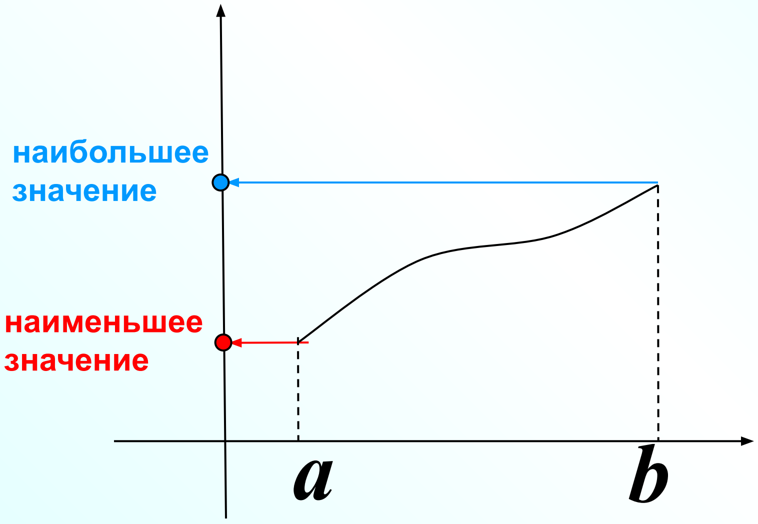
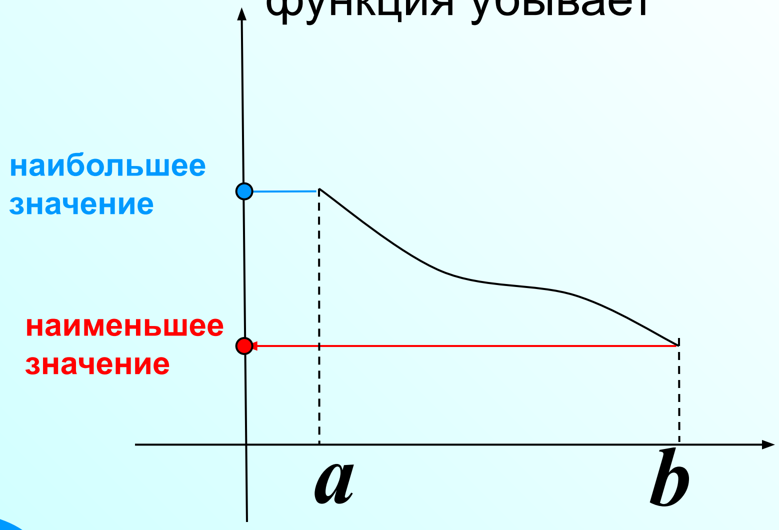
Методическая разработка Савченко Е.М.
МОУ гимназия №1, г. Полярные Зори, Мурманской обл.

Наибольшее и наименьшее значение функции

Открытый банк заданий по математике http://mathege.ru:8080/or/ege/Main.action функция возрастает



функция убывает



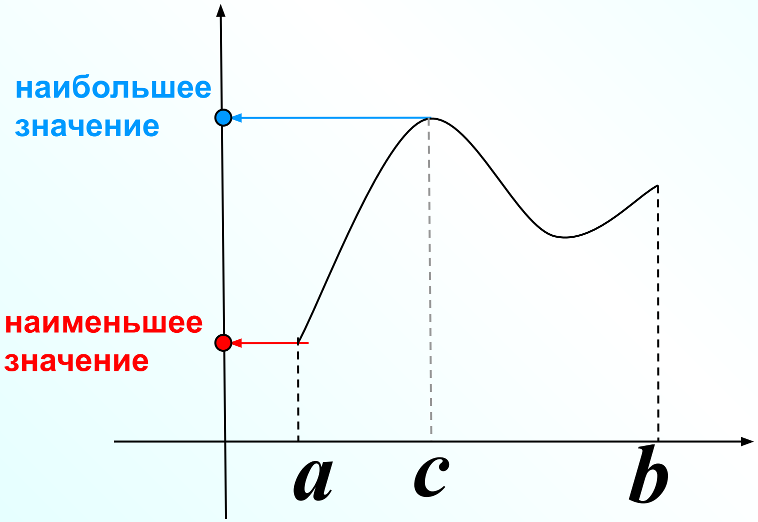
Предположим, что функция f не имеет на отрезке [a; b] критических точек.

