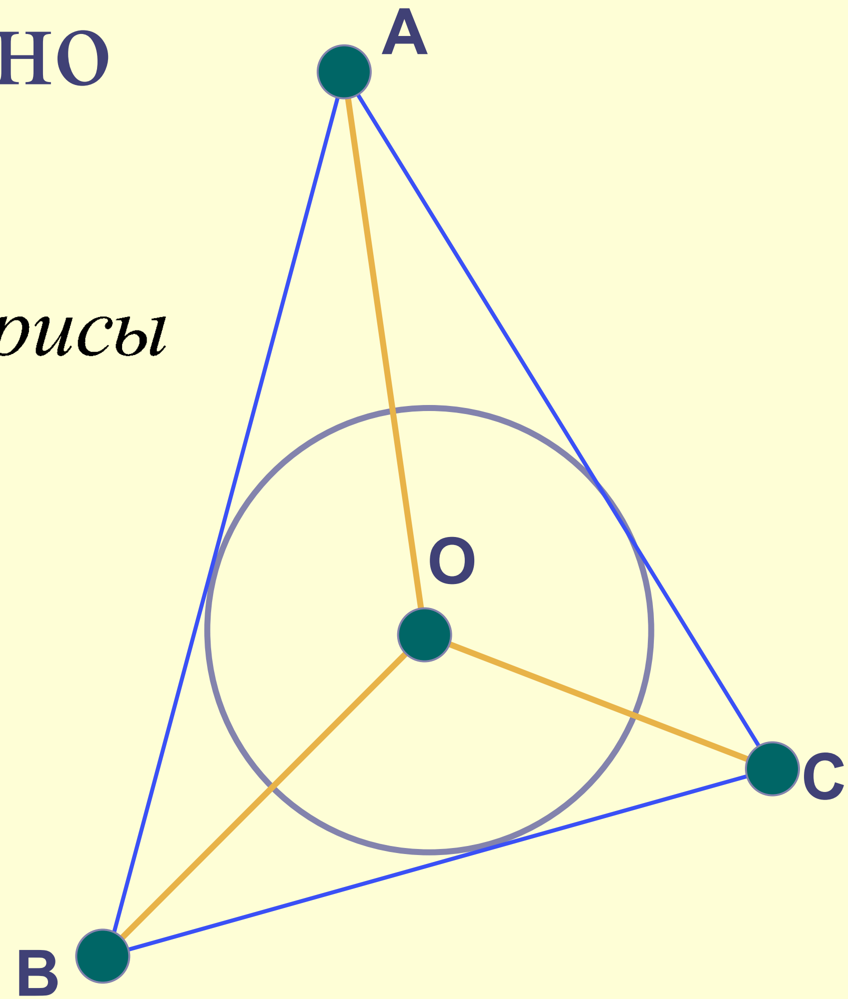


ТЕОРЕМА

В любой треугольник можно вписать окружность.

Замечание: **в треугольник можно вписать только одну окружность.**

Дано



ΔABC

$AA_1, BB_1, CC_1 - \textit{биссектрисы}$

$AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = O$

Доказать, что

окр. *(O; R)*вписанная.

