

# **1.1 Цепи**

## **ПОСТОЯННОГО ТОКА**

# §1. Законы физики и основные понятия

## Закон электромагнитной индукции

Электродвижущая сила (ЭДС), индуцируемая в цепи при изменении магнитного потока, проходящего через поверхность, ограниченную контуром цепи, равна скорости изменения магнитного потока, взятой с обратным знаком.

$$e = - \frac{d\phi}{dt}$$

## Закон Кулона

Сила взаимодействия двух зарядов пропорциональна значению этих зарядов и обратно пропорциональна расстоянию между ними.

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{\varepsilon \varepsilon_0}$$

# Закон Джоуля- Ленца

Количество теплоты, выделяемое проводником с током, равно произведению квадрата силы тока, сопротивления проводника и времени.

Причина нагревания проводника электрическим током.

Взаимодействие свободных электронов в металлах или ионов в растворах солей, оснований и кислот (при их упорядоченном движении под действием сил электрического поля) с ионами или атомами вещества проводника и передачей им своей энергии.

Работа тока  $A = UIt$

Количество теплоты  $Q = A = UIt$

$$U = IR$$


$$Q = I^2 R t$$

Закон Ома

# Электрический ток

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

$i$ , А,	(Амперы)
$q$ , Кл,	(Кулоны)
$t$ , с	(секунды)

Если 
$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} = \text{const}$$

то ток **постоянный** и обозначаться должен заглавной буквой  $I$ .

$$i = I$$

# Электрическое напряжение

Определяется количеством энергии, затрачиваемой на перемещение единичного заряда из одной точки в другую.

$$u = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta q} = \frac{dw}{dq}$$

$u$ , В	(Вольты),
$w$ , Дж	(Джоули),
$q$ , Кл	(Кулоны).

# Энергия $w$

Измеряется в Джоулях, Ватт-секундах, киловатт-часах

При перемещении элементарного заряда  $dq$  через участок цепи с напряжением  $u$  затрачивается энергия

$$dw = u dq = u i dt = p dt \quad u = \frac{dw}{dq} \quad i = \frac{dq}{dt}$$

$$w = w(t_1) = \int_{-\infty}^{t_1} u i dt = \int_{-\infty}^{t_1} p dt$$

За время

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

$$W = w(t_2) - w(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} p dt$$

**МОЩНОСТЬ** – скорость преобразования энергии

$$p = \frac{dw}{dt} = ui$$

# Электродвижущая сила $\mathcal{E}$

Измеряется в вольтах

1. ЭДС - работа сторонних сил, затрачиваемая на перемещение единичного положительного заряда внутри источника от зажима с меньшим потенциалом к зажиму с большим.
2. ЭДС источника численно равна напряжению между его зажимами при холостом ходе (при отсутствии тока в источнике).
3. ЭДС - скалярная величина. Направление ЭДС совпадает с направлением тока, возникающего под действием этой ЭДС.

# Идеальные источники НАПРЯЖЕНИЯ (ЭДС) и ТОКА

Применяются для расчетов в электротехнике

ИСТОЧНИК ТОКА дает *неизменный ток* при любой нагрузке  
При *росте сопротивления* нагрузки от *нуля* до бесконечности =>  
*Напряжение* на нагрузке растет от *нуля* до бесконечности.

□ Внутренняя ПРОВОДИМОСТЬ источника тока равна нулю.

◆ ИСТОЧНИК НАПРЯЖЕНИЯ дает *неизменное напряжение* на любой нагрузке.

◆ При *росте проводимости* нагрузки от *нуля* до бесконечности  
=>

◆ Ток через нагрузку растет от *нуля* до бесконечности.

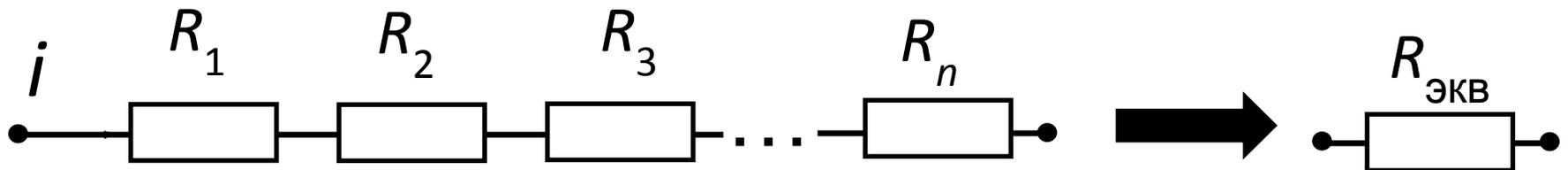
◆ Внутреннее СОПРОТИВЛЕНИЕ источника напряжения равно нулю.

У источника напряжения напряжение не зависит от нагрузки,  
У источника тока - ток.

