

Комплексные числа

доклад

Содержание

№ стр.

1. Определение z 3
2. Стандартная модель 4
3. Матричная модель 6
4. Арифметические действия 7
5. Геометрическая модель 9
6. Модуль и аргумент 11
7. Множество комплексных чисел
с арифметическими действиями 13
8. Сопряжённые числа 14
9. Показательная форма 18
10. Формула Муавра 19
11. Извлечение корней из комплексного числа 20

Определение

Комплексные числа представляются в виде выражения:

$$z = x + iy,$$

где x, y – вещественные числа;

x – действительная часть числа z (Re_z);

y – мнимая часть числа z (Im_z);

i – мнимое число (величина, для которой выполняется равенство $i^2 = -1$).

Стандартная модель

Комплексное число z можно определить как упорядоченную пару вещественных чисел; запись $z = x + iy$ следует понимать как удобный способ записи такой пары.

Введём операции сложения и умножения таких пар следующим образом:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y');$$
$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx').$$

Стандартная модель

Вещественные числа являются в этой модели подмножеством множества комплексных чисел и представлены парами вида $(x, 0)$, причём операции с такими парами согласованы с обычными сложением и умножением вещественных чисел:

Ноль представляется парой $0 = (0, 0)$;

Единица - $-1 = (-1, 0)$.

Матричная модель

Комплексные числа можно также определить как:

- подкольцо кольца вещественных матриц 2×2 вида

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$$

- с обычным матричным сложением и умножением. Действительной единице будет соответствовать

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- мнимой единице —

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Арифметические действия

- Сравнение

$x + iy = a + ib$ равны тогда и только тогда, когда
 $x = a, y = b;$

- Сложение

$$(x + iy) + (a + ib) = (x + a) + (y + b)i;$$

- Вычитание

$$(x + iy) - (a + ib) = (x - a) + (y - b)i;$$

Арифметические действия

- Умножение

$$(x + iy) \cdot (a + ib) = xa + xib + aiy + bi^2y \\ = (xa - yb) + (ya + xb)i;$$

- Деление

$$\frac{x + iy}{a + ib} = \frac{(x + iy)(a - ib)}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{xa + yb}{a^2 + b^2} + \left(\frac{ya - xb}{a^2 + b^2}\right)i;$$

- В частности

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i.$$

Геометрическая модель

Любое комплексное число (кроме нуля) можно записать в тригонометрической форме:

$$z = |z| \cdot (\cos\phi + i \cdot \sin\phi),$$

где $|z|$ - модуль комплексного числа;

ϕ - аргумент комплексного числа.

Модулем комплексного числа называется расстояние от начала координат до соответствующей точки комплексной плоскости.

Геометрическая модель

Модуль можно представить диагональю $|z|$, проложенной к точке z прямоугольника $obza$ (рис. 1).

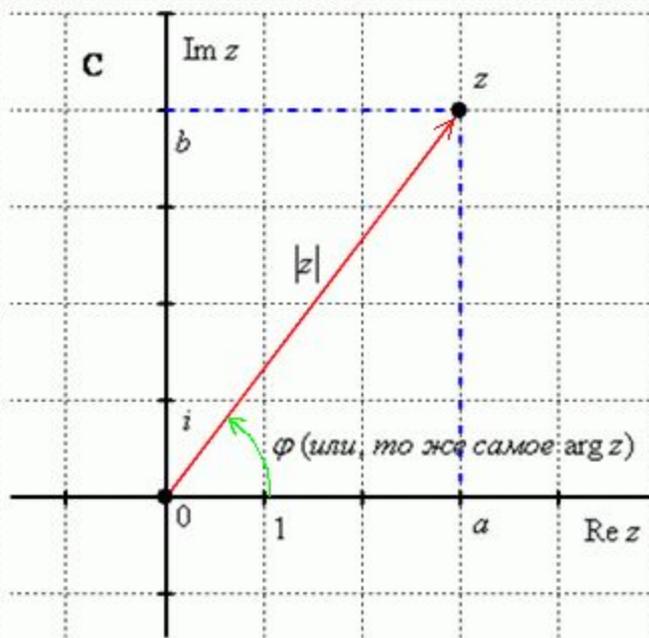


рис. 1

Геометрическое представление
комплексного числа

Модуль и аргумент

По теореме Пифагора легко вывести формулу для нахождения модуля комплексного числа:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Угол φ между положительной полуосью действительной оси Re_z и радиус-вектором $|z|$, проведённым из начала координат к соответствующей точке, является аргументом комплексного числа z .