Доказательство

Проведем

$OK \perp AB, OM \perp AC, OL \perp BC$

Т.к. точка О лежит на биссектрисах,

то она равноудалена от *AB, BC, AC*,

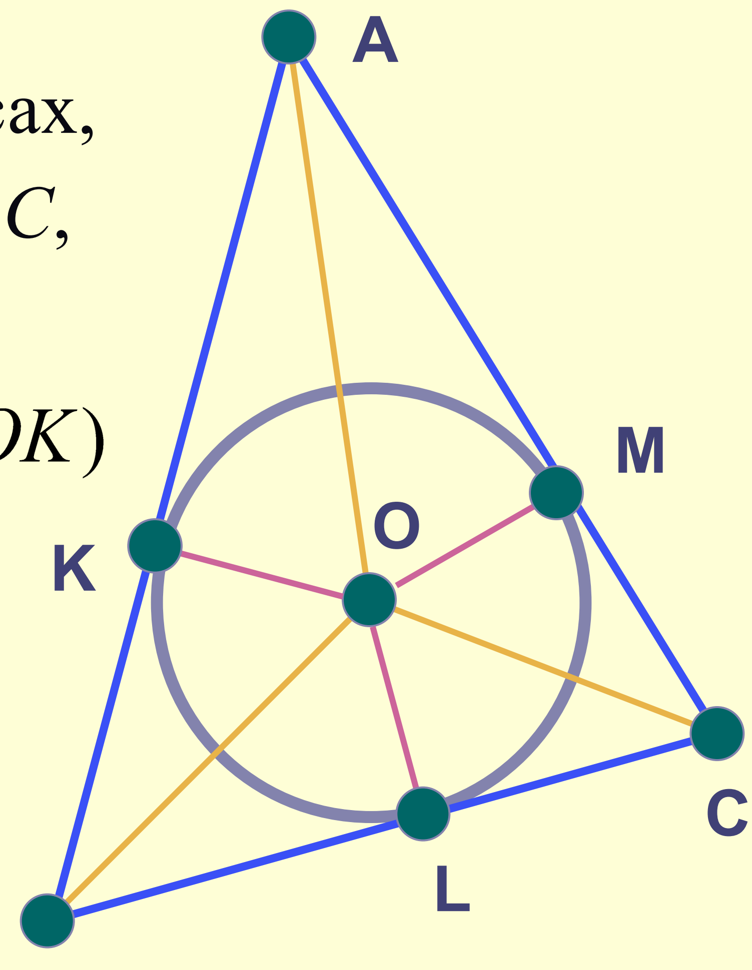
т.е. $OK = OL = OM$

Значит точки $K, L, M \in окр(O; OK)$

Т.к. $OK \perp AB, OM \perp AC, OL \perp BC$

то *AB, AC,CB* – касательные.

Значит окр.*(O; OR)* вписанная.



Важный вывод 1

Центр вписанной в треугольник окружности лежит в точке пересечения его биссектрис и равноудален от его сторон.

Важный вывод 2

Радиус окружности вписанной в треугольник равен расстоянию от центра окружности до сторон треугольника.

Не во всякий четырехугольник можно вписать окружность.

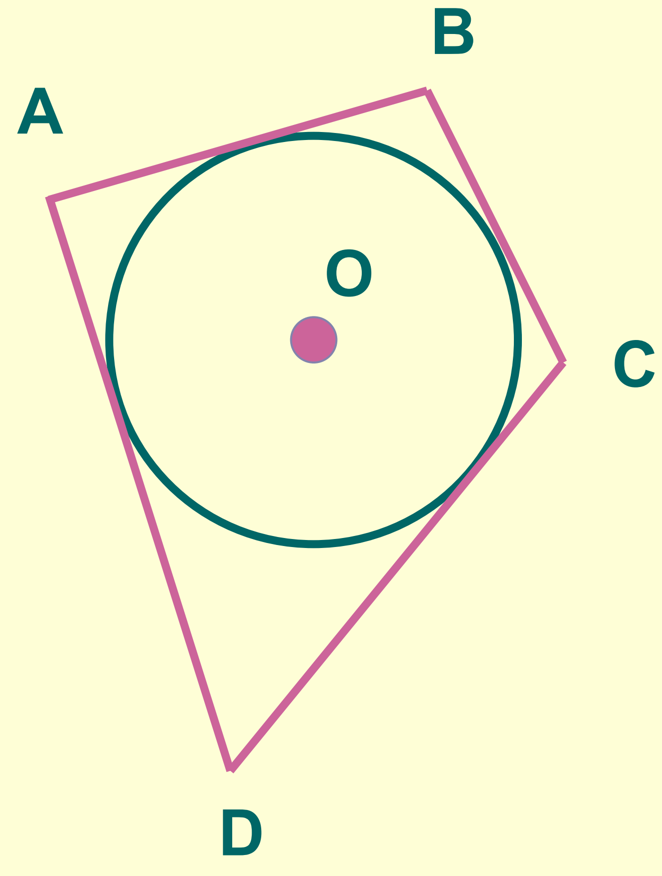
Если же в четырехугольник можно вписать окружность, то его стороны обладают следующим свойством:

Свойство

В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.

