

***ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТИ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
СТАТИСТИКА***

Лекция 2.

Основные изучаемые вопросы:

- **Классическое определение вероятности.**
- **Геометрическое определение вероятности.**
- **Статистическое определение вероятности.**
- **Теоремы сложения и умножения вероятностей.**

Классическое определение вероятности

- Вероятность события - это численная мера объективной возможности его появления.
- В соответствии с классическим определением, *вероятность $P(A)$ события A равняется отношению числа случаев M , благоприятствующих событию A , к общему числу всех возможных исходов испытания N :*

$$P(A) = \frac{M}{N}.$$

При этом полагают, что:

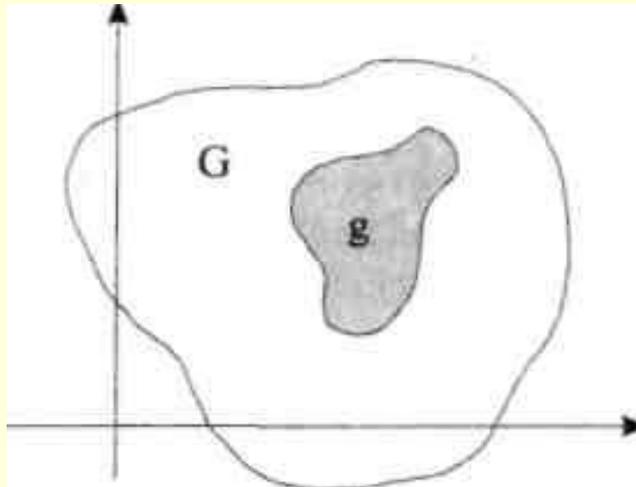
- испытание содержит конечное число исходов, то есть $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ – полная группа событий;
- все исходы испытания равновозможны и несовместны: говорят: «взяты наугад», «наудачу» и т.п.

Примеры

- В урне находятся 10 шаров белого цвета и 5 шаров красного цвета. Пусть событие A_1 состоит в извлечении из урны белого шара, а событие A_2 – в извлечении красного шара.
- Тогда
$$P(A_1) = 10/(10 + 5) = 2/3,$$
$$P(A_2) = 5/(10 + 5) = 1/3.$$
- Событие A_1 состоит в выпадении на игральном кубике 6 очков, событие A_2 – в выпадении 4 или 5 очков, а событие A_3 – в выпадении 1, 2 или 3 очков. Всего исходов 6. Исходов, благоприятных событию A_1 – 1, событию A_2 – 2, событию A_3 – 3. тогда
$$P(A_1) = 1/6,$$
$$P(A_2) = 2/6 = 1/3,$$
$$P(A_3) = 3/6 = 1/2.$$

Геометрическое определение вероятности

- Классическое определение вероятности основывается на том, что число всех возможных случаев конечно.
- Если распределение возможных исходов испытания непрерывно и бесконечно, то при решении задач используется понятие геометрической вероятности - *вероятности попадания точки в область* (отрезок, часть плоскости, часть объема и т. д.).



Геометрической вероятностью события A называется отношение меры области g ($mes(g)$), благоприятствующей событию A , к мере всей области G ($mes(G)$):

$$P(g) = \frac{mes(g)}{mes(G)}.$$

Область, на которую распространяется геометрическая вероятность, может быть:

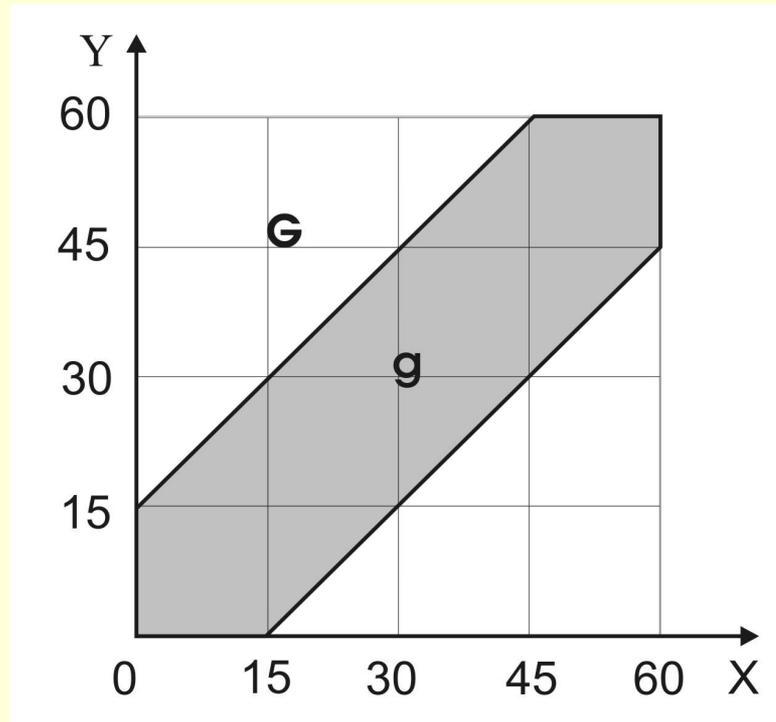
- одномерной (кривая, отрезок), тогда ее мерой является длина;
- двумерной (геометрическая фигура на плоскости), мерой ее является площадь;
- трехмерной (тело в пространстве), мерой ее является объем;
- n -мерной в общем случае.

Пример. Два друга договорились встретиться в определенном месте между 16.00 и 17.00. Пришедший первым ждет другого в течение 15 минут, после чего уходит. Какова вероятность их встречи, если приход каждого из друзей в течение указанного времени случаен и моменты прихода независимы?

- ***Решение.***

Событие A состоит в том, что встреча друзей состоялась.

- Обозначим x и y - моменты прихода двух друзей, которые меняются в интервале от 0 до 60 минут. Все такие пары (x, y) представляют собой все возможные моменты приходов двух друзей. Для того чтобы встреча состоялась необходимо, чтобы $x - y < 15$ или $y - x < 15$, т. е. $|x - y| < 15$. При графическом изображении (x, y) в двумерной системе координат область G - всех возможных исходов представляет собой квадрат со сторонами 60, а область g (исходов, благоприятствующих событию g), представляет собой выделенную область.



- Вероятность события A , согласно геометрическому определению вероятности, равна отношению площади выделенной фигуры g к площади квадрата G :

$$P(A) = \frac{\text{mes}(g)}{\text{mes}(G)} = \frac{60^2 - 45^2}{60^2} = \frac{7}{16}.$$

Статистическое определение вероятности

- **Статистическая вероятность определяется из опыта наблюдения результатов испытания.** С этой целью проводится в неизменных условиях большое число n независимых друг от друга одинаковых испытаний, в каждом из которых некоторое событие A может появиться или не появиться, и фиксируется число появлений события A , обозначаемое через m_A .
- По данным наблюдений рассчитывают отношение $w_A = \frac{m_A}{n}$ называемое **частотью (относительной частотой, выборочной долей)** события A .
- **Статистической вероятностью** события A называется предел частоты (относительной частоты) m_A / n появления этого события в n произведенных испытаниях при стремлении n к бесконечности:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} w_A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_A}{n}.$$

- При конечном значении n , меньшем бесконечности, частость в результате проведения опыта может, разумеется, несколько отличаться от вероятности.
- Например, при проведении серий из 1000 опытов с подбрасыванием монеты Яков Бернулли лишь несколько раз получил значение частоты выпадения «орла», в точности равным 0,5; в большинстве же случаев частость отличалась от «теоретического» значения на 1-2 %.
- Общее правило при этом таково: *с увеличением числа опытов среднее значение частоты стремится к значению «классической» вероятности события.*
- Классическая вероятность априорна (ее получают, не производя опытов, на основе рассуждений), а статистическая вероятность апостериорна (ее получают после проведения серии или нескольких серий опытов).

- **Пример.** На 1000 заключенных договоров определенного типа страховщик зафиксировал к концу года 15 произошедших страховых случаев. Следовательно, в дальнейшем он может считать вероятность наступления страхового случая в такого типа договорах, приблизительно равной:

$$P(A) = w_A = \frac{m_A}{n} = \frac{15}{1000} = 0,015.$$

- Заметим, что рассматриваемый статистический подход к определению неизвестной вероятности события дает **оценку вероятности**, понятие которой уточняется в математической статистике.
- К статистическому определению вероятности приходится часто обращаться на практике, когда **исходы случайного эксперимента** уточнены досконально и, если даже они известны в конечном числе, то их никак **нельзя считать равновероятными до опыта**.

