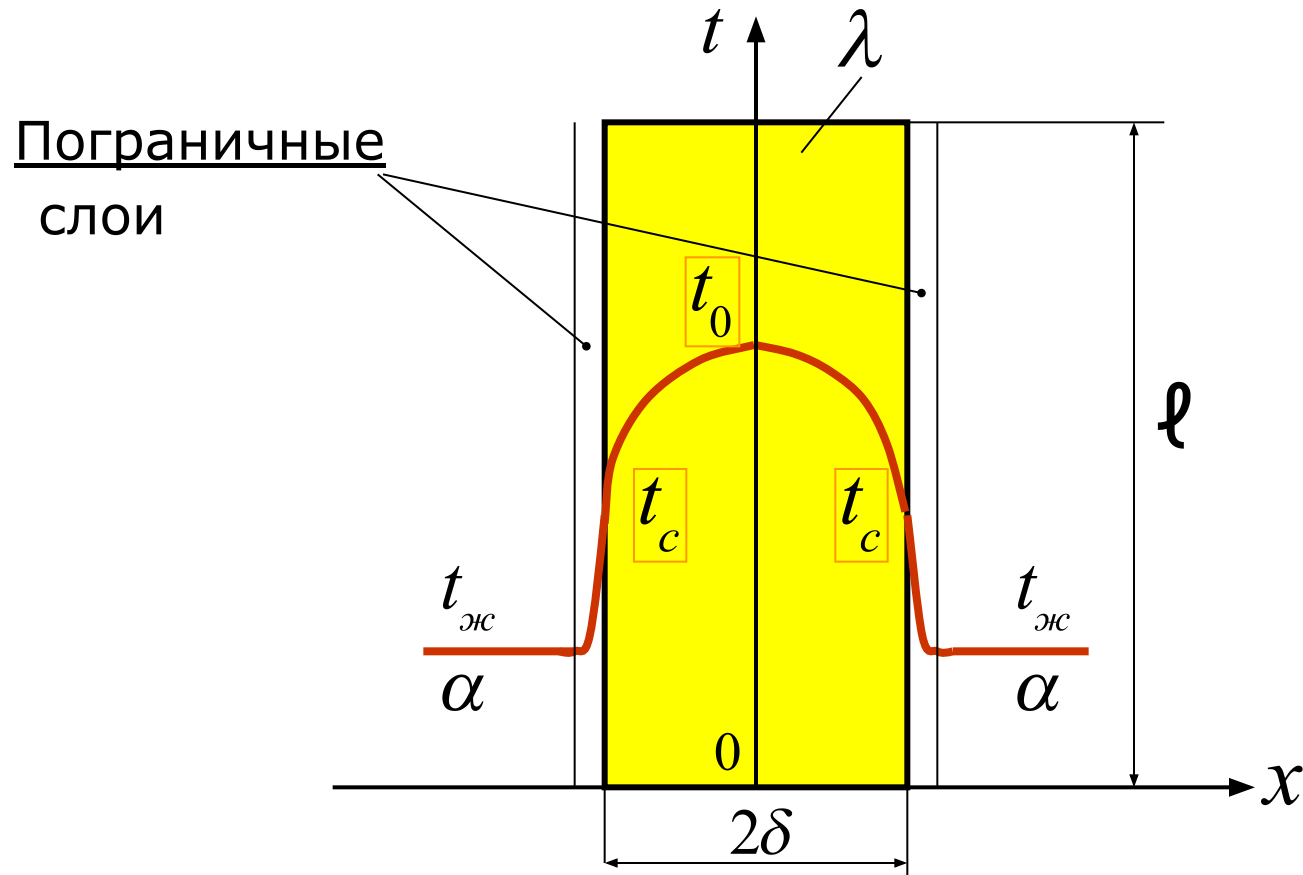


# Тепломассообмен 5

Теплопроводность при наличии  
внутренних источников теплоты

# А) Однородная пластина



# Дифференциальное уравнение теплопроводности

При  $\ell \gg \delta$ : бесконечная пластина.