ABCD описанный четырехугольник.

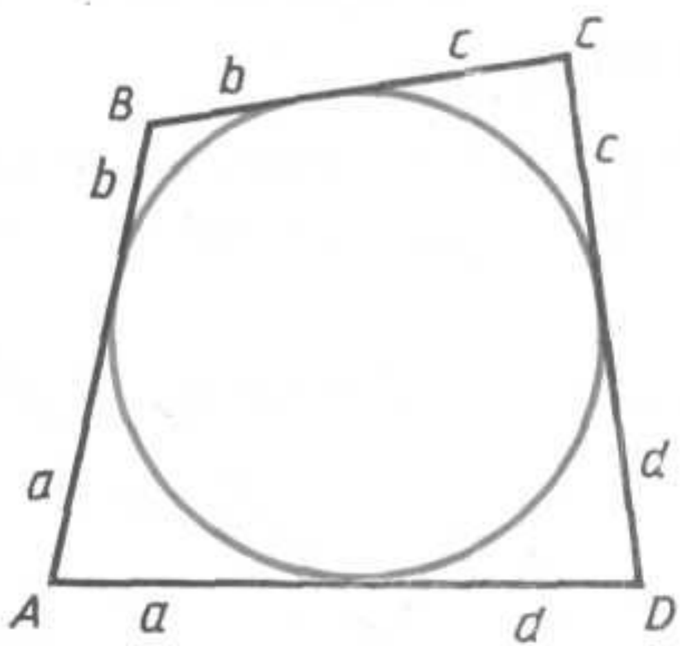
AB+CD=BC+AD



Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности. Докажите, что $AB + CD = BC + AD$.

Доказательство.

Используя свойство отрезков касательных к **окружности**, проведенных из одной точки, получаем: $AB + CD = a + b +$ **c** $+$ **d**, $BC + AD =$ **a + b + c +d**. Следовательно, $AB +$ **CD** $= BC +$ **AD**, что и требовалось **доказать**



Верно и обратное утверждение

Если суммы противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность.

Это признак описанного четырехугольника.

