

## Виды критериев прочности материала

- 1) феноменологические (полиномиальный),
- 2) структурно-феноменологические (послойный анализ);
- 3) основанные на гипотезах теорий разрушения (накопления повреждений, распространения трещин).

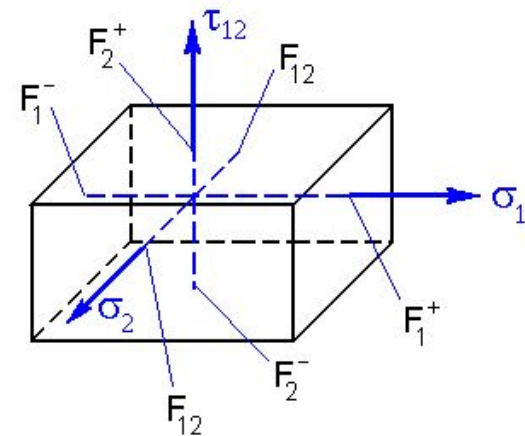
### Наиболее распространенные виды феноменологических критериев для КМ (плоское напряженное состояние)

- критерий максимальных напряжений

$$\sigma_1 = F_1^+, \sigma_1 = F_1^-, \sigma_2 = F_2^+, \sigma_2 = F_2^-, \tau_{12} = F_{12}$$

- тензорно - полиномиальный

$$A_{ij} \sigma_{ij} + A_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + A_{ijklmn} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \sigma_{mn} + \dots = 1$$



## Критерий Цая – Ву (частный случай тензорно-полиномиального критерия квадратичного вида – плоское напряженное состояние)

$$A_{11}\sigma_1^2 + A_{22}\sigma_2^2 + A_{66}\tau_{12}^2 + 2A_{12}\sigma_1\sigma_2 + A_1\sigma_1 + A_2\sigma_2 = 1$$

$$A_1 = \frac{1}{F_1^+} - \frac{1}{F_1^-}, \quad A_2 = \frac{1}{F_2^+} - \frac{1}{F_2^-}, \quad A_{11} = \frac{1}{F_1^+ F_1^-}, \quad A_{22} = \frac{1}{F_2^+ F_2^-}, \quad A_{66} = \frac{1}{F_{12}^2}$$

$$A_{12} = \frac{1 - A_{11}(\sigma_1)^2 - A_{22}(\sigma_2)^2 - A_1\sigma_1 - A_2\sigma_2}{2\sigma_1\sigma_2}$$

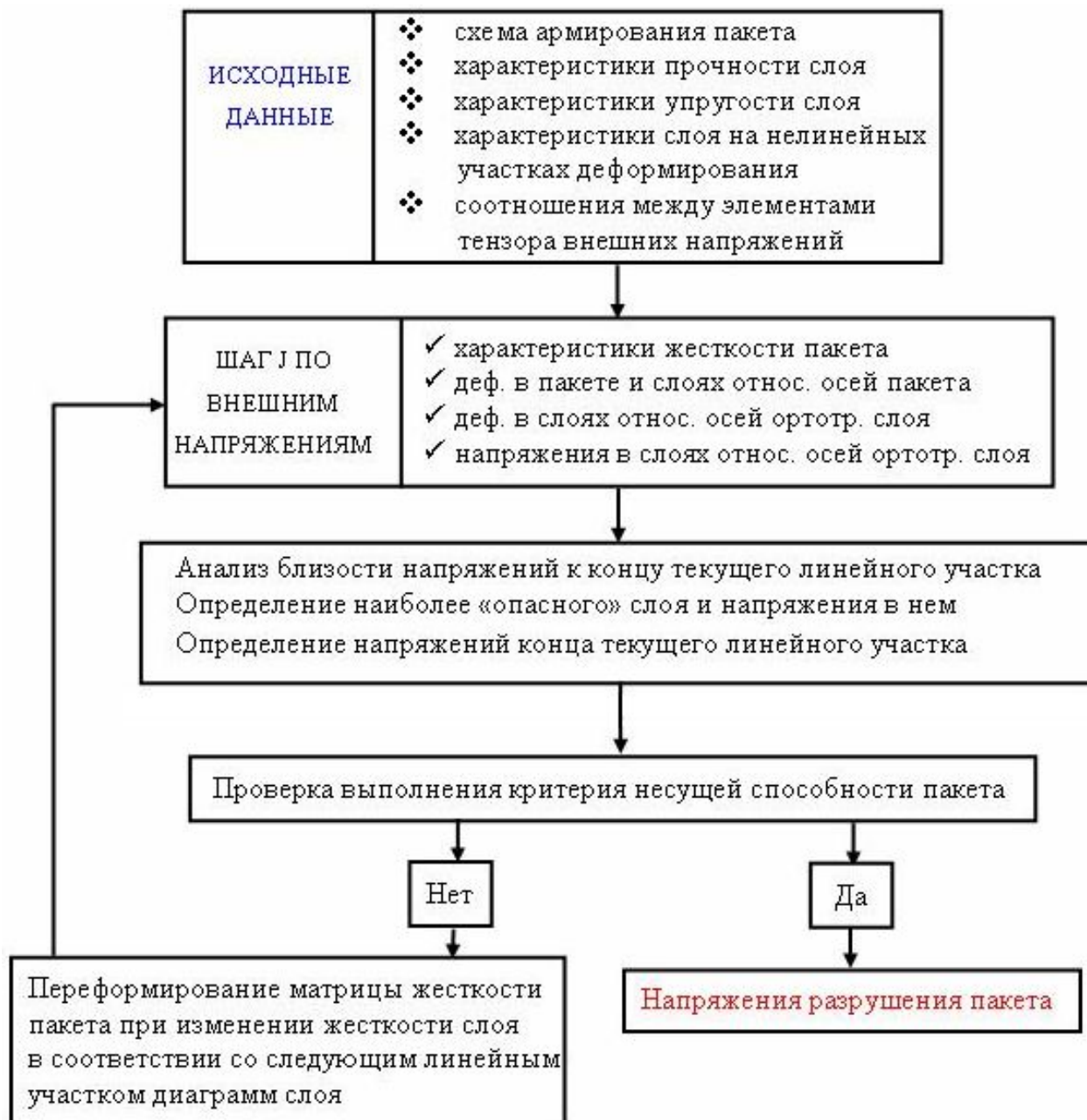
$$A_{12} = f(k, \sigma_1, F_{12}, F_1^+, F_1^-, F_2^+, F_2^-) \quad \begin{matrix} + \\ 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} - \\ 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} k \\ 1-2 \end{matrix}$$