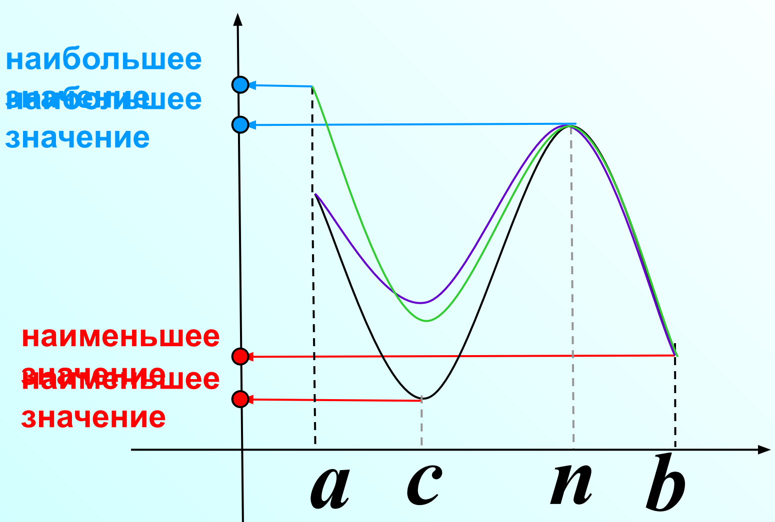
Тогда она возрастает (рис. 1) или убывает (рис. 2) на этом отрезке.

Значит,

наибольшее и наименьшее значения функции f на отрезке [a; b] — это значения в концах a и b.

Примеры





Пусть теперь функция f имеет на отрезке [a; b] конечное число критических точек.

Наибольшее и наименьшее значения функция f может принимать в критических точках функции или в точках a и b.

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции, имеющей на отрезке конечное число критических точек, нужно вычислить значения функции во всех критических точках и на концах отрезка, а затем из полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее.

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на [a;b]

1. Найти критические точки функции на интервале (a; b);
2. Вычислить значения функции в найденных критических точках и на концах отрезка, т. е. в точках $x = a$ и $x = b$,
3. Среди всех вычисленных значениях функции выбрать наибольшее и наименьшее

Наибольшее значение

Наименьшее значение

$$\max_{[a;b]} f(x)$$

$$\min_{[a;b]} f(x)$$

Задача:

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=\frac{x^3}{3}+x^2-3x-2$$ на отрезке $[-2;2]$.

Решение.

1. $D(f)=R$, значит функция непрерывна на рассматриваем отрезке.
2. Найдем критические точки функции: $f'(x)=x^2+2x-3$

   $f'(x)=0$, если $x^2+2x-3=0$, отсюда $x=-3$ или $x=1$.

   $x=-3$ не лежит на рассматриваем отрезке.
3. Найдем значения функции на концах отрезка и в критической точке, лежащей на этом отрезке.

$$f(-2)=\frac{(-2)^3}{3}+(-2)^2-3\cdot(-2)-2=-\frac{8}{3}+4+6-2=8-2\frac{2}{3}=5\frac{1}{3};$$

$$f(1)=\frac{1^3}{3}+1^2-3\cdot1-2=\frac{1}{3}-4=-3\frac{2}{3};$$

$$f(2)=\frac{2^3}{3}+2^2-3\cdot2-2=2\frac{3}{3}-4=1\frac{1}{3}$$

4. Выберем из полученных значений наибольшее и наименьшее:

$$\max_{[-2;2]} f(x)=f(-2)=5\frac{1}{3} \quad \text{и} \quad \min_{[-2;2]} f(x)=f(1)=-3\frac{2}{3}$$

Ответ: $5\frac{1}{3}$ - наибольшее, а $-3\frac{2}{3}$ - наименьшее значения функции на отрезке [-2;2].

Выполнение этапов решения можно изменить, как вам удобно.

Этапы	Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 27x$ на отрезке [0; 4]
1. Найти $f'(x)$	1) $y' = 3x^2 - 27$
2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.	2) $y' = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9) = 3(\overset{3}{x - 3})(\overset{-3}{x + 3})$ $x = 3 \in [0; 4]$ $x = -3 \notin [0; 4]$
3. Вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка.	3) $y(0) = 0$ $y(4) = 4^3 - 27 \cdot 4 = -44$ $y(3) = 3^3 - 27 \cdot 3 = -54$
4. Из вычисленных значений выбрать наименьшее или наибольшее	В 11	-	5	4