Теоремы сложения и умножения вероятностей

- Для использования теорем сложения вероятностей **необходимо установить совместность - несовместность событий**, т. е. могут ли они происходить одновременно.

Теорема сложения для двух несовместных событий

- Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Теорема сложения для n несовместных событий

- Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A_1 + A_2 + A_3 \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \dots + P(A_n).$$

Рассмотрим важные следствия из теоремы сложения для несовместных случайных событий.

Следствие 1.

- Сумма вероятностей событий H_1, H_2, \dots, H_n , образующих полную группу несовместных событий, равна 1.

$$P(H_1) + P(H_2) + \dots + P(H_n) = 1.$$

Следствие 2.

- Сумма вероятностей противоположных событий равна 1.

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Теорема сложения для двух совместных событий

- Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

Теорема сложения для трех совместных событий

- Вероятность суммы трех совместных событий равна:

$$P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cdot B)-P(B\cdot C)-P(A\cdot C)+P(A\cdot B\cdot C).$$

Пример. Сеть закусочных, торгующих хотдогами и гамбургерами, установила, что 75 % всех посетителей используют горчицу, 80 % - кетчуп, а 65 % - и то, и другое.

а) Какова вероятность, что случайно взятый клиент будет использовать хотя бы одну из этих приправ?

б) Какова вероятность, что он будет использовать только кетчуп?

- **Решение.**

Обозначим случайные события:

A - случайно выбранный посетитель использует горчицу;

B - случайно выбранный посетитель использует кетчуп.

Тогда $P(A) = 0,75$; $P(B) = 0,8$; $P(A\cdot B) = 0,65$.

В соответствии с формулой для двух совместных событий
 $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = 0,75 + 0,8 - 0,65 = 0,9$.

Итак, вероятность того, что посетитель воспользуется хотя бы одной из двух специй

$$P(A + B) = 0,9.$$

Вероятность события, заключающегося в том, что посетитель воспользуется только кетчупом, можно определить двумя способами:

- вычесть из вероятности использования хотя бы одной из специй вероятность использования горчицы:

$$P(A + B) - P(A) = 0,9 - 0,75 = 0,15;$$

- вычесть из вероятности использования посетителем кетчупа вероятность использования одновременно обеих специй:

$$P(B) - P(A \cdot B) = 0,8 - 0,65 = 0,15.$$

Теоремы умножения вероятностей

- Если при использовании теорем сложения вероятностей проверяется совместность/несовместность событий, то применение теорем умножения требует проверки случайных событий на зависимость/независимость.
- События A и B называются зависимыми, если вероятность одного из них зависит от наступления или не наступления другого. Иначе случайные события называются независимыми.
- **Пример.** При подбрасывании двух монет событие A - появление герба на первой монете и событие B - появление герба на 2-й монете - есть события независимые друг от друга, так как вероятность их наступления не зависит от появления или не появления другого события.
- При подбрасывании одной и той же монеты несколько раз появление герба каждый раз не зависит от того, появился ли герб предыдущий раз, и соответствующие события также будут независимыми.

- **Пример.** При извлечении без возвращения одного за другим двух шаров из урны с черными и белыми шарами событие A - появление первого белого шара и событие B - извлечение после этого второго белого шара - являются зависимыми, так как вероятность события B зависит от того, произошло или нет событие A , изменяющее количество и состав шаров в урне.
- **Несовместные события зависимы**, так как появление любого из них обращает в нуль вероятности появления всех остальных.
- В случае зависимых событий **вводится понятие условной вероятности**.
- **Условной вероятностью $P(A/B)$** события A называется его вероятность, вычисленная при условии, что событие B произошло. Аналогично, через $P(B/A)$ обозначается условная вероятность события B при условии, что A наступило.
- Для независимых событий по определению

$$P(A/B)=P(A); P(B/A) = P(B).$$

Пример. Из полной колоды карт (52 шт.) случайным образом извлекается одна карта. Определим случайные события:

- A - появление дамы,
- B - появление карты черной масти,
- C - появление пиковой дамы.

Определить зависимость/независимость следующих пар событий:

1) A и B ; 2) A и C , 3) B и C .