**Любое усложнение выражения предельной поверхности приводит к увеличению минимально необходимых экспериментов по определению характеристик прочности**

# Основные составляющие алгоритма послойного анализа

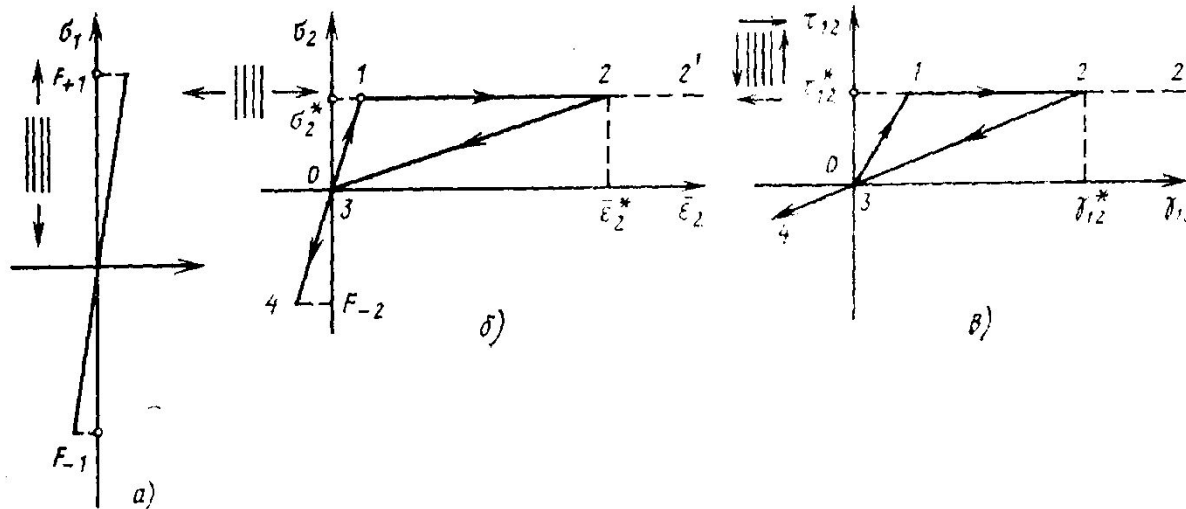
## при кусочно-линейной аппроксимации связей «напряжения – деформации»

3



## Пример структурно-феноменологического критерия: STRAN (плоское напряженно-деформированное состояние)

- Критерий прочности слоя – критерий максимальных напряжений.
- Взаимодействие слоев – отсутствие проскальзывания слоев (постоянство деформаций по толщине пакета).
- Причина нелинейности диаграмм деформирования пакета – нарушение монолитности в части слоев (растрескивание матрицы или границы раздела «волокно-матрица»).
- Изменение жесткости слоя после растрескивания в соответствии с заданным алгоритмом (в зависимости от знака деформаций сдвига и поперек волокон в каждом слое)
- Причина окончательного разрушения:
  - разрушение волокон в одном из слоев;
  - сингулярность матрицы жесткости пакета;
  - предельно допустимое значение деформаций пакета.



# World Wide Failure Exercise on Failure Prediction in composites

## Международный конкурс моделей послойного анализа композитов при плоском напряженном состоянии (1996-2002 годы)

5

### Исходные данные

- характеристики упругости ( $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\mu_{12}$ ,  $G_{12}$ ) и прочности ( $F_{+1}$ ,  $F_{-1}$ ,  $F_{+2}$ ,  $F_{-2}$ ,  $F_{12}$ ) однонаправленного слоя,
- диаграммы деформирования слоя при растяжении и сжатии вдоль и поперек волокон и при сдвиге.

### Рассматриваемые материалы:

- ❖ эпоксидный стеклопластик E-glass/LY556/HT907/DY063,
- ❖ эпоксидный стеклопластик E-glass/MY750/HY917/DY063,
- ❖ эпоксидный углепластик T300/BSL914C,
- ❖ эпоксидный углепластик AS4/3501-6.

