Комплексные числа

“Помимо и даже против воли того или другого математика, мнимые числа снова и снова появляются на выкладках, и лишь постепенно по мере того как обнаруживается польза от их употребления, они получают более и более широкое распространение”

Ф. Клейн.

I

Комплексным числом называется число вида a + bi , где a и b весчественные числа, символ **i** мнимая единица, причём

$i^2 = -1$

Z = a + bi - алгебраическая форма записи комплесного числа.

a = Re z – действительные

b = I'm z – мнимые

Числа для которых b не равно 0 называется мнимыми числами, bi – чисто мнимые числа.

Два комплексных числа называется равными, если равны их действительные и мнимые части.

z1 = a + bi

z2 = c + di z1 = z2 , если a = c , b = d

II Действия с комплесными числами.

1) Сложение и вычитание

2) $z1 = a + bi$

$\pm$

$z2 = c + di$

$z1 \pm z2 = a \pm c + (b \pm d)i$

2) Умножение

$z1 \times z2 = (a + bi) \times (c + di) = ac + a \times di + bic + bdi^2 = ac - bd + (ad + bc)I$

Комплексные числа в алгебраической форме можно складывать и умножать как двухчленны учитывая , что $i^2 = -1$

4) Деление

$$\frac{Zi}{Zi} = \frac{(a + bi)}{c + di} = \frac{(a + bi)}{} \times \frac{1}{c + di} = \frac{(a + bi)}{} \times \frac{c - di}{c^2 + d^2} = \frac{ac - adi + bci + b \times d}{c^2 + d^2}$$

$$= \frac{ac + bd}{c + d} + \frac{bc - ad}{c + d} \times I$$

Вывод чтобы выполнить деление надо домножить и разделить на сопряжённые делители.

III Свойства комплексных чисел

1) комплексные числа коммутативны по сложению и по умножению.

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \qquad z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

2) комплексные числа ассоциативны по сложению и по умножению .

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \qquad (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$$

3) комплексные числа дистрибутивны.

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$

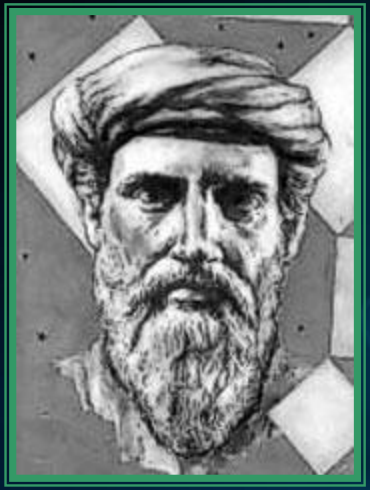
Для комплексных чисел операция деления определена как операция обратная операции умножения. Если $z = \frac{z_1}{z_2}$ то z является

решением уравнения $z \cdot z_2 = z_1$. Решим это уравнение, домножив

левую и правую часть на $\overline{z_2}$ и разделив обе части на квадрат модуля. Получим, что

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}$$

История



Пифагор

Пифагор учил, что “… элементы чисел являются элементами всех вещей и весь мир в челом является гармонией и числом. Сильнейший удар по этому взгляду был нанесен открытием, сделанным одним из пифагорейцев. Он доказал, что диагональ квадрата несоизмерима со стороной. Отсюда следует, что натуральных чисел и дробей недостаточно, для того чтобы выразить длину диагонали квадрата со стороной 1. Есть основание утверждать, что именно с этого открытия начинается эра теоретической математики.

Уже в VIII веке было установлено, что квадратный корень из положительного числа имеет два значения - положительное и отрицательное, а из отрицательных чисел квадратный корень извлекать нельзя: нет такого числа x, чтобы $x^2 = -9$

.

В XVI веке в связи с изучением кубических уравнений оказалось необходимым извлекать квадратные корни из отрицательных чисел. В формуле для решения кубических уравнений вида $x^3 + px + q = 0$

кубические и квадратные корни:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

Эта формула безотказно действует в случае, когда уравнение имеет один действительный корень ($x^3 + 3x - 4 = 0$

), а если оно имеет три действительных корня ($x^3 - 7x + 6 = 0$

), то под знаком квадратного корня оказывалось отрицательное число.

Руффини

Но Руффини (Италия) на рубеже XVIII и XIX веков доказал, что буквенное уравнение пятой степени

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

нельзя решить алгебраически; точнее: нельзя выразить его корень через буквенные величины a, b, c, d, e с помощью шести алгебраических действий (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня).

В 1830 году Галуа (Франция) доказал, что никакое общее уравнение, степень которого больше чем 4, нельзя решить алгебраически. Тем не менее всякое уравнение n-й степени имеет n корней. В этом математики были убеждены еще в XVII веке (основываясь на разборе многочисленных частных случаев), но лишь на рубеже XVIII и XIX веков упомянутая теорема была доказана Гауссом.

Галуа Эварист

Итальянский алгебраист Дж. Кардано в 1545 г. предложил ввести числа новой природы. Он показал, что система уравнений

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x \cdot y = 40 \end{cases}$$

Кардано Джераломо

, не имеющая решений во множестве действительных чисел, имеет решения вида $x = 5 + \sqrt{-15}$ $y = 5 - \sqrt{-15}$

, нужно только условиться действовать над такими выражениями по правилам обычной алгебры и считать что $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a} = -a$

Кардано называл такие величины “*чисто отрицательными*” и даже “*софистически отрицательными*”, считал их бесполезными и старался их не употреблять. В самом деле, с помощью таких чисел нельзя выразить ни результат измерения какой-нибудь величины, ни изменение какой-нибудь величины.

