

# Комплексные числа

*“Помимо и даже против воли того или другого математика, мнимые числа снова и снова появляются на выкладках, и лишь постепенно по мере того как обнаруживается польза от их употребления, они получают более и более широкое распространение”*

**Ф. Клейн.**

Комплексным числом называется число вида  $a + bi$ , где  $a$  и  $b$  вещественные числа, символ  $i$  мнимая единица, причём

$$i^2 = -1$$

$Z = a + bi$  - алгебраическая форма записи комплексного числа.

$a = \operatorname{Re} z$  – действительные

$b = \operatorname{Im} z$  – мнимые

Числа для которых  $b$  не равно 0 называется мнимыми числами,  $bi$  – чисто мнимые числа.

Два комплексных числа называется равными, если равны их действительные и мнимые части.

$$z_1 = a + bi$$

$$z_2 = c + di \quad z_1 = z_2, \text{ если } a = c, b = d$$

## || Действия с комплексными числами.

1) Сложение и вычитание

$$z_1 = a + bi$$

$\pm$

$$z_2 = c + di$$

$$z_1 \pm z_2 = a \pm c + (b \pm d)i$$

2) Умножение

$$z_1 \times z_2 = (a + bi) \times (c + di) = ac + a \times di + bic + bdi^2 = ac - bd + (ad + bc)i$$

Комплексные числа в алгебраической форме можно складывать и умножать как двухчлены учитывая, что  $i^2 = -1$

4) Деление

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + bi)}{(c + di)} = \frac{(a + bi)}{(c + di)} \times \frac{1}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac - adi + bci + b \times d}{c^2 + d^2}$$

$$= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \times i$$

Вывод чтобы выполнить деление надо домножить и разделить на сопряжённые делители.

## Свойства комплексных чисел

1) комплексные числа коммутативны по сложению и по умножению.

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

2) комплексные числа ассоциативны по сложению и по умножению .

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$$

3) комплексные числа дистрибутивны.

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$

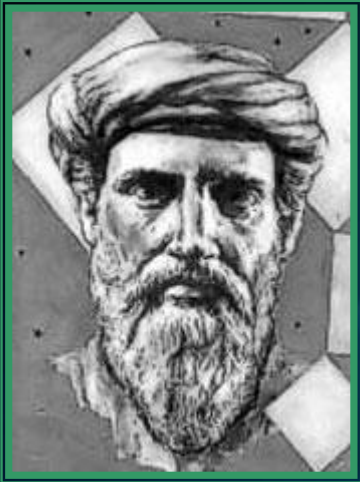
Для комплексных чисел операция деления определена как операция обратная операции умножения. Если  $z = \frac{z_1}{z_2}$  то  $z$  является

решением уравнения  $z \cdot z_2 = z_1$ . Решим это уравнение, домножив

левую и правую часть на  $\overline{z_2}$  и разделив обе части на квадрат модуля. Получим, что

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}$$

# История



Пифагор

Пифагор учил, что "... элементы чисел являются элементами всех вещей и весь мир в целом является гармонией и числом. Сильнейший удар по этому взгляду был нанесен открытием, сделанным одним из пифагорейцев. Он доказал, что диагональ квадрата несоизмерима со стороной. Отсюда следует, что натуральных чисел и дробей недостаточно, для того чтобы выразить длину диагонали квадрата со стороной 1. Есть основание утверждать, что именно с этого открытия начинается эра теоретической математики.

Уже в VIII веке было установлено, что квадратный корень из положительного числа имеет два значения - положительное и отрицательное, а из отрицательных чисел квадратный корень извлекать нельзя: нет такого числа  $x$  чтобы  $x^2 = -9$

В XVI веке в связи с изучением кубических уравнений оказалось необходимым извлекать квадратные корни из отрицательных чисел. В формуле для решения кубических уравнений вида  $x^3 + px + q = 0$

кубические и квадратные корни:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

Эта формула безотказно действует в случае, когда уравнение имеет один действительный корень  $x^3 + 2x - 4 = 0$

), а если оно имеет три действительных корня  $x^3 - 7x + 6 = 0$

), то под знаком квадратного корня оказывалось отрицательное число.