Задача - рассчитать диаграммы деформирования и поверхности прочности 14 видов при двухосном и одноосном плоском напряженном состоянии для структур с симметричной относительно срединной плоскости укладкой слоев:

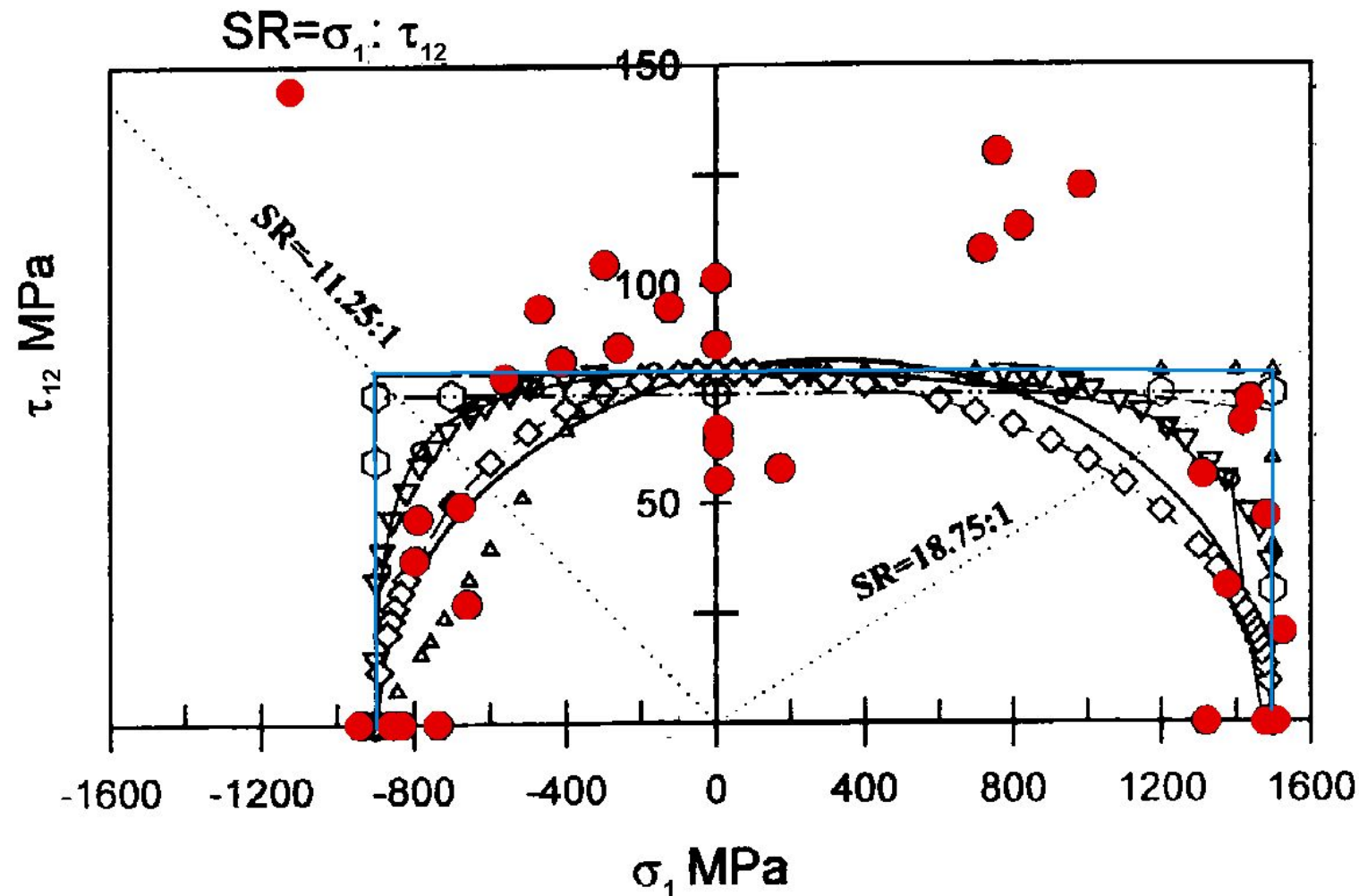
- $(90^\circ/\pm 30^\circ/90^\circ)_S$ ,
- $(0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ)_S$ ,
- $(0^\circ/90^\circ)_S$ ,
- $\pm 55^\circ$ ,
- $\pm 45^\circ$ .