Аргумент не определён для единственного числа:
 $z = 0$.

Модуль и аргумент

- Из этого определения следует, что:

- $\operatorname{tg}_\varphi = \frac{b}{a};$

- $\cos_\varphi = \frac{a}{|z|};$

- $\sin_\varphi = \frac{b}{|z|}.$

- Если $a = 0$, то z является мнимым числом;
- Если $b = 0$, то z является действительным числом.

Множество комплексных чисел с арифметическими действиями

Множество всех комплексных чисел с арифметическими операциями является полем и обычно обозначается символом \mathbb{C} .

Для любых $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ имеют место следующие свойства модуля:

- $|z| \geq 0$;
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;
- $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

Сопряжённые числа

Если комплексное число $z = x + iy$, то $\bar{z} = x - iy$ является сопряжённым к z .

На комплексной плоскости сопряжённые числа получают зеркальным отражением друг друга относительно вещественной оси (рис. 2). Модуль сопряжённого числа такой же, как у исходного, а их аргументы отличаются знаком.

Сопряжённые числа

Переход к сопряжённому числу можно рассматривать как одноместную операцию:

$\bar{z} = z$ (сопряжённое к сопряжённому есть исходное).

Произведение и сумма комплексно-сопряженных чисел есть действительное число:

$$\bar{z} \cdot z = |z|^2;$$

$$\bar{z} + z = 2\operatorname{Re}_z.$$

Другие соотношения:

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2;$$

$$\frac{\bar{z}_1}{z_2} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

Сопряжённые числа

Умножение числителя и знаменателя комплексной дроби при комплексном знаменателе на сопряжённое к знаменателю выражению используется для устранения комплексности знаменателя, что позволяет выразить выражение в канонической форме комплексного числа или функции.

$$|\bar{z}| = |z|$$

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}; \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Сопряжённые числа

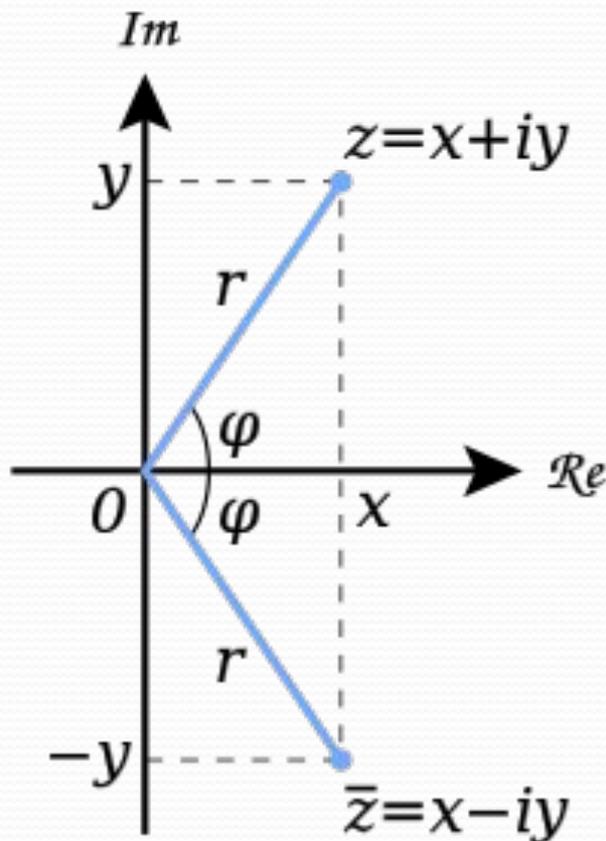


Рис. 2

Геометрическое представление сопряжённых чисел
где r – модуль числа z , второе обозначение $|z|$

Показательная форма

Применяя к тригонометрической форме комплексного числа $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ формулу Эйлера, получим показательную форму:

$$z = |z|e^{i\varphi},$$

где $e^{i\varphi}$ - расширение экспоненты для случая комплексного показателя степени.