• ***Решение.***

1) A и B - независимы, при этом $P(A) = 1/13$, $P(B) = 1/4$.

2) A и C – зависимы, при этом $P(A/C) = 1$, $P(C/A) = 1/4$.

3) B и C – зависимы, при этом $P(B/C) = 1$, $P(C/B) = 1/26$.

Теорема умножения для зависимых событий

- **Вероятность произведения зависимых событий** равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, при условии, первое произошло.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B).$$

Следствие 1.

- **Вероятность произведения независимых событий** равна произведению их вероятностей.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Следствие 2.

- **Для n независимых испытаний**, в каждом из которых случайное событие A может появиться с вероятностью $P(A) = p$, вероятность появления A хотя бы один раз равна:

$$P(B) = 1 - (1 - p)^n.$$

Пример. В коробке имеется 5 новых и 7 использованных батареек. Случайным образом из коробки извлекают две батарейки. Какова вероятность, что обе батарейки окажутся новыми, если осуществляется выбор:

- а) без возвращения - батарейки не возвращаются обратно;
- б) с возвращением - батарейки после извлечения возвращаются обратно в коробку.

Решение.

- Обозначим события:
- A_1 - первая извлеченная батарейка - новая;
- A_2 - вторая извлеченная батарейка - новая;
- A - обе извлеченные батарейки - новые.
- Очевидно, что событие A является произведением A_1 и A_2 , так как оба эти события должны наступить для того, чтобы произошло событие A , т. е. $A = A_1 \cdot A_2$.

- а). Так как выбор осуществляется без возвращения, то события A_1 и A_2 - зависимые. Вероятность события A_2 зависит от того, произошло или не произошло до этого событие A_1 .
- Вероятность того, что первая извлеченная батарейка будет новой, равна $P(A_1) = 5/12$.
- После этого в коробке останется 11 батареек, из них 4 новые. Таким образом, условная вероятность события A_2 , при условии что перед ним произошло событие A_1 равна $P(A_2/A_1) = 4/11$.
- По теореме умножения для зависимых событий вероятность искомого события A :

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) = 5/12 \cdot 4/11 = 5/33.$$

- б). Так как выбор осуществляется с возвращением, то состав коробки не изменяется, следовательно, события A_1 и A_2 - независимые, так как вероятность события A_2 не зависит от того, произошло или не произошло до этого событие A_1 .
- Вероятность того, что первая и вторая извлеченные батарейки будут новыми равна

$$P(A_1) = P(A_2) = 5/12.$$

- По теореме умножения для независимых событий, вероятность искомого события A :

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = (5/12)^2 = 25/144.$$

Примеры для обсуждения

- По какой формуле вычисляют вероятность совместного появления двух зависимых событий?
 - а) $P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$;
 - б) $P(A) + P(B)$;
 - в) $P(A) \cdot P(B/A)$;
 - г) $P(A) \cdot P(B)$.
- По какой формуле можно определить вероятность появления одного из двух несовместных событий
 - а) $P(A) \cdot P(B)$;
 - б) $P(A) + P(B)$;
 - в) $P(A) \cdot P(B/A)$;
 - г) $P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$.

- Известны вероятности событий А, В и С. Какие из формул соответствуют событию, состоящему в том, что выполнятся все события А, В и С?

а) $1 - P(A \cdot B \cdot C)$;

б) $P(A + B + C)$;

в) $1 - P(A \cdot B \cdot C)$;

г) $P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$.

- Известны вероятности событий А, В и С. Какая из формул соответствует событию, состоящему в том, что выполнится хотя бы одно из событий А, В и С?

а) $1 - P(A \cdot B \cdot C)$;

б) $1 - P(A + B + C)$;

в) $1 - P(A \cdot B \cdot C) = P(A \cdot B \cdot C) - P(A \cdot B \cdot C)$;