**Участники – 18 групп авторов, представивших 20 моделей многослойного материала.**

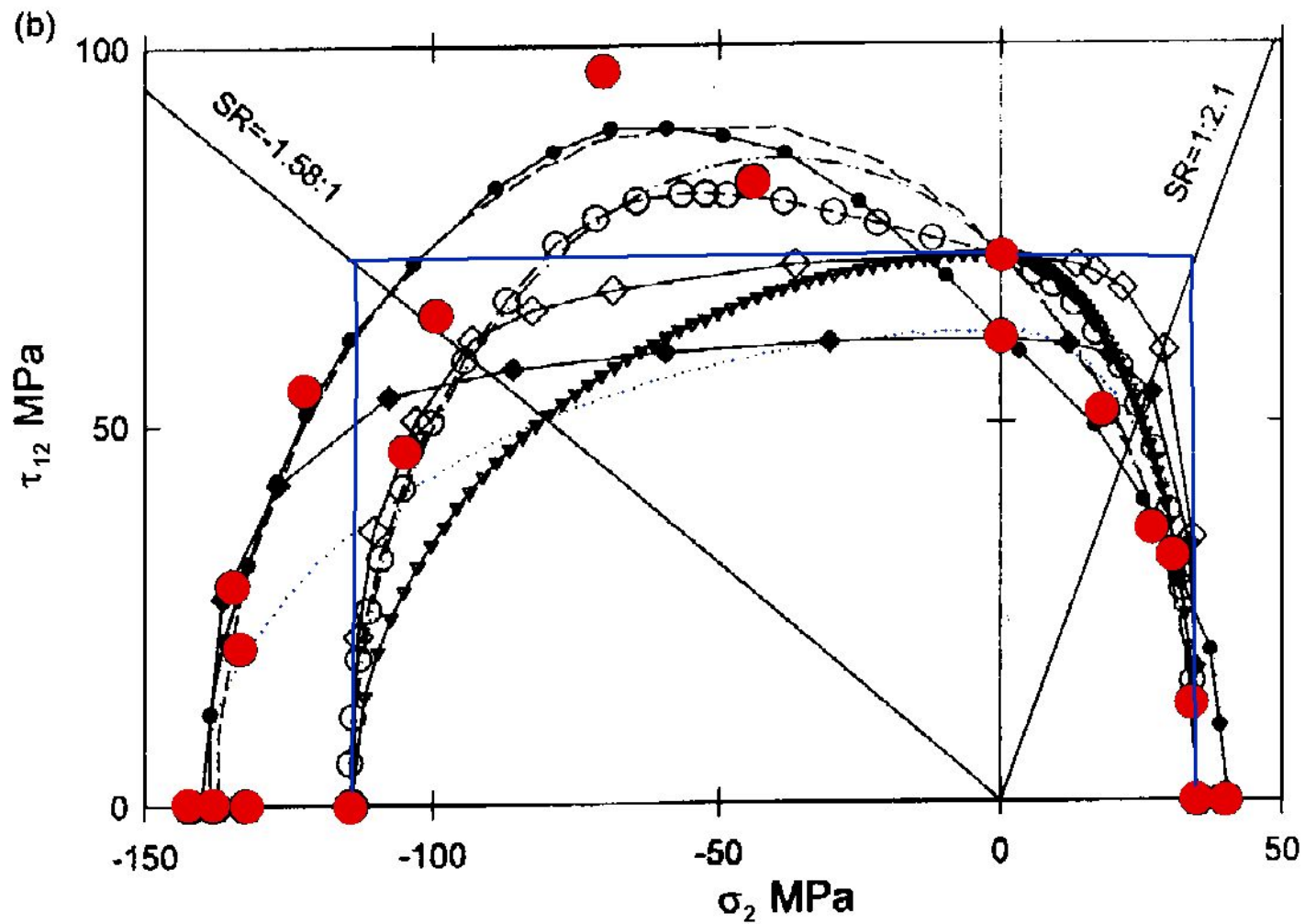
**Критерии сравнения моделей – степень соответствия расчетов и экспериментов**