В стационарном процессе:  $q_{\text{вс}} = \text{Const}; \alpha = \text{Const}; t = \text{Const}.$

Найти:  $t = f(x) = ?; t_0 = ?; t_c = ?$

Дифференциальное уравнение теплопроводности: 
$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t + \frac{q_v}{c\rho} \quad (1)$$

Для стационарного процесса:  $(\partial t / \partial \tau) = 0$

тогда  $a \nabla^2 t + \frac{q_v}{c\rho} = 0$ , где

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \rightarrow$$

оператор Лапласа, тогда после деления (2) на  $a = \lambda / (c\rho)$

дифференциальное уравнение теплопроводности

в бесконечной пластине:

$$\ell \gg \delta \rightarrow \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{d^2 t}{dx^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0. \quad (3)$$

# Граничные условия

Условия теплоотдачи одинаковы с обеих сторон пластины, поэтому **температурное поле симметричное**, а тепловыделения в обеих половинах пластины одинаковы, то есть можно рассматривать только ее правую половину. Тогда **граничные условия будут:**

$$\begin{aligned} x=0 &\rightarrow \left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=0} = 0; \\ (4) \\ x=\delta &\rightarrow -\lambda\left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=\delta} = \alpha(t_c - t). \\ (5) \end{aligned}$$

Интегрируем (3):  $\frac{dt}{dx} = -\frac{q_v}{\lambda}x + c_1$ ,

разделяем переменные:  $dt = -\frac{q_v}{\lambda}x dx + c_1 dx$ .

После второго интегрирования **имеем уравнение параболы:**

$$t = -\frac{q_v}{2\lambda}x^2 + c_1 x + c_2 \quad (6)$$

# Константы интегрирования

Константы интегрирования находятся из граничных условий (4) и уравнения (5) при:

$$x=0 \rightarrow c_1 = \left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=0} = 0 \quad \cdot \quad (8) \quad x=\delta \rightarrow \left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=\delta} = -\frac{q_v \delta}{\lambda}$$

Подставляем (8) в (4):

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=\delta} = -\frac{q_v \delta}{\lambda} = -\frac{\alpha}{\lambda} (t_{\text{жс}} - t_c).$$

После сокращения на  $\lambda$  имеем:  $t_c = t_{\text{жс}} + \frac{q_v \delta}{\alpha}$  (10)

Подставляем (10) в (6) при  $x=\delta$  и с учетом  $c_1=0$ , что получаем:  $c_2 = 0$  (11)

Приравнявая (10) и (11),  $t_c = t_{\text{жс}} = -\frac{q_v \delta^2}{2\lambda} + c_2$ .

имеем:

$$\frac{q_v \delta}{\alpha} + t_{\text{жс}} = -\frac{q_v \delta^2}{2\lambda} + c_2,$$

$$c_2 = t_{\text{жс}} + \frac{q_v \delta}{\alpha} + \frac{q_v \delta^2}{2\lambda}.$$

# Тепловой поток и температуры

Подставим константы интегрирования (7) и (12) в (6):

$$t = t_{жс} + \frac{q_v \delta}{\alpha} + \frac{q_v (13)}{2\lambda} (\delta^2 - x^2), \quad \text{уравнение параболы.}$$

Тепловой поток, отдаваемый от правой половины пластины:

$$Q = q_v V / 2 = \frac{q_v \delta f}{2}, \quad \text{то есть:} \quad q = q_v \delta, \text{ Вт/м}^2.$$