# §2. Основные законы электротехники

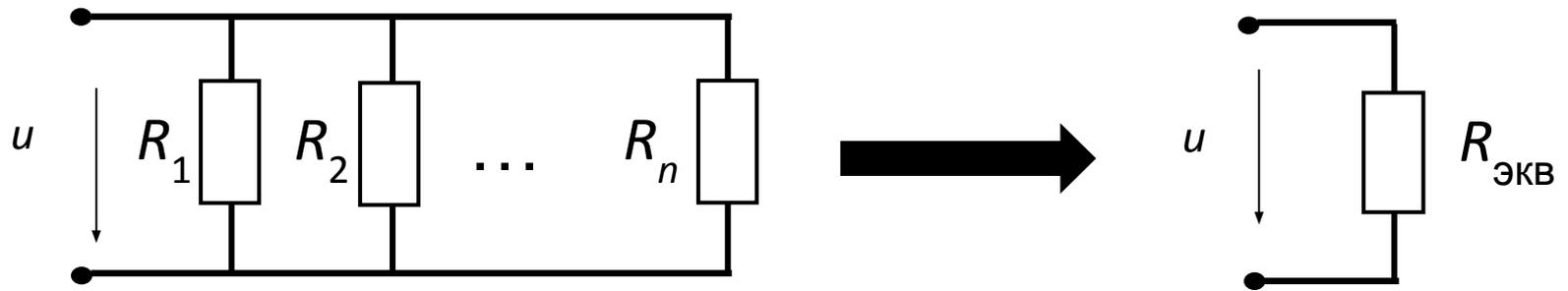
2.1. При ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ соединении через все элементы протекает ОДИН ТОК

$$R_{\text{ЭКВ}} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots R_n$$



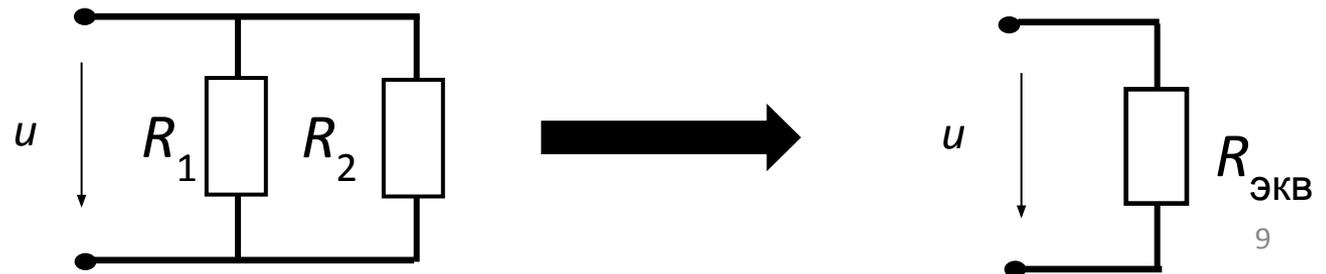
## 2.2. Ветви, присоединенные к одной паре узлов называются ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ.

$$\frac{1}{R_{\text{ЭКВ}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$



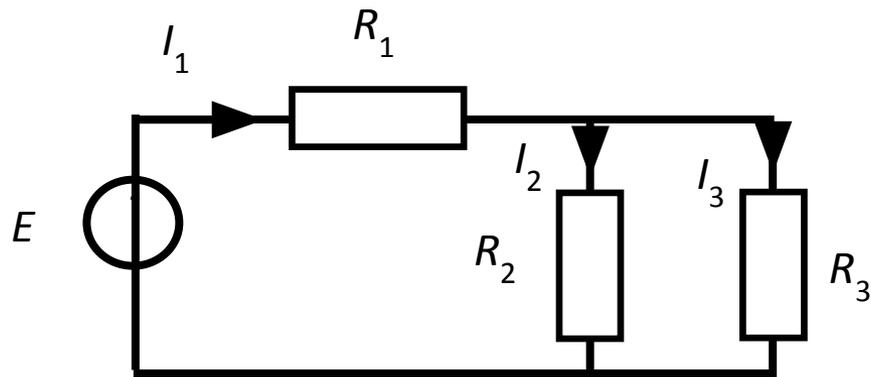
Параллельные ветви находятся под общим напряжением

$$\frac{1}{R_{\text{ЭКВ}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_{\text{ЭКВ}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

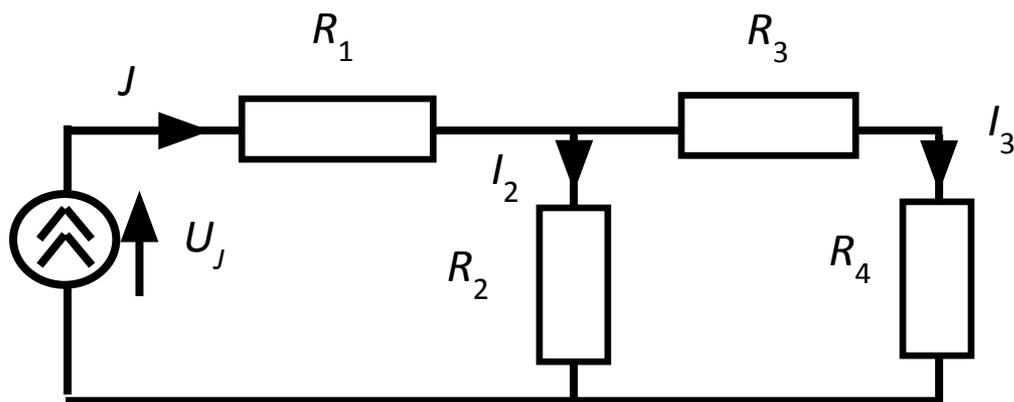


## 2.3. Закон Ома

$$I_1 = \frac{E}{R_{\text{ЭКВ}}},$$



$$R_{\text{ЭКВ}} = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}$$



$$U_J = J \cdot R_{\text{ЭКВ}}$$

$$R_{\text{ЭКВ}} = R_1 + \frac{R_2 \cdot (R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}$$