**(результаты экспериментов были неизвестны авторам во время проведения расчетов)**

# Некоторые результаты сравнения разных моделей послойного анализа в рамках конкурса

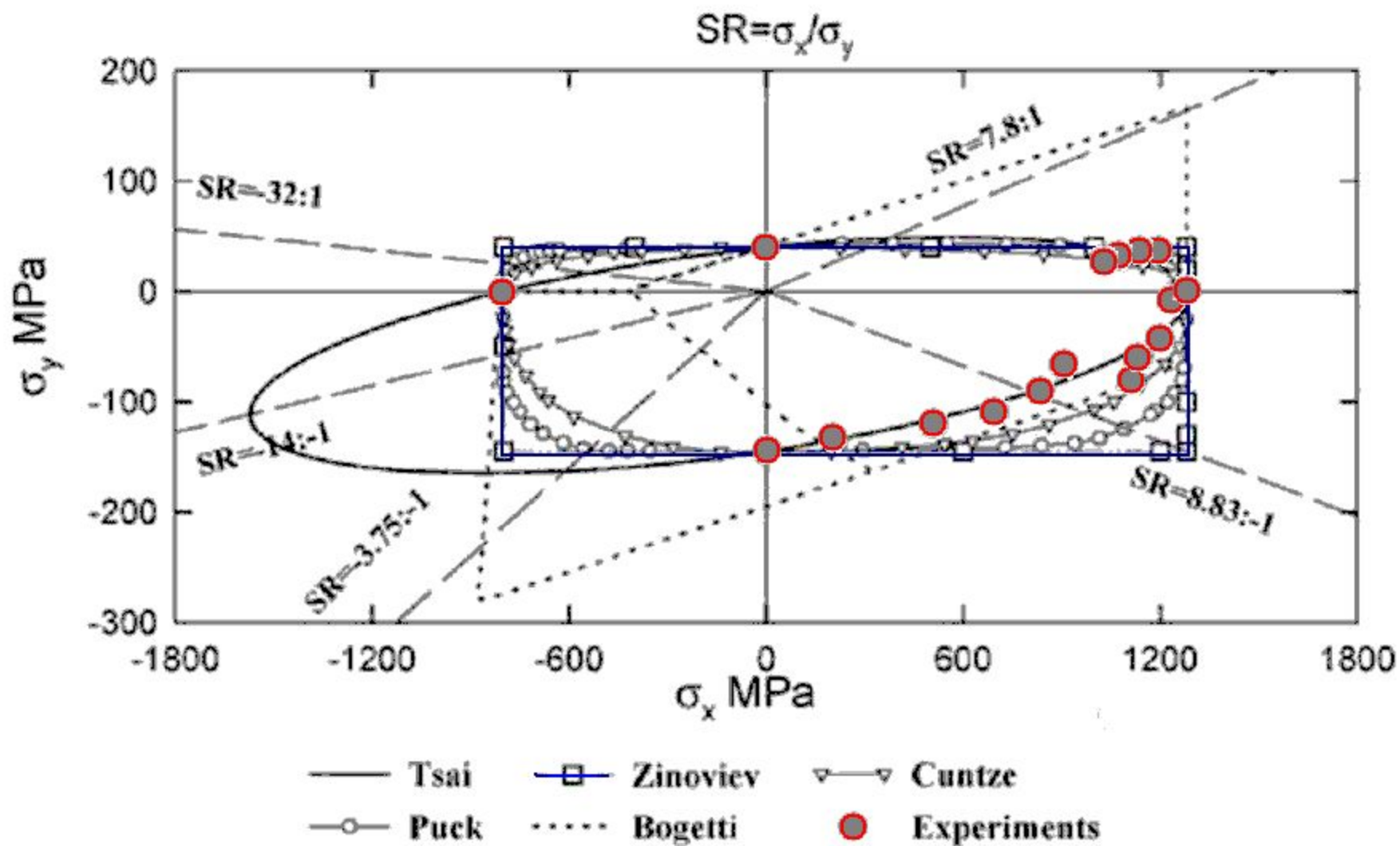


Поверхность разрушения однонаправленного углепластика (красные точки – эксперимент, остальное - разные варианты критериев прочности, синие линии - STRAN )



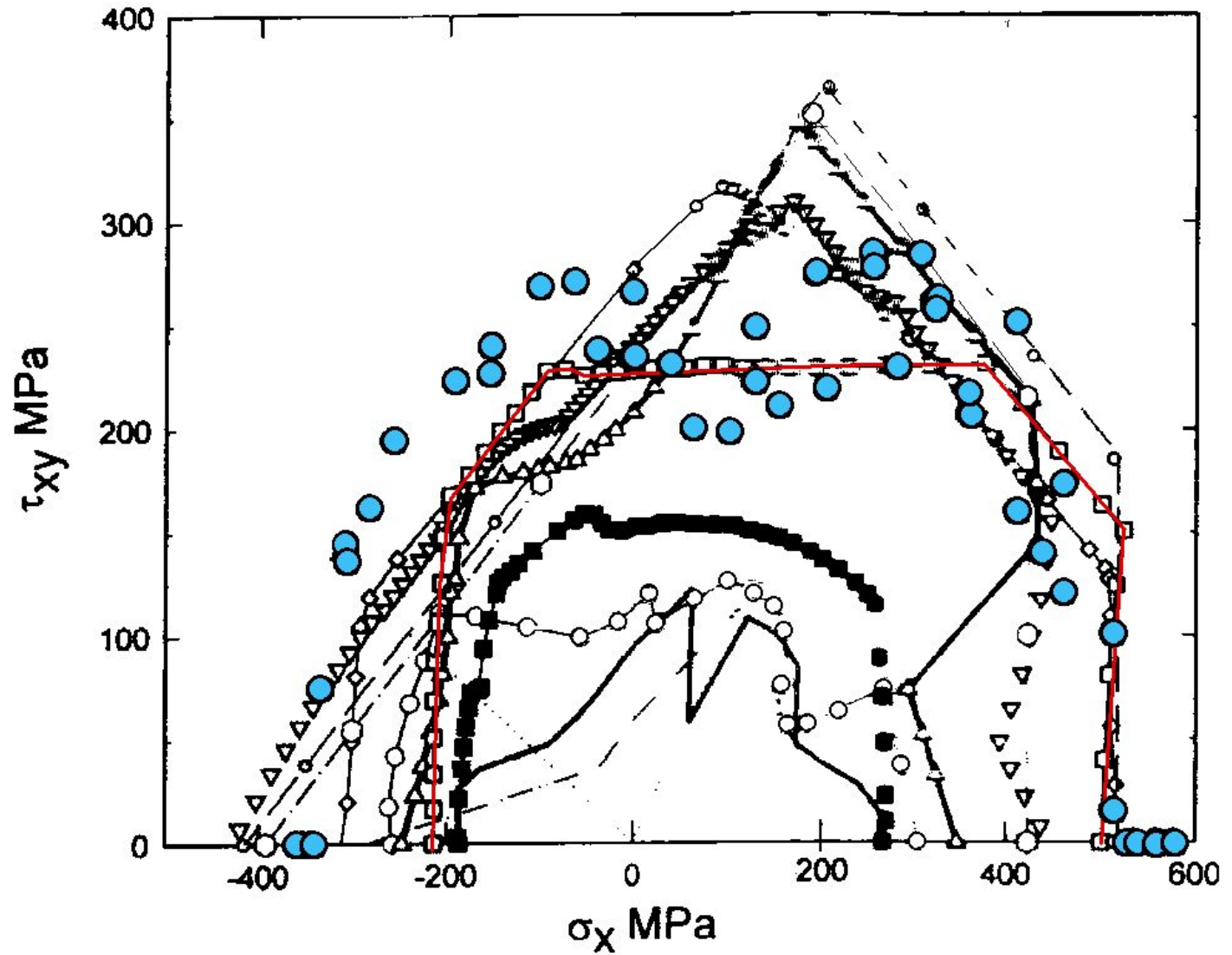
Поверхность разрушения однонаправленного стеклопластика (красные точки – эксперимент, остальное – разные варианты критериев прочности, синие линии - STRAN )