Если температура стенки известна или вычислена

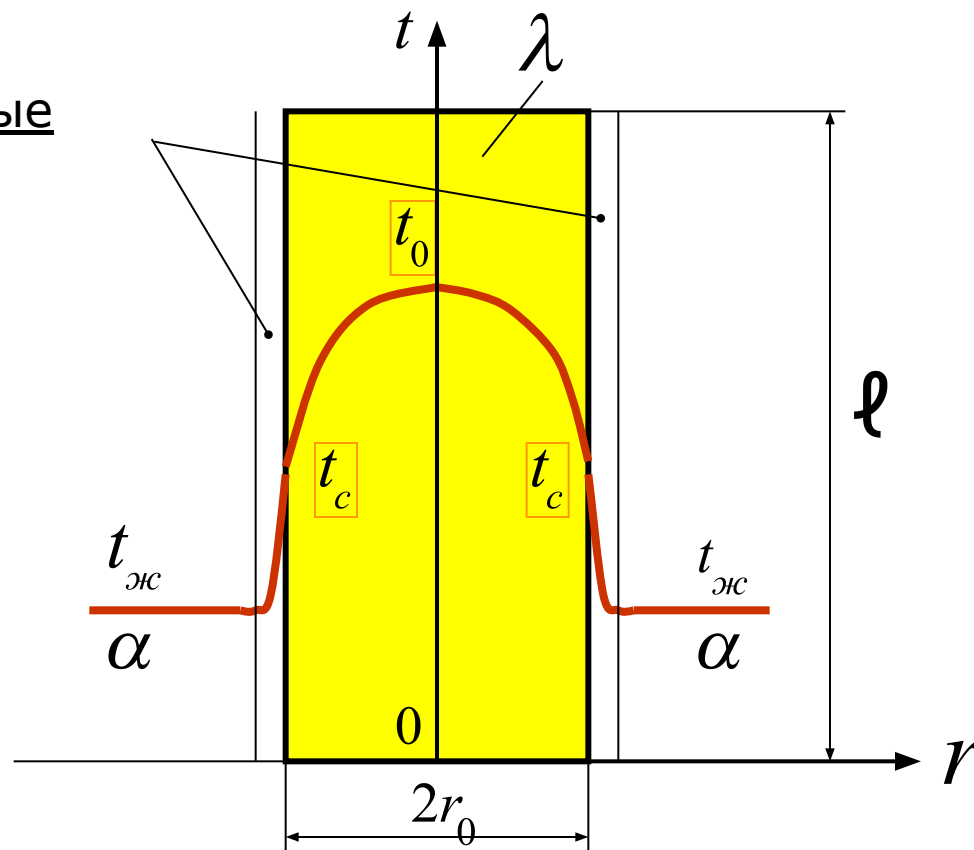
уравнению (10), то есть заданы граничные условия I рода:

$$t = t_c + \frac{q_v (15)}{2\lambda} x^2, \quad \text{тогда при} \quad x = 0:$$

$$t = t_0 = t_c + \frac{q_v \delta (16)}{2\lambda} = t_c + \frac{q \delta}{2\lambda}, \quad \text{температура в центре.}$$

# Однородный цилиндр

Пограничные  
слои



# Дифференциальное уравнение теплопроводности для цилиндра

Для бесконечного цилиндрического стержня  $l \gg 2r_0$

При стационарном режиме  $q_{\text{вс}} = \text{Const}; \alpha = \text{Const}; t = \text{Const}$ .

Найти  $t = f(r); t_0; t_c!$

Условия теплоотдачи со всех сторон одинаковы (симметричная задача), то есть можно рассматривать только правую половину цилиндра. Дифференциальное уравнение теплопроводности:

водности:  $\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t + \frac{(1) q_v}{c\rho}$  Для стационарного процесса:  $\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0,$

тогда:  $a \nabla^2 t = 0$  где  $\nabla^2$  оператор Лапласа в полярных (цилиндрических)

координатах:  $\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{(3)}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$ .