## 2.4. Законы Кирхгофа



**Кирхгоф (Kirchhoff) Густав Роберт 1824-1887г.**  
**немецкий физик, член Берлинской АН,**  
**член-корреспондент Петербургской АН.**

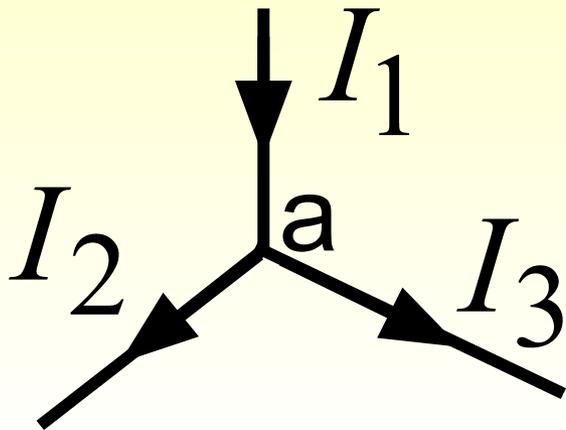
# *Первый закон Кирхгофа:*

**алгебраическая сумма токов в узле равняется нулю (токи, вытекающие из узла, считаются положительными, а втекающие – отрицательными)**

$$\sum (\pm i_k) = 0$$

Физический смысл прост: если бы он не выполнялся, в узле непрерывно накапливался бы электрический заряд, что невозможно.

**Например:**



узел а:

$$- I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

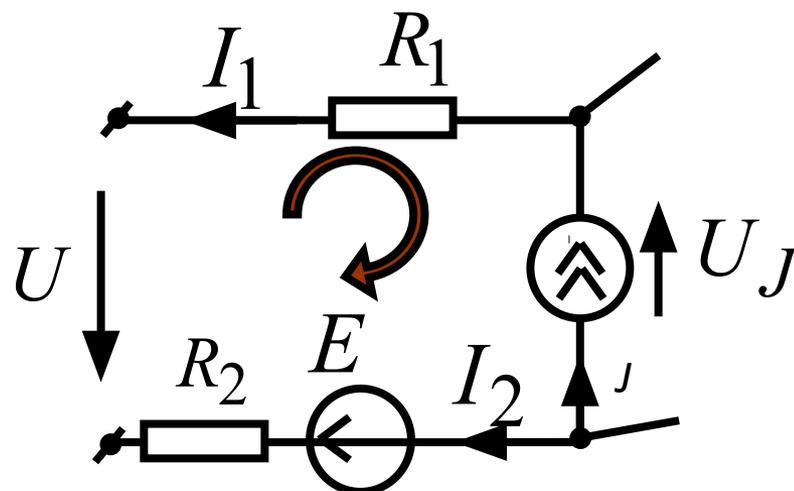
## Второй закон Кирхгофа:

В контуре алгебраическая сумма падений напряжения на пассивных элементах равна алгебраической сумме ЭДС и напряжений на зажимах источников тока.

с “+” берутся все слагаемые, положительное направление которых совпадает с выбранным обходом контура:

$$\sum_{k=1}^n \pm u_k = \sum_{k=1}^m \pm e_k \pm \sum_{k=1}^d u_{Jk}$$

Например:



$$-I_1 R_1 + I_2 R_2 - U = E - U_J$$

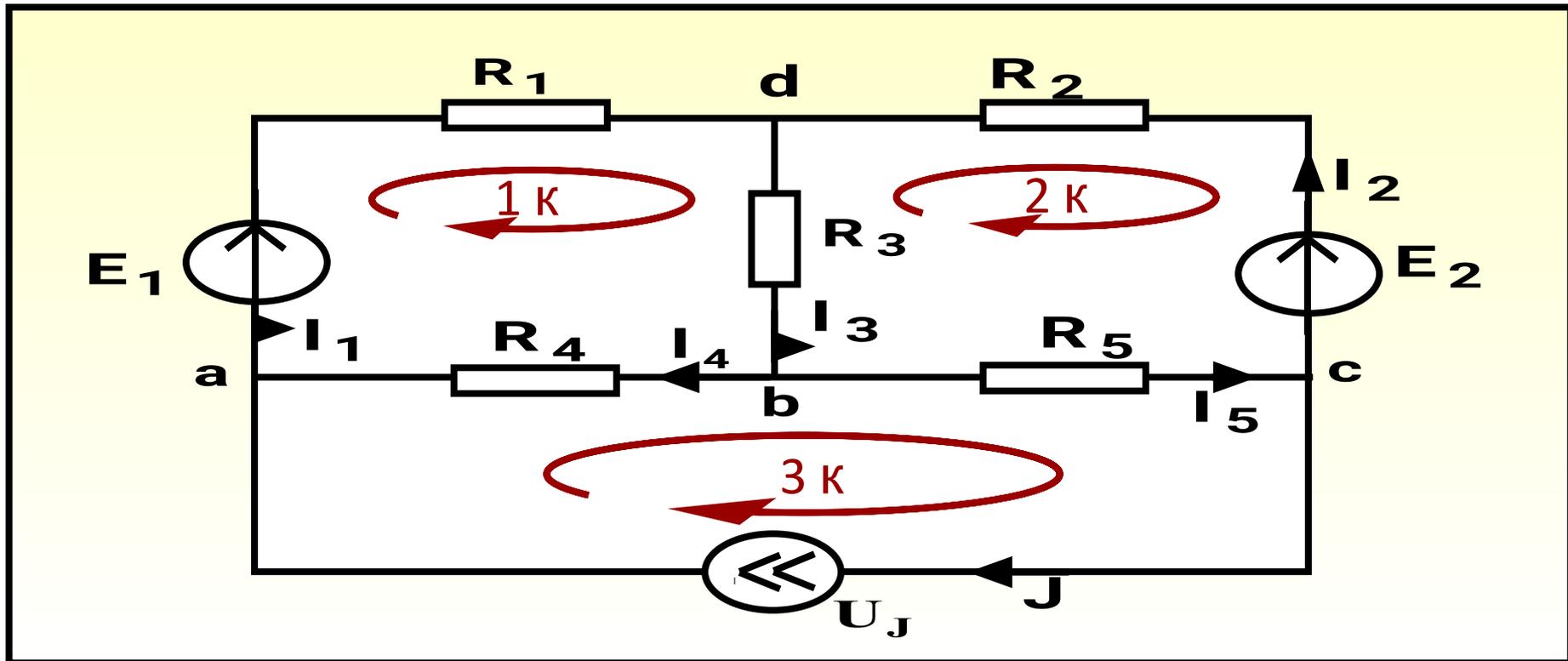
## 2.5. Метод законов Кирхгофа

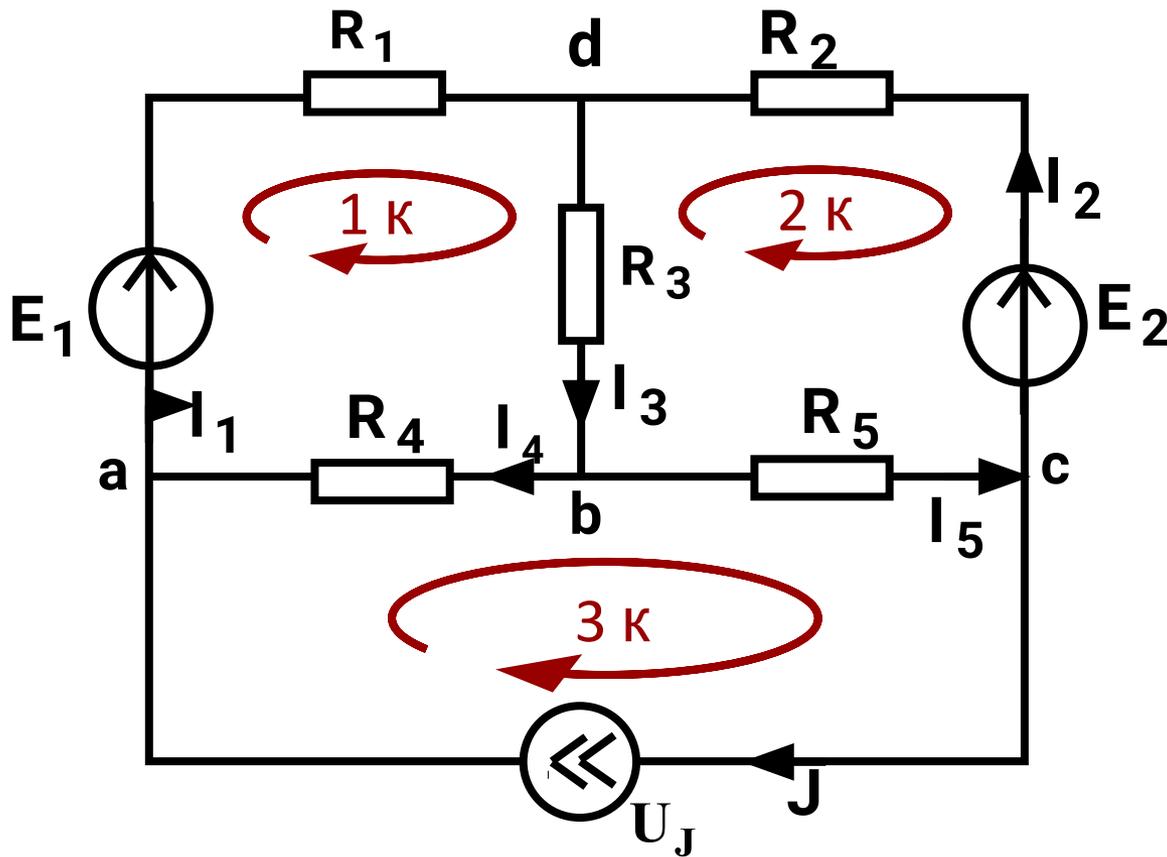
Решение системы уравнений, составленных по законам Кирхгофа, позволяет определить все токи и напряжения в рассматриваемой цепи