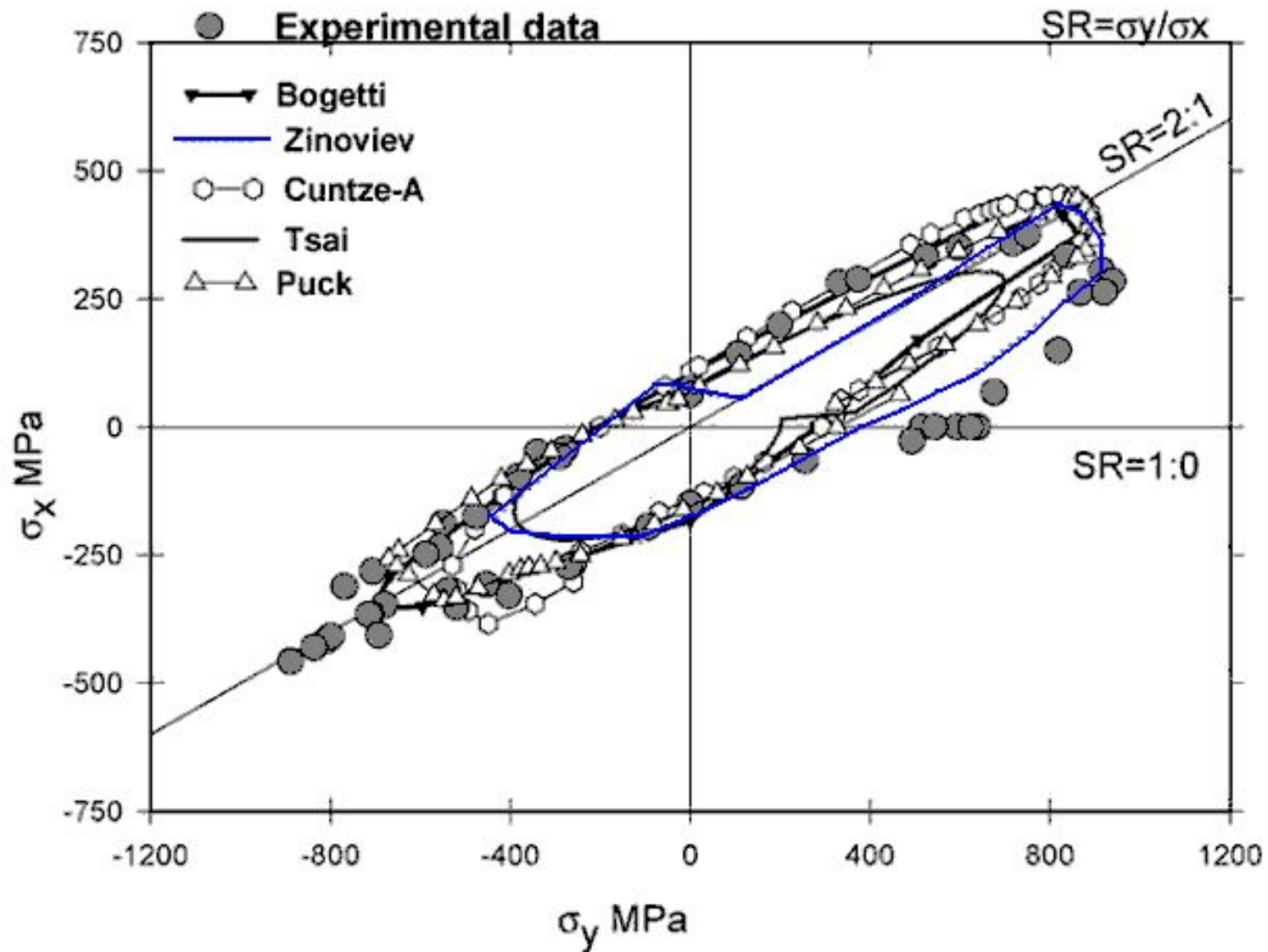


**Поверхность разрушения однонаправленного углепластика  
(эксперимент, остальное - разные варианты критериев  
прочности, синие линии - STRAN )**