# Граничные условия

В бесконечном цилиндре температура изменяется только по радиусу, то есть:  $\frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} = \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0$ , после деления  $a = \frac{\lambda}{c\rho}$

$$(2) \text{ на: } \frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} = \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0,$$

получим дифференциальное уравнение теплопроводности для цилиндра при стационарном режиме:

$$\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dt}{dr} + \frac{q_v}{\lambda} = 0. \quad (4)$$

Граничные условия: при

$$r=0 \rightarrow \left(\frac{dt}{dr}\right)_{r=0} = 0; \quad (5)$$

Найти:  $t = f(r); t_0 : t_c!$

$$r=r_0 \rightarrow \left(\frac{dt}{dr}\right)_{r=r_0} = -\frac{\alpha}{\lambda} (t_c - t). \quad (6)$$

После двойного интегрирования (4) имеем:

$$t = -\frac{q_v r^2}{4\lambda} + c_1 \ln r + c_2. \quad (6)$$

# Конвективная теплоотдача от цилиндра к жидкости

Определив константы интегрирования и подставив их в (6),  
имеем:  $t = t_{\text{ос}} + \frac{q_v r_0}{2\alpha} + \frac{q_v (r_0^2 - r^2)}{4\lambda}$  это уравнение параболы.

Температура на оси цилиндра находится при  $r = 0$ :

$$t = t_0 = t_{\text{ос}} + \frac{q_v r_0}{2\alpha} + \frac{q_v r_0^2}{4\lambda}$$

и на стенке цилиндра

– при  $r = r_0$ :

$$t = t_{\text{ос}} = t + \frac{q_v r_0}{2\alpha} \quad (9)$$

Если заданы граничные условия 1 рода, то есть известна  $t_c$ ,  
тогда: (10) Удельный тепловой поток, Вт/м<sup>2</sup>

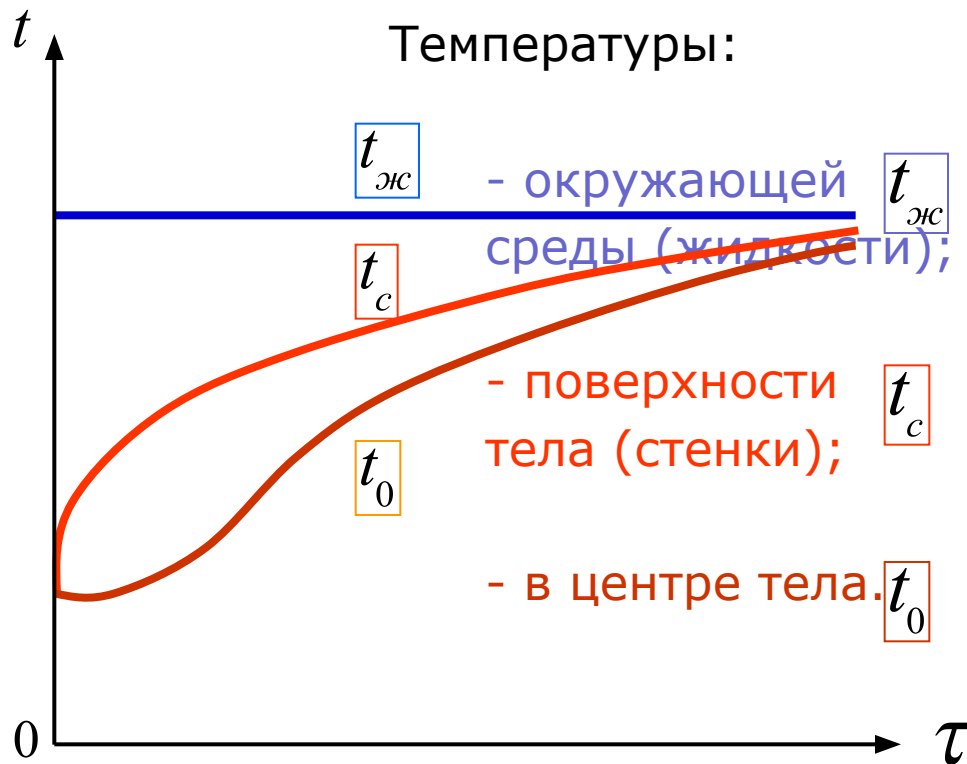
$$t = t_c + \frac{q_v}{4\lambda} (r_0^2 - r^2)$$