Но Руффини (Италия) на рубеже XVIII и XIX веков доказал, что буквенное уравнение пятой степени

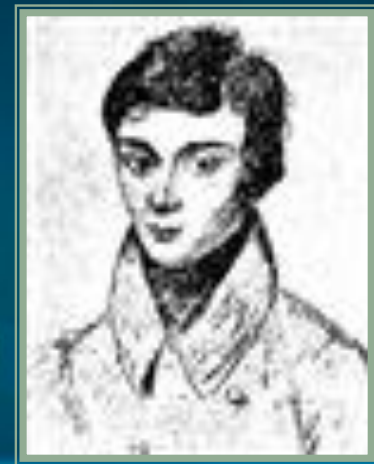
$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

нельзя решить алгебраически; точнее: нельзя выразить его корень через буквенные величины  $a, b, c, d, e$  с помощью шести алгебраических действий (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня).



**Руффини**

В 1830 году Галуа (Франция) доказал, что никакое общее уравнение, степень которого больше чем 4, нельзя решить алгебраически. Тем не менее всякое уравнение  $n$ -й степени имеет  $n$  корней. В этом математики были убеждены еще в XVII веке (основываясь на разборе многочисленных частных случаев), но лишь на рубеже XVIII и XIX веков упомянутая теорема была доказана Гауссом.



**Галуа Эварист**





Итальянский алгебраист Дж. Кардано в 1545 г. предложил ввести числа новой природы. Он показал, что система уравнений

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x \cdot y = 40 \end{cases}$$

Кардано Джераломо

, не имеющая решений во множестве действительных чисел, имеет решения вида  $x = 5 \pm \sqrt{-15}$   $y = 5 \mp \sqrt{-15}$

, нужно только условиться действовать над такими выражениями по правилам обычной алгебры  $\sqrt{-a} \sqrt{-a} = -a$  и считать что

Кардано называл такие величины “чисто отрицательными” и даже “софистически отрицательными”, считал их бесполезными и старался их не употреблять. В самом деле, с помощью таких чисел нельзя выразить ни результат измерения какой-нибудь величины, ни изменение какой-нибудь величины.

В 1572 году вышла книга итальянского алгебраиста Р. Бомбелли, в которой были установлены первые правила арифметических операций над такими числами, вплоть до извлечения из них кубических корней.



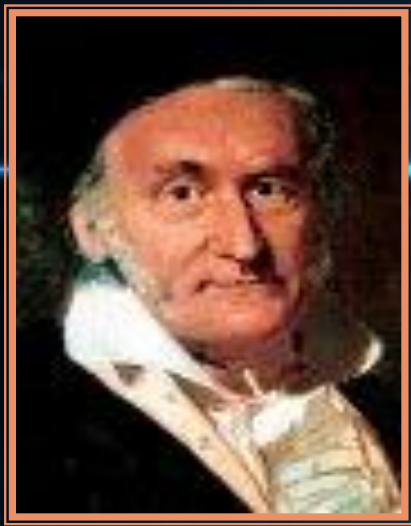
**Декарт Рене**

В 1777 году один из крупнейших математиков XVIII века - Л. Эйлер предложил использовать первую букву французского слова *imaginaire* (мнимый) для обозначения числа

Название “*мнимые числа*” ввел в 1637 году французский математик и философ Р. Декарт



**Леонард Эйлер**



**Карл Фридрих Гаусс**

Термин “*комплексные числа*” так же был введен Гауссом в 1831 году. Слово комплекс (от латинского *complexus*) означает связь, сочетание, совокупность понятий, предметов, явлений и т. д. Образующих единое целое.