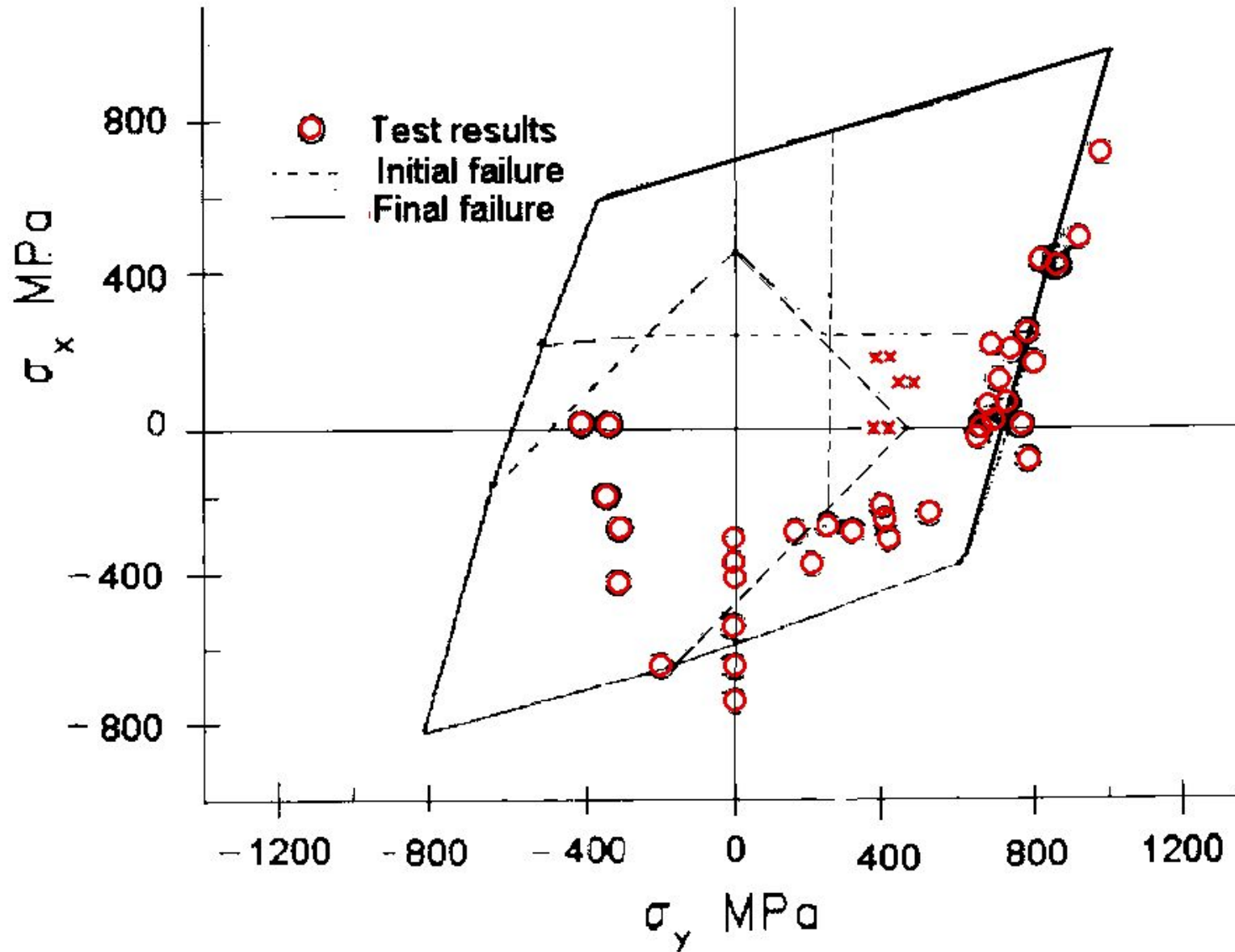


Предельные поверхности стеклопластика 90°/±30° (голубые точки – эксперимент, красные линии – расчет по программе STRAN)