Находится из (9) и тепло-  
та, отданная от цилиндра к окружающей его жидкости, Вт:

$$q = \alpha (t_{\text{ос}} - t_c) = \frac{q_v r_0}{2} \quad (11)$$

$$Q = q R = \frac{q_v r_0}{2} 2\pi r_0 \ell = q_v \pi r_0^2 \ell \quad (12)$$

# Нестационарная теплопроводность



# Дифференциальное уравнение теплопроводности

Нестационарная теплопроводность имеет место при нагревании и охлаждении заготовок, пуске и отключении теплоэнергетических установок, обжиге кирпича, вулканизации резины. На слайде показан нагрев твердого тела в среде с температурой  $t_{жс} = Const$

Процесс описывается дифференциальным уравнением теплопроводности без внутренних источников теплоты  $q_v = 0$ .

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right)$$

Условия однозначности:

• геометрические; • физические;

• начальные: при  $\tau = 0 \rightarrow t = t_0 = f(x, y, z);$

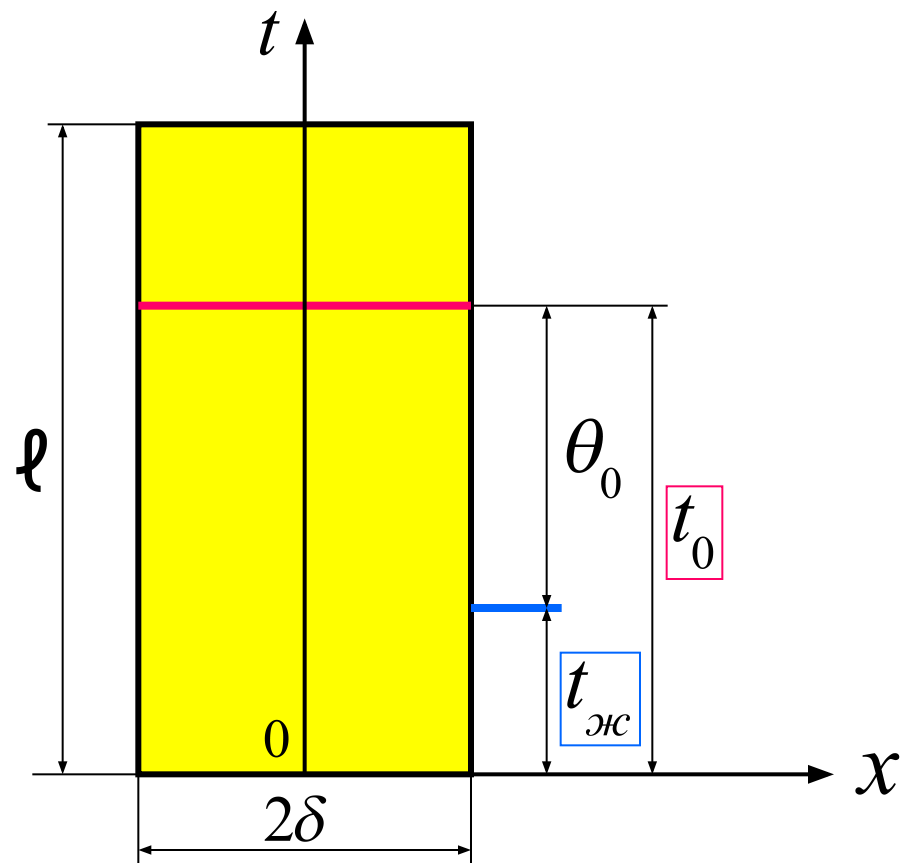
• граничные условия III рода:

$$\left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)_{n \in 0} = -\frac{\alpha}{\lambda} (t_{n=0} - t_{жс}).$$