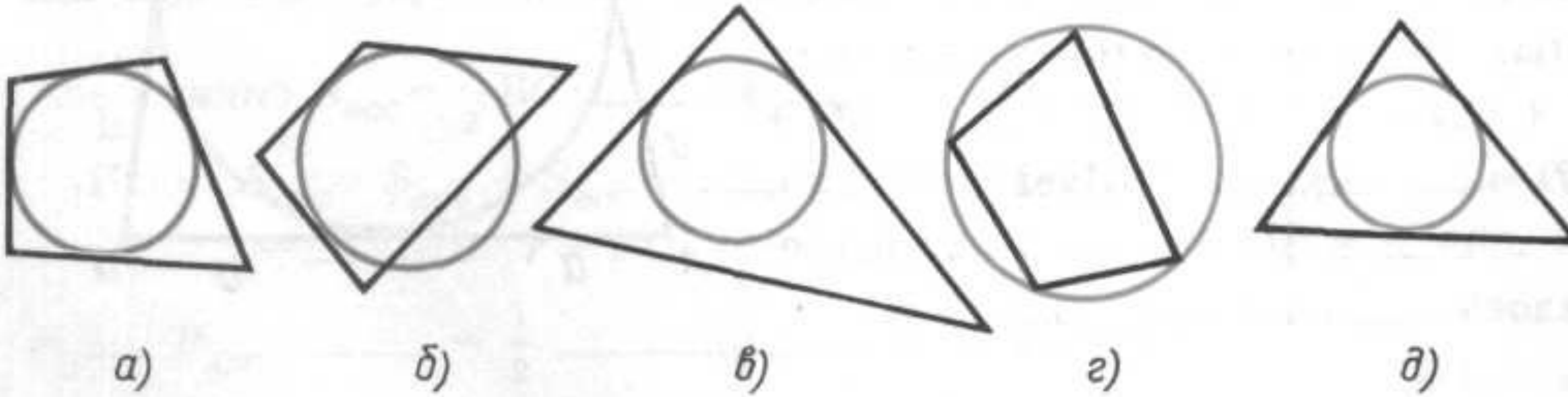
Свойство описанного многоугольника

Площадь описанного многоугольника равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности.

$$S_{ABCD...K} = \frac{1}{2} P_{ABCD...K} \cdot r$$

ЗАДАЧА 1

На каких рисунках *а* — *д* изображены многоугольник и вписанная в него окружность?

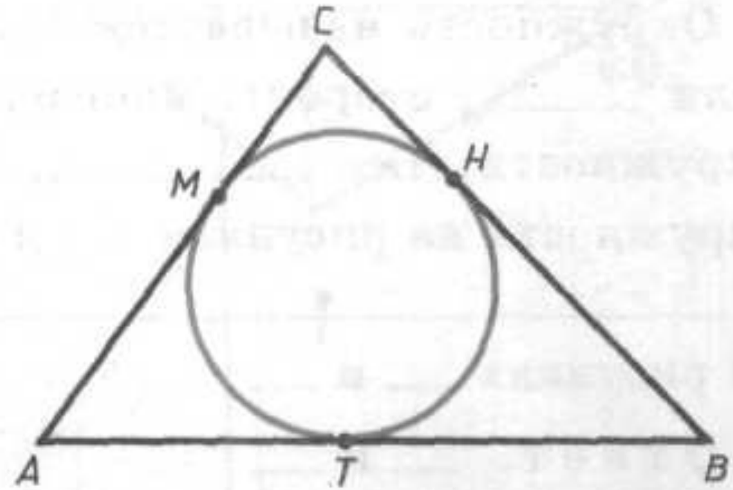


Решение.

Окружность называется вписанной в **треугольник**, если **все** стороны многоугольника **касаются** окружности. Все **стороны** многоугольника касаются окружности на рисунках **а** и **д**, следовательно, многоугольник и **вписанная** в него окружность изображены на рисунках **а** и **д**

Задача 2

Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон в точках H, M и T. Найдите периметр треугольника ABC, если $AM = 5$ м, $CH = 3$ м, $BT = 6$ м.

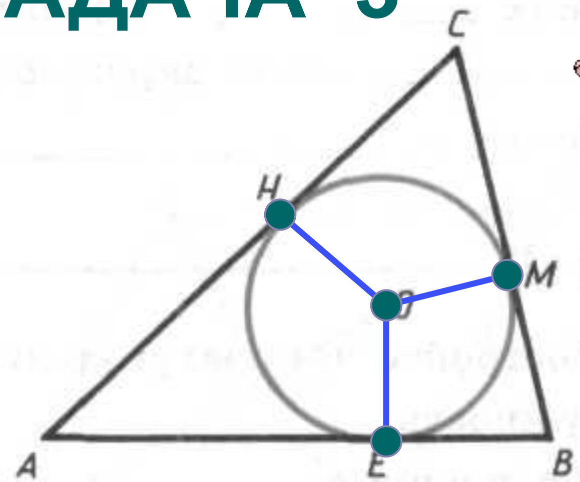


Решение.