**Абрахам де Муавр**

На рубеже XVII и XVIII веков была построена общая теория корней  $n$ -ых степеней сначала из отрицательных, а за тем из любых комплексных чисел, основанная на следующей формуле английского математика А. Муавра (1707):

$$(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)^n = \cos n \cdot \varphi + i \cdot \sin n \cdot \varphi$$

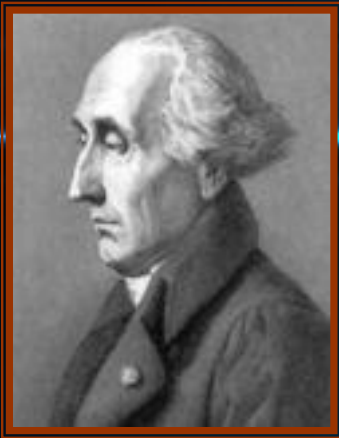
С помощью этой формулы можно было так же вывести формулы для косинусов и синусов кратных дуг.

Л. Эйлер вывел в 1748 году замечательную

формулу:

$$e^{i \cdot x} = \cos x + i \cdot \sin x$$

, которая связывала воедино показательную функцию с тригонометрической. С помощью формулы Л. Эйлера можно было возводить число  $e$  в любую комплексную степень.

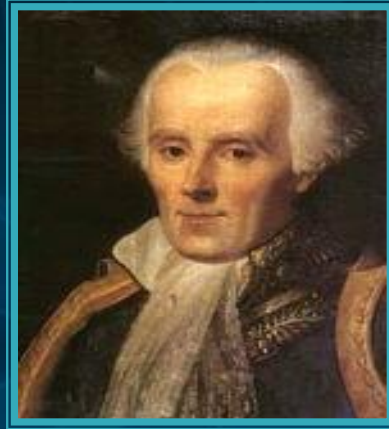


Лагранж Жозеф  
Луи



Карно Лазар  
Никола Маргерит

В конце XVIII века французский математик Ж. Лагранж смог сказать, что математический анализ уже не затрудняют мнимые величины. С помощью мнимых чисел научились выражать решения линейных



Лаплас

П. Лаплас считал, что результаты, полученные с помощью мнимых чисел, - только наведение, приобретающее характер настоящих истин лишь после подтверждения прямыми доказательствами.

“Никто ведь не сомневается в точности результатов, получаемых при вычислениях с мнимыми количествами, хотя они представляют собой только алгебраические формы иероглифы нелепых количеств” Л. Карно.

После создания теории комплексных чисел возник вопрос о существовании “гиперкомплексных” чисел - чисел с несколькими “мнимыми” единицами. Такую систему вида  $a + bi + cj + dk$ , где

$i^2 = j^2 = k^2 = -1$ , построил в 1843 году ирландский математик У. Гамильтон, который назвал их “кватернионами”. Правила действия над кватернионами напоминают правила обычной алгебры, однако их умножение не обладает свойством коммутативности (переместительности): например,  $ij = k$ , а  $ji = -k$

Гиперкомплексные числа не являются темой моего реферата, поэтому я лишь упоминаю об их существовании.

Большой вклад в развитие теории функций комплексного переменного внесли русские и советские ученые Н. И. Мусхелишвили занимался ее применениями к упругости, М. В. Келдыш и М. А. Лаврентьев - к аэро- и гидродинамике, Н. Н. Богомолов и В. С. Владимиров - к проблемам квантовой теории поля.

Датчанин К. Вессель, француз Ж. Арган и немец К. Гаусс независимо друг от друга предложили изобразить комплексное число  $z = a + b \cdot i$  точкой  $M(a, b)$

на координатной плоскости. Удобнее изображать число не самой точкой  $M$ , а вектором  $\overline{OM}$  идущим в эту точку из начала координат.

Вектор  $\overline{OM}$

При этом  $a = r \cdot \cos \varphi$   $b = r \cdot \sin \varphi$  и число  $z$  принимает вид

$$z = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$$

, который называется тригонометрической формой комплексного числа. Число  $r$  называют модулем комплексного числа  $z$  и обозначают  $|z|$ . Число  $\varphi$

называют аргументом  $z$  и обозначают  $\text{Arg}z$ . Заметим, что

если  $z = 0$ , значение  $\text{Arg}z$  не определено, а при  $z \neq 0$  оно определено с точностью до кратного  $2\pi$ . Упомянутая ранее формула Эйлера позволяет записать число  $z$  в виде  $z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$