Решение заключается в нахождении функции:

$$t = f(x, y, z, \tau, \alpha, \lambda, a, t_{жс}, t_{0}, l).$$

# Охлаждение пластины



# Начальные и граничные условия

Рассматриваем охлаждение (нагревание) пластины при:

$$\alpha = \text{Const}; t_{\text{ж}} = \text{Const}; \quad : \tau = 0 \rightarrow \text{Const} \quad .$$

Подставляем избыточную температуру пластины  $\theta = t - t_{\text{ж}}$  в дифференциальное уравнение (1) и граничные условия.

Для бесконечной пластины  $\ell \gg 2\delta$   $(\partial t / \partial y) = (\partial t / \partial z) = 0$

Тогда **дифференциальное уравнение примет вид:**

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (2)$$

**Начальные условия:** при

$$\tau = 0 \rightarrow \theta = \theta_0 = t_0 - t_{\text{ж}} \quad (3)$$

При  $\alpha = \text{Const}$  симметричная задача, тогда

**граничные условия III рода:**

$$\begin{aligned} \text{При } x=0 &\rightarrow \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_{x=0} = 0; \\ x=\delta &\rightarrow \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_{x=\delta} = -\frac{\alpha}{\lambda} \theta_{x=\delta}. \end{aligned} \quad (4)$$

# Разделение переменных

Решение дифференциального уравнения (2) ищем в виде: произведения двух функций, из которых одна является только функцией времени  $\tau$ , другая – только функцией  $x$ .

$$\theta = f(\tau, x) = \varphi(\tau)\psi(x).$$

Подставляем (5) в (2):

$$\frac{\partial \varphi(\tau)}{\partial \tau} \psi(x) = a \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} \varphi(\tau), \quad \varphi'(\tau) \psi(x) = a \psi''(x) \varphi(\tau).$$

Разделим переменные:  $\frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)} = a \frac{\psi''(x)}{\psi(x)}$ . (6)

Так как левая часть уравнения (6) является только функцией  $\tau$ , а правая – только  $x$ , то равенство (6) имеет место при любых их значениях. Тогда левая и правая части этого уравнения равны **константе**. Пусть это будет

$$\boxed{-k^2}.$$

## Решение в общем виде

$$\frac{1}{a} \frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)} = \frac{\psi''(x)}{\psi(x)},$$

$$\frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)} + ak^2 = 0;$$

$$(8) \psi''(x) + k^2\psi(x) = 0.$$

Получилась система дифференциальных уравнений (7) и (8), которой удовлетворяют соответственно функции:

$$\varphi(\tau) = c_1 e^{-ak^2\tau} \quad \psi(x) = c_2 \sin(kx) + c_3 \cos(kx)$$

Подставляя их в (5), получим:

$$(9) \theta = [c_2 \sin(kx) + c_3 \cos(kx)] c_1 e^{-ak^2\tau}.$$

При граничных условиях на оси:  $x=0 \rightarrow \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_{x=0} = 0$ :

$$\text{производная от (9): } \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_{x=0} = c_1 e^{-ak^2\tau} k [c_2 \cos(kx) - c_3 \sin(kx)] = 0,$$



# Константы интегрирования

Так как  $c_1 e^{-ak^2\tau} \neq 0$   $[c_2 \cos(kx) - c_3 \sin(kx)] = 0$ ,

или:  $c_2 \cos 0 = c_3 \sin 0$ .  $\sin 0 = 0$ ,  $c_3 \neq 0$ ;

а при  $\cos 0 \neq 0$ ,  $c_2 = 0$ .

Таким образом, решение  $\psi(x) = c_2 \sin(kx)$  надо отбросить, как не удовлетворяющее граничным условиям.