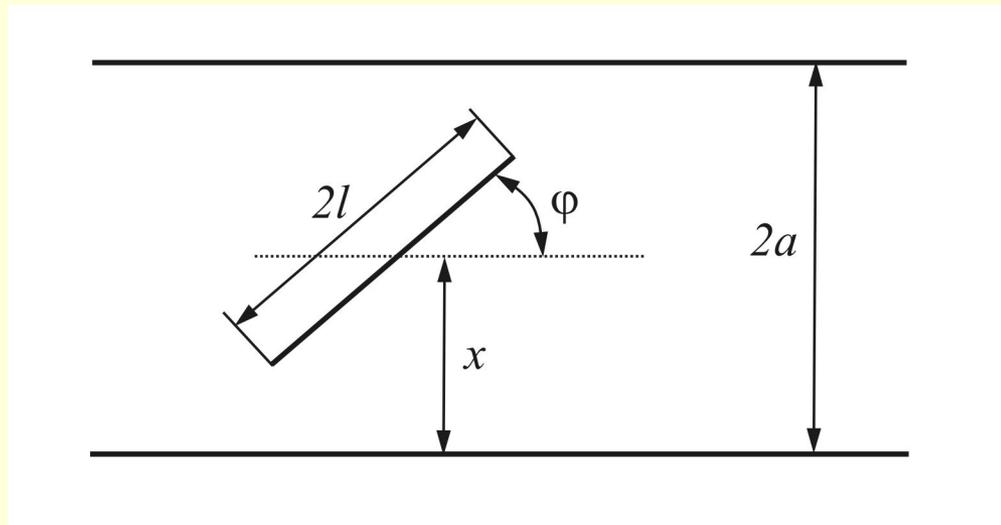
г) $P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) + P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$.

- **Задача Бюффона**

- На плоскости проведены две параллельные прямые на расстоянии $2a$ друг от друга. На плоскость наудачу брошена игла длиной $2l < 2a$. Какова вероятность того, что игла пересечет одну из прямых?

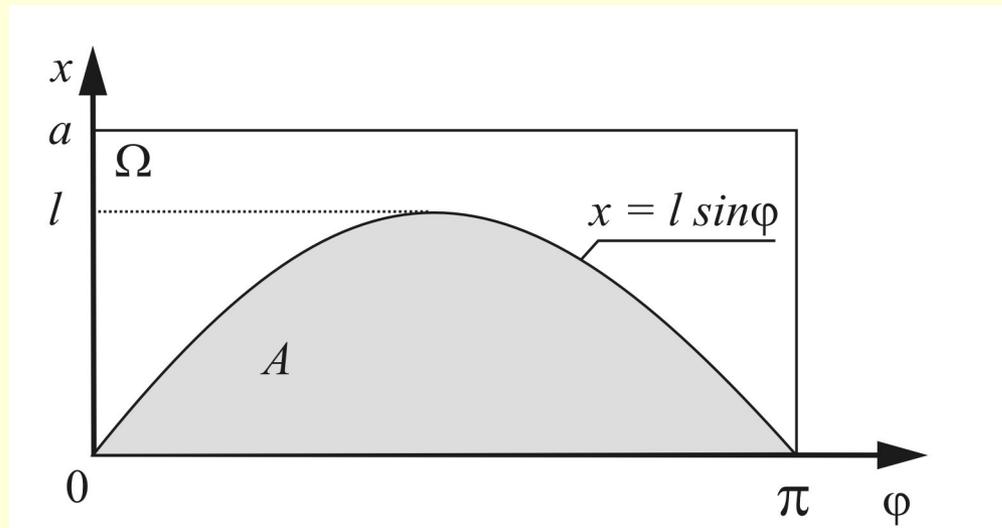
- Решение

- Возможные положения иглы (длины отрезка $2l$) полностью определяются поперечной координатой центра иглы x и углом поворота ее относительно параллельных прямых ϕ . Эти параметры не зависят друг от друга.



- Координата x может изменяться относительно середины расстояния между прямыми в интервале от 0 до a , а координата ϕ – в интервале от 0 до π .
- Множество возможных положений иглы может быть задано прямоугольником размерами $a \cdot \pi$.
- Благоприятные для пересечения иглой одной из параллельных прямых задаются неравенством

$$x \leq l \sin \phi.$$



- Площадь области $A \in \Omega$, точки которой удовлетворяют неравенству $x \leq l \sin \varphi$, равна интегралу

$$m(A) = \int_0^{\pi} l \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi = -l \cdot \cos \varphi \Big|_0^{\pi} = 2l.$$

- Площадь области Ω равна, как уже упоминалось, $a \cdot \pi$. Тогда вероятность накрытия иглой одной из линий определится как отношение указанных площадей:

$$P(A) = 2l / a\pi.$$