Отсюда вытекают следующие широко используемые равенства:

$$\cos \varphi = \frac{(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})}{2}; \quad \sin \varphi = \frac{(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})}{2i}$$

Формула Муавра

Формула Муавра помогает возводить в целую степень ненулевое комплексное число, представленное в тригонометрической форме.

$$z^n = [r (\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

где r — модуль;

φ — аргумент комплексного числа.

В современной символике она опубликована Эйлером в 1722 году. Приведенная формула справедлива при любом целом n , необязательно положительном.

Извлечение корней из комплексных чисел

Аналогичная формула применима также и при вычислении корней n -ой степени из ненулевого комплексного числа:

$$z^{1/n} = [r(\cos(\varphi + 2\pi k) + i \sin(\varphi + 2\pi k))]^{1/n} = r^{1/n} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$$

где $n > 1$ и $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

Отметим, что корни n -й степени из ненулевого комплексного числа всегда существуют и их количество равно n . На комплексной плоскости, как видно из формулы, все эти корни являются вершинами правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат (рис. 3).

Извлечение корней из комплексного числа

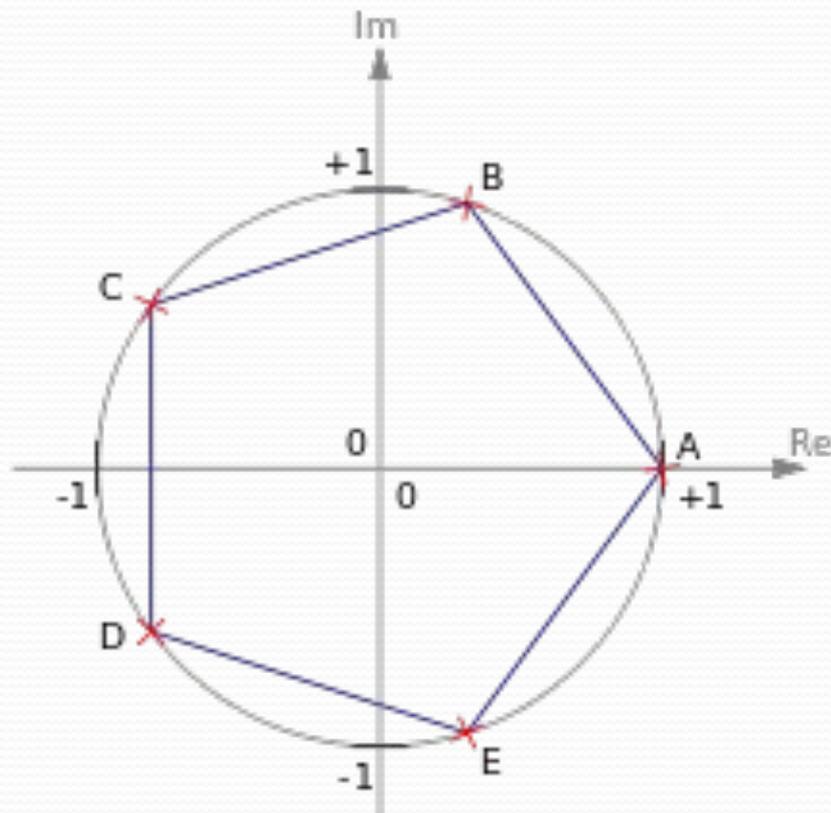


Рис. 3

Корни пятой степени из единицы
(вершины пятиугольника)