Тогда при  $c_2 = 0; c_1 c_3 = A$  уравнение (9) запишется в виде:

$$(10) \quad \theta = A e^{-ak^2\tau} \cos(kx),$$

или с учетом граничных условий на поверхности:

$$x = \delta \rightarrow \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=\delta} = -\frac{\alpha}{\lambda} \theta_{x=\delta} \rightarrow$$

# Аналитическое решение

то есть  $-kAe^{-ak^2\tau} \sin(k\delta) = -\frac{\alpha}{\lambda} Ae^{-ak^2\tau} \cos(k\delta)$ .

После сокращения на  $Ae^{-ak^2\tau}$ :  $k \sin(k\delta) = \frac{\alpha}{\lambda} \cos(k\delta)$ ,

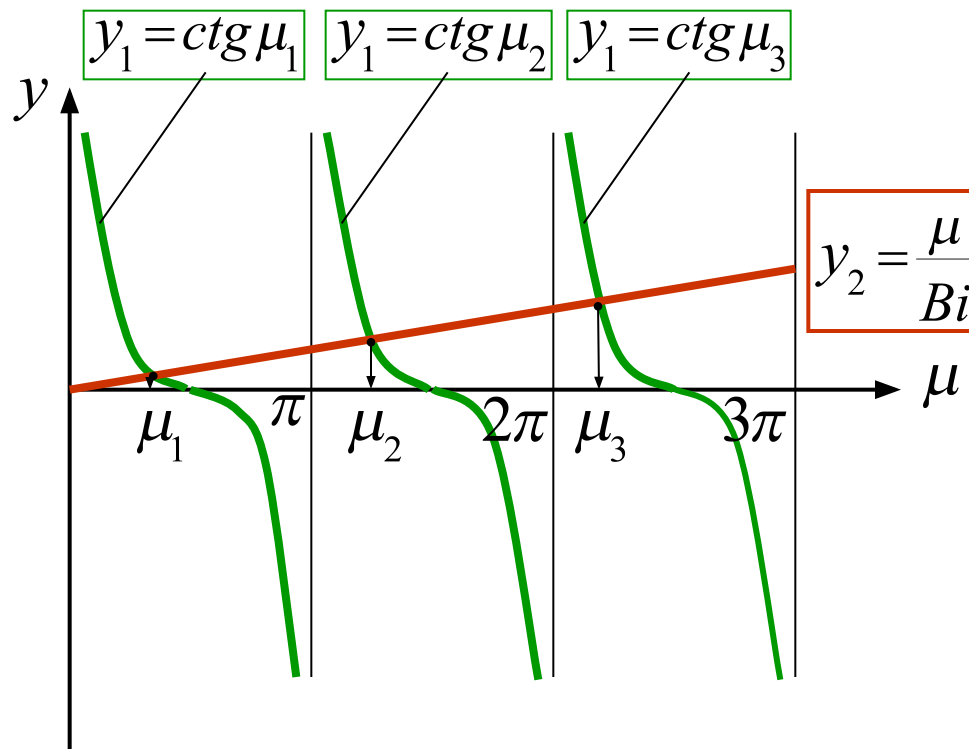
или:  $ctg(k\delta) = \frac{k\lambda}{\alpha} \frac{k\delta}{\alpha\delta}$ .  $\frac{\alpha\delta}{\lambda} = Bi \rightarrow$  (критерий)

Био – соотношение конвективной теплоотдачи снаружи и теплопроводности внутри тела.

Обозначив  $k\delta = \mu$ , получим:  $ctg \mu = \frac{\mu}{Bi}$  (12)

Уравнение (12) можно решить графически (см. следующий слайд).

# Графическое решение уравнения охлаждения (нагрева) пластины



# Результаты графического решения

При  $Bi \rightarrow \infty: y_2 = \frac{\mu}{Bi} = 0$ , то есть функция совпадает с осью абсцисс, то есть:  $\mu_1 = \frac{\pi}{2}; \mu_2 = \frac{3}{2}\pi; \mu_3 = \frac{5}{2}\pi; \dots \mu_n = (2n-1)\frac{\pi}{2}$ .