1 шаг – количество контуров (уравнений)

$$\begin{aligned} N &= 4 \\ M &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{По 13К: } N - 1 &= 3 \\ \text{По 23К: } M - N + 1 &= 3 \end{aligned}$$





**2 шаг – выбор контуров (уравнений)**

**3 шаг – составление уравнений**

a:	$I_1 - I_4 - J = 0$	1к:	$R_1 I_1 + R_3 I_3 + R_4 I_4 = E_1$
b:	$-I_3 + I_4 + I_5 = 0$	2к:	$-R_2 I_2 - R_3 I_3 - R_5 I_5 = -E_2$
c:	$I_2 - I_5 + J = 0$	3к:	$-R_4 I_4 + R_5 I_5 = U_J$

**В матричной форме**

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & \mathbf{I}_1 & \mathbf{I}_2 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{I}_4 & \mathbf{I}_5 & \mathbf{U}_J \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ R_1 & 0 & R_3 & R_4 & 0 & 0 \\ 0 & -R_2 & -R_3 & 0 & -R_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_4 & R_5 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} J \\ 0 \\ -J \\ E_1 \\ -E_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_1 - I_4 - J = 0$$

$$-I_3 + I_4 + I_5 = 0$$

$$I_2 - I_5 + J = 0$$

$$R_1 I_1 + R_3 I_3 + R_4 I_4 = E_1$$

$$-R_2 I_2 - R_3 I_3 - R_5 I_5 = -E_2$$

$$-R_4 I_4 + R_5 I_5 = U_J$$

**A** — матрица коэффициентов перед неизвестными величинами;

**B** — матрица источников

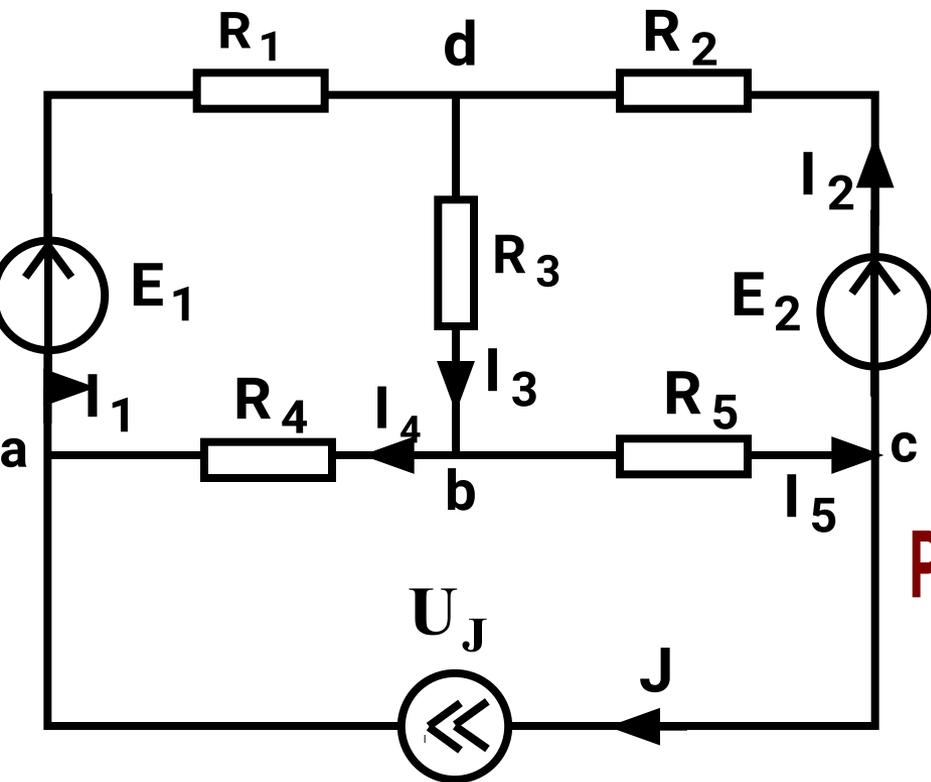
**4 шаг -Решение системы:**

$$\mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$$

## 2.6. Теорема Телледжена:

Для любого момента времени сумма вырабатываемых мощностей источников равна сумме потребляемых мощностей во всех пассивных элементах рассматриваемой цепи