Отрезки касательных к ОКРУЖНОСТИ, проведенные из одной ТОЧКИ, равны. Поэтому AT = AM = 5 м, CM = CH = 3 м, BH = BT = 6 м. Следовательно, $P_{ABC} = AM + MC + CH +$ $HB+BT+AT$ $= 2\cdot(AM +$ $MC+CH$) = 2 · (5 + 3+6) = 28 (м).

ЗАДАЧА 3

Найдите площадь треугольника ABC, если его периметр равен 60 см, а радиус r вписанной окружности равен 4 см.



Решение.

Соединим центр окружности с вершинами треугольника и точками H, M и E касания сторон треугольника и окружности. Так как радиус, проведенный в точку КАСАНИЯ, перпендикулярен к касательной, то $OH \perp$ AC, следовательно, отрезок OH — ВЫСОТА треугольника AOC. Аналогично отрезок OM — высота ТРЕУГОЛЬНИКА BOC, отрезок OE — ВЫСОТА треугольника AOB. Поэтому $S_{AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot OE$.

Аналогично $S_{BOC} = \frac{1}{2} BC \cdot OM$ и $S_{AOC} = \frac{1}{2} AC \cdot OH$.

Итак, $S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{AOC} = \frac{1}{2}(AB \cdot OE + BC \cdot OM + AC \cdot OH) = \frac{1}{2}(AB \cdot r + BC \cdot r + AC \cdot r) = \frac{1}{2}(AB + BC + AC)r = \frac{1}{2} P_{ABC} \cdot r = \frac{1}{2}\, 60 \cdot 4 = 120$ (см²).

№ 690

Дано:

ΔABC – *равнобедренный*

AC-основание

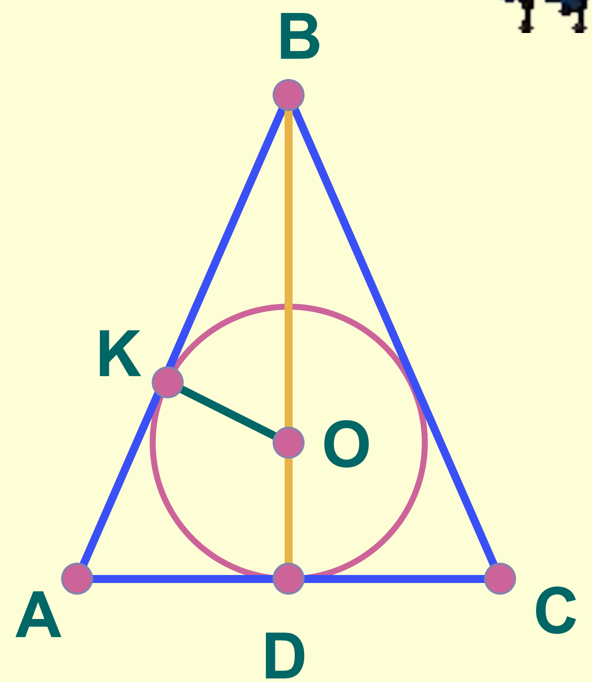
окр$(O; R)$ – *вписанная*

AB = 60,

BD – высота,

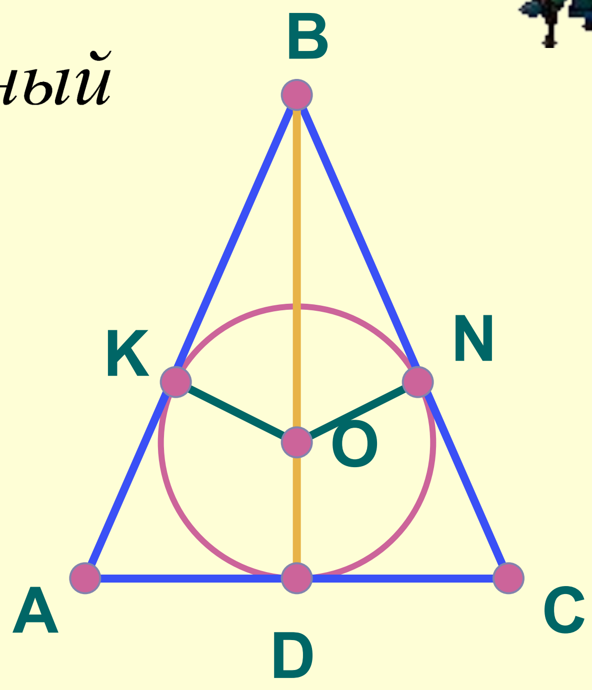
BO : OD = 12 : 5,

Найти AC



№ 691

Дано: ΔABC – *равнобедренный*
AC-основание
окр$(O; R)$ – *вписанная*
Точки *K, N, D* –точки касания.
BK : KA = 4 : 3
Найти P_{ABC}



№ 693 (а)

Дано: ΔABC – *прямоугольный*

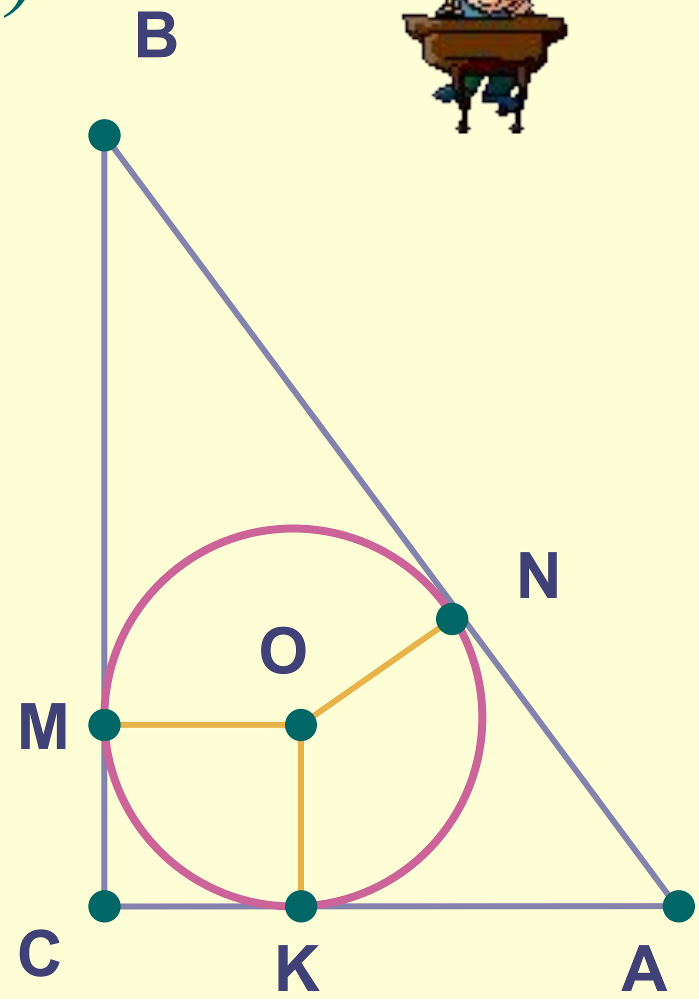
$\angle C = 90^\circ$

окр$(O;4)$ – *вписанная*

AB = 26

M, N, K – точки касания

Найти P_{ABC}



№ 698

Кратко!

Подведем итог :

- Какая окружность называется вписанной в многоугольник?
- Какой многоугольник называется описанным возле окружности?
- В любой ли треугольник можно вписать окружность?
- Сколько окружностей можно вписать в треугольник?
- Где лежит центр вписанной окружности?

Подведем итог :

- Чему равен радиус окружности, вписанной в треугольник?
- В любой ли четырехугольник можно вписать окружность?
- Сформулируйте свойство описанного четырехугольника
- Сформулируйте признак описанного четырехугольника

Домашние задание

- П.74. читать,

- Теория из тетрадки, формулировки знать наизусть.

- № 689, 692, 693 (б), 695