При  $Bi \rightarrow 0: y_2 = \frac{\mu}{Bi} = \infty$ , то есть функция совпадает с осью ординат, при этом:  $\mu_1 = 0; \mu_2 = \pi; \mu_3 = 2\pi; \dots \mu_n = (n-1)\pi$ .  
Каждому  $\mu_i$  соответствует свое частное распределение избыточных температур  $\theta_i$ , которое не является решением дифференциального уравнения (2).

Решение можно представить в виде суммы ряда  $\theta = \sum_{i=1}^n \theta_i$ , где достаточно иметь  $n = 4$  ( $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ ) значения которых при  $Bi = 0 - \infty$  приведены в таблице на следующем слайде.

# Значения $\mu_i$ для пластины

$Bi$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\mu_4$
$\infty$	1,571	4,712	7,854	11,00
2,747	1,169	3,771	6,674	9,701
1,000	0,8603	3,426	6,437	9,529
0,3640	0,5885	3,253	6,341	9,463
0,0000	0,0000	3,142	6,283	9,425

# Условия на оси пластины

В безразмерном виде:  $\Theta = \frac{\theta}{\theta_0}; X = \frac{x}{\delta}; Fo = \frac{a\tau}{\delta^2} \rightarrow$

здесь число  $Fo$  (критерий) Фурье – безразмерное время.

Для  $Fo \geq 0,3$ , с достаточной точностью, можно ограничиться только первым членом ряда  $\mu_1$ : , тогда:

$$\Theta = \frac{2 \sin \mu_1}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1} \cos(\mu_1 X) \exp(-\mu_1^2 Fo). \quad (13)$$

Пусть  $\frac{2 \sin \mu_1}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1} = D_1$ , тогда

$$\Theta = D_1 \cos(\mu_1 X) \exp(-\mu_1^2 Fo).$$

На оси пластины  $X = \frac{x}{\delta} = 0$ ; обозначим  $\cos 0 = 1$ ,

$$D_1 \cos 0 = N(Bi).$$

Итак, безразмерный избыток температуры на оси пластины:

$$\Theta_{X=0} = N(Bi) \exp(-\mu_1^2 Fo).$$

# Условия на поверхности пластины

На поверхности пластины:  $X = \frac{x}{\delta} = 1; \cos(\mu_1 X) = \cos \mu_1.$

Введем обозначение  $D_1 \cos \mu_1 = P(Bi),$

$$\Theta_{X=1} = P(Bi) \exp(-\mu_1^2 Fo). \quad (16)$$

Функции  $N(Bi), P(Bi)$  табулированы и могут быть взяты из справочника. Логарифмируя (15), получим:

$$\ln(\Theta)_{X=0} = \ln N(Bi) - \mu_1^2 Fo, \quad (17)$$

то есть в логарифмических координатах эта зависимость прямолинейна.

То же самое для уравнения (16). Решения для уравнений (15) и (16) могут быть найдены графически.

# Графические решения

На оси пластины:

$$\Theta_{X=0} = \frac{t_x(18)}{t_0 - t_{жс}}$$

На поверхности пластины:

$$\Theta_{X=1} = \frac{t_{x \in \delta} - t}{t_0 - t_{жс}} \quad (19)$$

Точные графики для оси пластины ( $X = 0$ ) и для ее поверхности ( $X = 1$ ) есть в учебнике Исаченко, В.П. «Теплопередача».

По этим графикам находят сначала избыточные температуры  $\Theta_{X=0}$ ,  $\Theta_{X=1}$  на оси и на поверхности в К, после чего по уравнениям (18) и (19) соответственно определяются сами температуры пластины  $t_{x=0}$ ,  $t_{x=\delta}$  в °С. На следующем слайде показан вид такого графика.



# График логарифмический

$$\Theta = f(Bi, Fo)$$