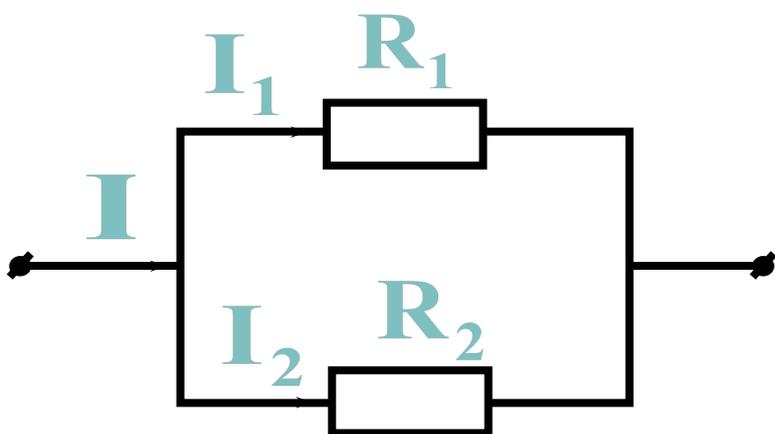
$$P_B = P_{\Pi}$$



$$P_B = E_1 I_1 + E_2 I_2 + U_J J = \dots \text{ Вт}$$

$$P_{\Pi} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 = \dots \text{ Вт}$$

## 2.7. Правило распределения (разброса) тока в параллельных ветвях



$$I_1 = I \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$I_2 = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

# §3. Методы расчета

## 3.1. Метод контурных токов

Основан на решении уравнений, составленных по второму закону Кирхгофа и позволяет упростить систему уравнений

Контурный ток – это ток, текущий в независимом контуре.  
Число уравнений равно числу независимых контуров:  $M-N+1$

Общая форма записи 
$$R_{kk} I_{kk} + \sum \pm R_{km} I_{mm} = E_{kk}$$

$R_{kk}$  – суммарное сопротивление  $k$ -контура

$I_{kk}$  – контурный ток  $k$ -контура

$R_{km}$  – общее сопротивление между  $k$ -контуром и  $m$ -контуром

$I_{mm}$  – соседний контурный ток  $m$ -контура

$E_{kk}$  – суммарная ЭДС  $k$ -контура

# Алгоритм составления уравнений

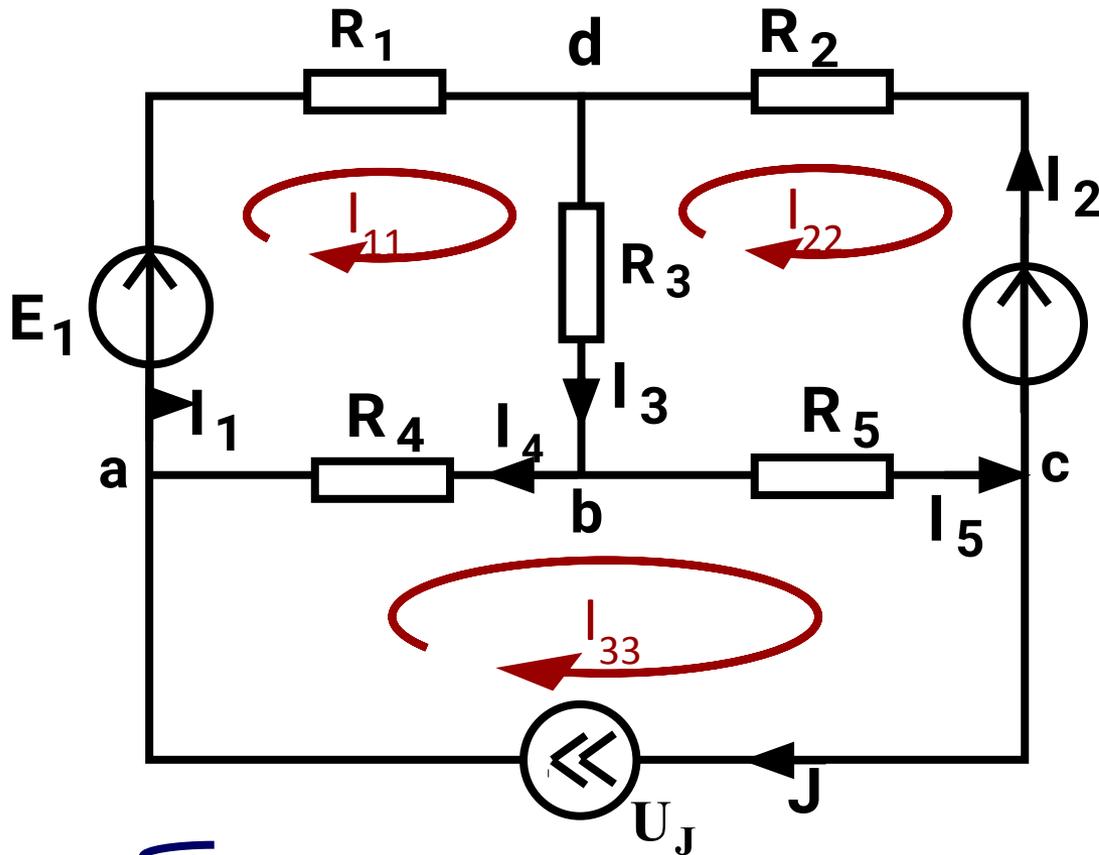
1. *Контурный ток РАССМАТРИВАЕМОГО КОНТУРА умножается на сумму сопротивлений этого контура.*
2. *К этому произведению ДОПИСЫВАЮТСЯ произведения всех соседних контурных токов на ОБЩИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ*  
(с “+” если контурные токи обтекают общее сопротивление в одном направлении).
3. *В правой части уравнения записывается алгебраическая сумма ЭДС контура*  
(с “+”, если направление ЭДС совпадает с направлением контурного тока).