В 1572 году вышла книга итальянского алгебраиста Р. Бомбелли, в которой были установлены первые правила арифметических операций над такими числами, вплоть до извлечения из них кубических корней.

Декарт Рене

Название “*мнимые числа*” ввел в 1637 году французский математик и философ Р. Декарт

Леонард Эйлер

В 1777 году один из крупнейших математиков XVIII века - Л. Эйлер предложил использовать первую букву французского слова *imaginaire* (мнимый) для обозначения числа

. Термин “*комплексные числа*” так же был введен Гауссом в 1831 году. Слово комплекс (от латинского *complexus*) означает связь, сочетание, совокупность понятий, предметов, явлений и т. д. Образующих единое целое.

Карл Фридрих Гаусс

Абрахам де Муавр

На рубеже XVII и XVIII веков была построена общая теория корней n-ых степеней сначала из отрицательных, а за тем из любых комплексных чисел, основанная на следующей формуле английского математика А. Муавра (1707):

$$(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)^n = \cos n\cdot\varphi + i\cdot\sin n\cdot\varphi$$

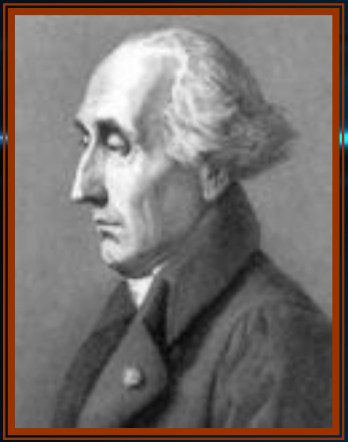
С помощью этой формулы можно было так же вывести формулы для косинусов и синусов кратных дуг.

Л. Эйлер вывел в 1748 году замечательную формулу :

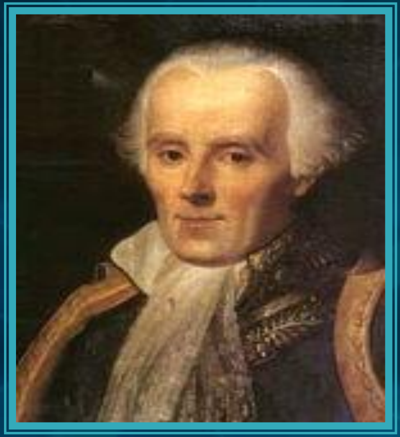
$$e^{i\cdot x} = \cos x + i\cdot\sin x$$

, которая связывала воедино показательную функцию с тригонометрической. С помощью формулы Л. Эйлера можно было возводить число е в любую комплексную степень.

В конце XVIII века французский математик Ж. Лагранж смог сказать, что математический анализ уже не затрудняют мнимые величины. С помощью мнимых чисел научились выражать решения линейных



Лагранж Жозеф Луи



Лаплас

П. Лаплас считал, что результаты, полученные с помощью мнимых чисел, - только наведение, приобретающее характер настоящих истин лишь после подтверждения прямыми доказательствами.

Карно Лазар Никола Маргерит

“Никто ведь не сомневается в точности результатов, получаемых при вычислениях с мнимыми количествами, хотя они представляют собой только алгебраические формы иероглифы нелепых количеств” Л. Карно.

После создания теории комплексных чисел возник вопрос о существовании "гиперкомплексных" чисел - чисел с несколькими "мнимыми" единицами. Такую систему вида $a + bi + cj + dk$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, построил в 1843 году ирландский математик У. Гамильтон, который назвал их "кватернионами". Правила действия над кватернионами напоминает правила обычной алгебры, однако их умножение не обладает свойством коммутативности (переместительности): например, $ij = k$, а $ji = -k$

Гиперкомплексные числа не являются темой моего реферата, поэтому я лишь упоминаю об их существовании.

Большой вклад в развитие теории функций комплексного переменного внесли русские и советские ученые Н. И. Мусхелишвили занимался ее применениями к упругости, М. В. Келдыш и М. А. Лаврентьев - к аэро- и гидродинамике, Н. Н. Богомолов и В. С. Владимиров - к проблемам квантовой теории поля.

Датчанин К. Вессель, француз Ж. Арган и немец К. Гаусс независимо друг от друга предложили изобразить комплексное число $z = a + b \cdot i$ точкой $M(a,b)$

на координатной плоскости. Удобнее изображать число не самой точкой *M*, а вектором $\overline{OM}$, идущим в эту точку из начала координат.

Вектор $\overline{OM}$

При этом $a = r \cdot \cos\varphi$ $b = r \cdot \sin\varphi$ и число z принимает вид

$z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$

, который называется тригонометрической формой комплексного числа. Число r называют модулем комплексного числа z и обозначают $|z|$. Число φ

называют аргументом z и обозначают ArgZ. Заметим, что если $z = 0$

, значение ArgZ не определено, а при $z \neq 0$ оно определено с точностью до

кратного 2π. Упомянутая ранее формула Эйлера позволяет записать число z в виде $z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$