**Важно!!!**

Для контура с источником тока уравнение не составляется, так контурный ток будет равен току источника тока, через источник тока должен проходить только один контурный ток.

## Порядок расчета

- ❑ **ОБОЗНАЧАЮТСЯ *токи* ветвей**
- ❑ **ВЫБИРАЮТСЯ *контурные* токи**
- ❑ **СОСТАВЛЯЕТСЯ *система* уравнений по алгоритму**
- ❑ **НАХОДЯТСЯ *контурные* токи**
- ❑ **Через *контурные* токи находятся *реальные* токи схемы**



Пример 1:

$$N = 4 \quad M = 6$$

Нужно выбрать

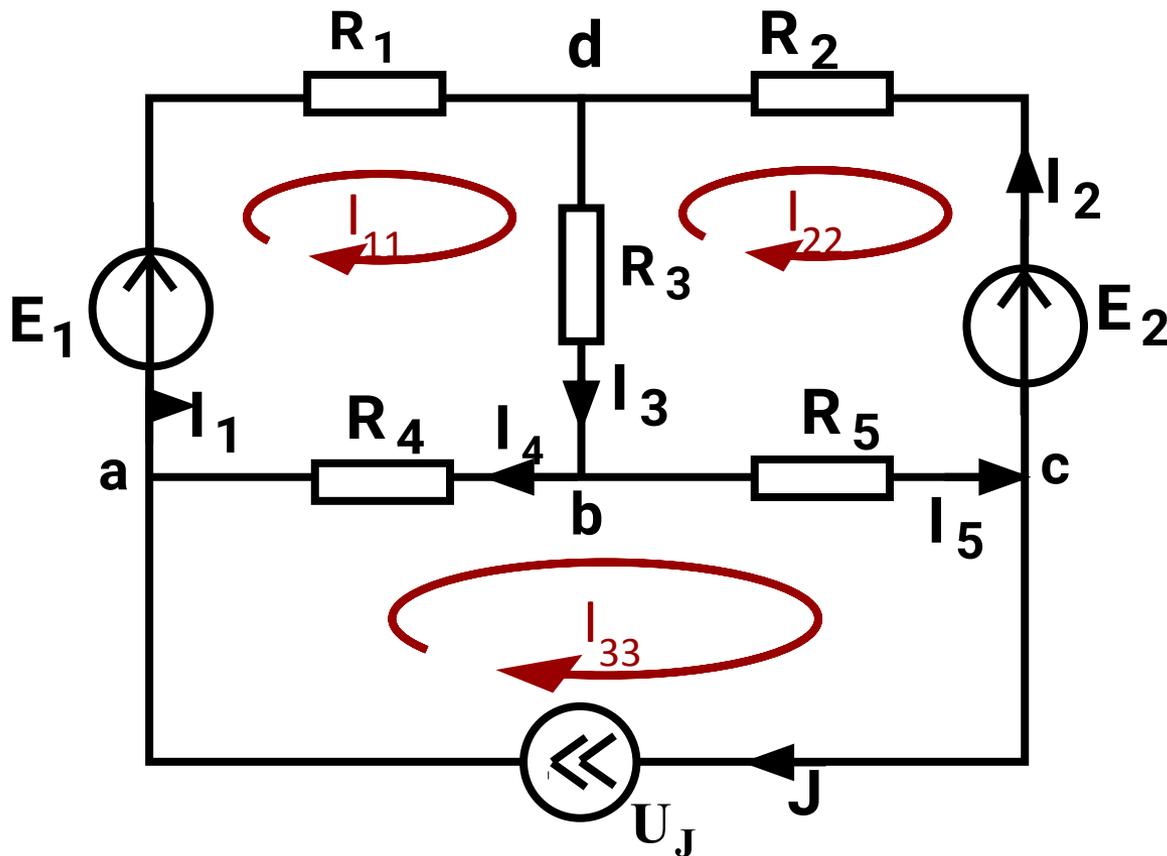
$$6 - 4 + 1 = 3$$

контурных тока

$$I_{33} = J$$

$$I_{11}(R_1 + R_3 + R_4) - I_{22}R_3 - I_{33}R_4 = E_1$$

$$I_{22}(R_2 + R_3 + R_5) - I_{11}R_3 - I_{33}R_5 = -E_2$$



Решаем систему, находим контурные токи, затем находим реальные токи ветвей:

$$I_1 = I_{11}$$

$$I_2 = -I_{22}$$

$$I_3 = -I_{22} + I_{11}$$

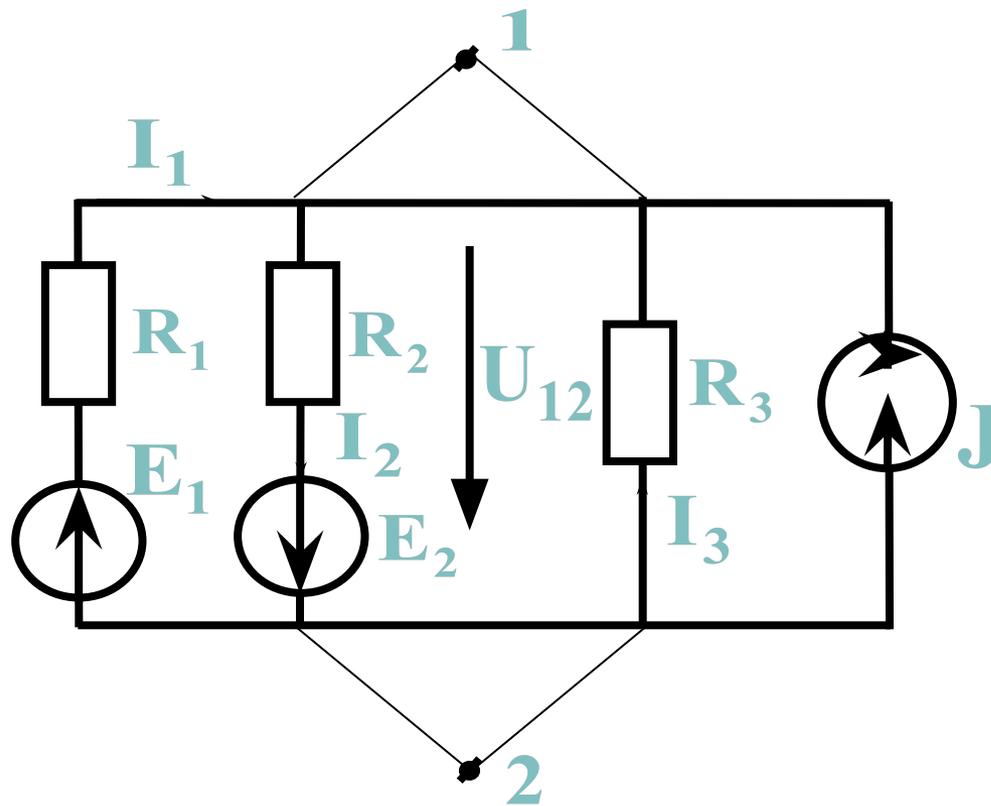
$$I_4 = I_{11} - I_{33}$$

$$I_5 = -I_{22} + I_{33}$$

$$U_J = -R_4 I_4 + R_5 I_5$$

## 3.2. Метод двух узлов

применяется для цепей, имеющих только два узла  
(например, узел 1 и узел 2).



# Порядок расчета

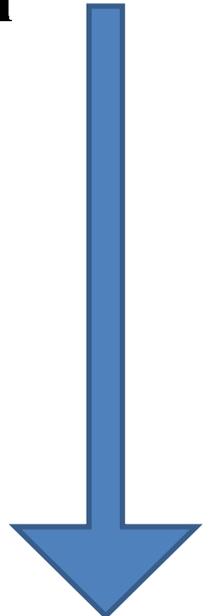
1.  $U = I \cdot R = I / (1/R)$  по закону Ома

2. Вычисляется межузловое напряжение, направленное от узла 1 к узлу 2 ( $U_{12}$ ):

3. Вычисляются токи ветвей по закону Ома:

«+», если направление тока  $I_k$  в  $k$ -ой ветви совпадает с направлением  $U_{12}$  и  $E_k$ ;  
 $R_k$  – сопротивление  $k$ -ой ветви.

$$U_{12} = \frac{\left( \sum_n \pm \frac{E_n}{R_n} + \sum_k \pm J_k \right)}{\sum_m \frac{1}{R_m}}$$



## 2. Вычисляется межузловое напряжение, направленное от узла 1 к узлу 2:

$$U_{12} = \frac{\left( \sum_n \pm \frac{E_n}{R_n} + \sum_k \pm J_k \right)}{\sum_m \frac{1}{R_m}}$$

$$\sum_n \pm \frac{E_n}{R_n}$$

– алгебраическая сумма отношений ЭДС ветвей к сопротивлениям этих ветвей (с «+», если стрелка ЭДС не совпадает с  $U_{12}$ );

$$\sum_k \pm J_k$$

– алгебраическая сумма токов источников тока (с «+», если его направление не совпадает с  $U_{12}$ );

$$\sum_m \frac{1}{R_m}$$

– сумма проводимостей всех ветвей, соединяющих узлы 1 и 2.

# Пример:

$$U_{12} = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} + J}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{\infty}}$$

$$I_1 = \frac{-U_{12} + E_1}{R_1}$$

$$I_2 = \frac{U_{12} + E_2}{R_2}$$

$$I_3 = \frac{-U_{12}}{R_3}$$