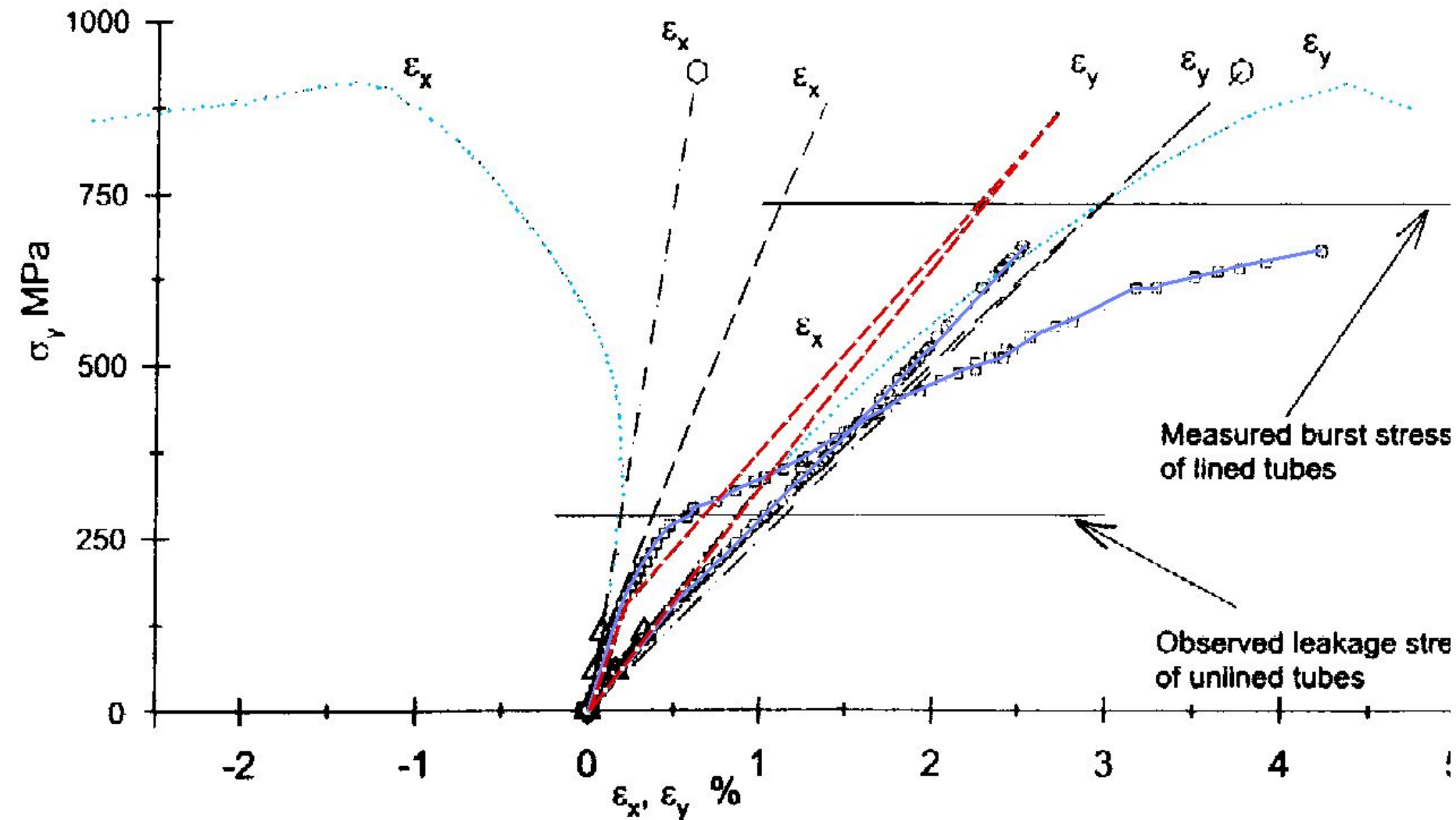


**Предельные поверхности стеклопластика  $\pm 55^\circ$   
при  $\sigma_x / \sigma_y = 1/2$  (серые – эксперимент, синие – расчет по STRAN)**

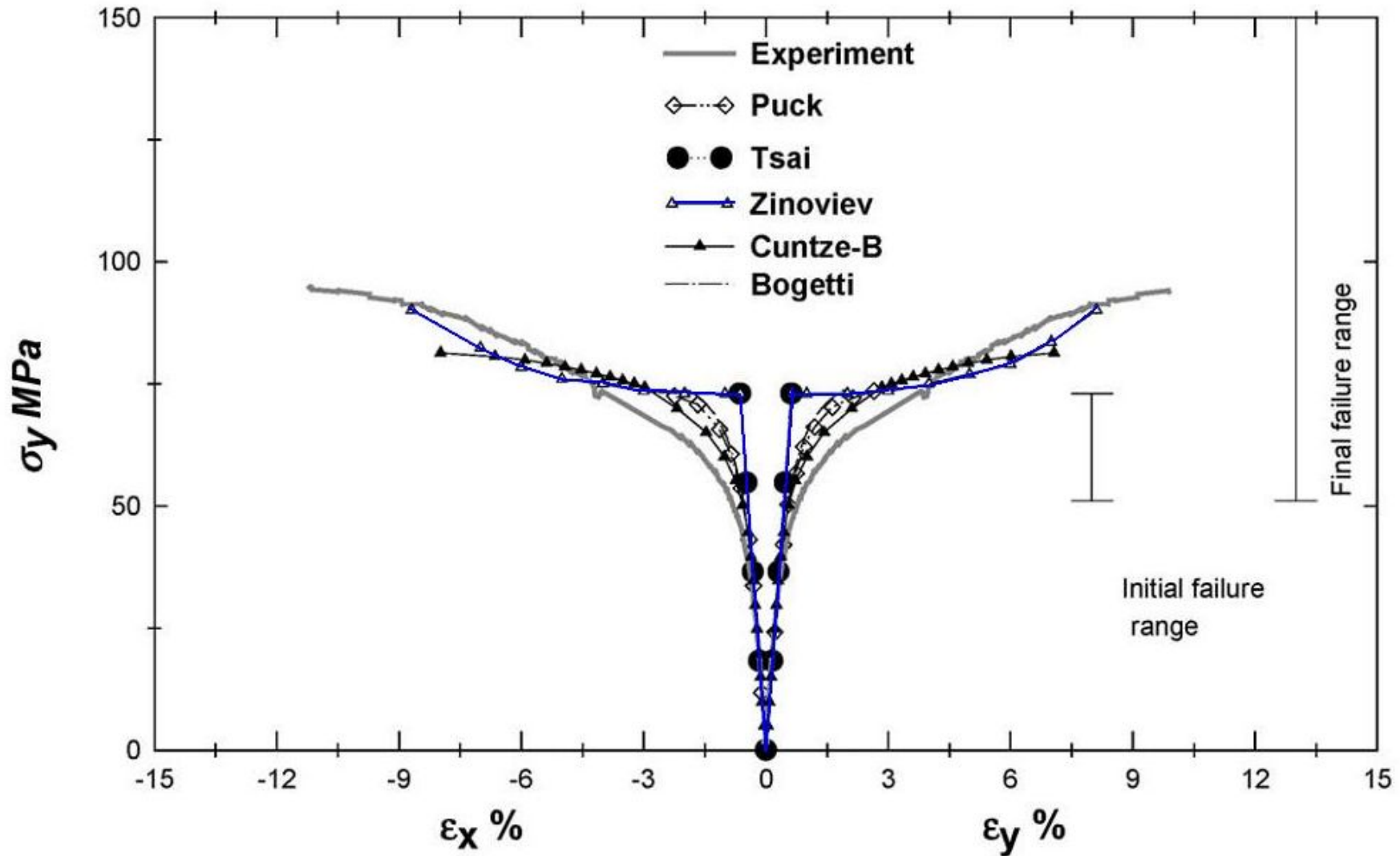
Пределные поверхности углепластика  $0/\pm 45^\circ/90^\circ$  (красные точки – эксперимент, линии – расчет по программе STRAN) 11



Диаграммы деформирования стеклопластика  $\pm 55^\circ$   
при  $\sigma_x / \sigma_y = 1/2$  (синие – эксперимент, красные – расчет по STRAN)



Диаграммы деформирования стеклопластика  $\pm 45^\circ$   
при  $\sigma_y/\sigma_x = 1/-1$  (синие – расчет по STRAN)

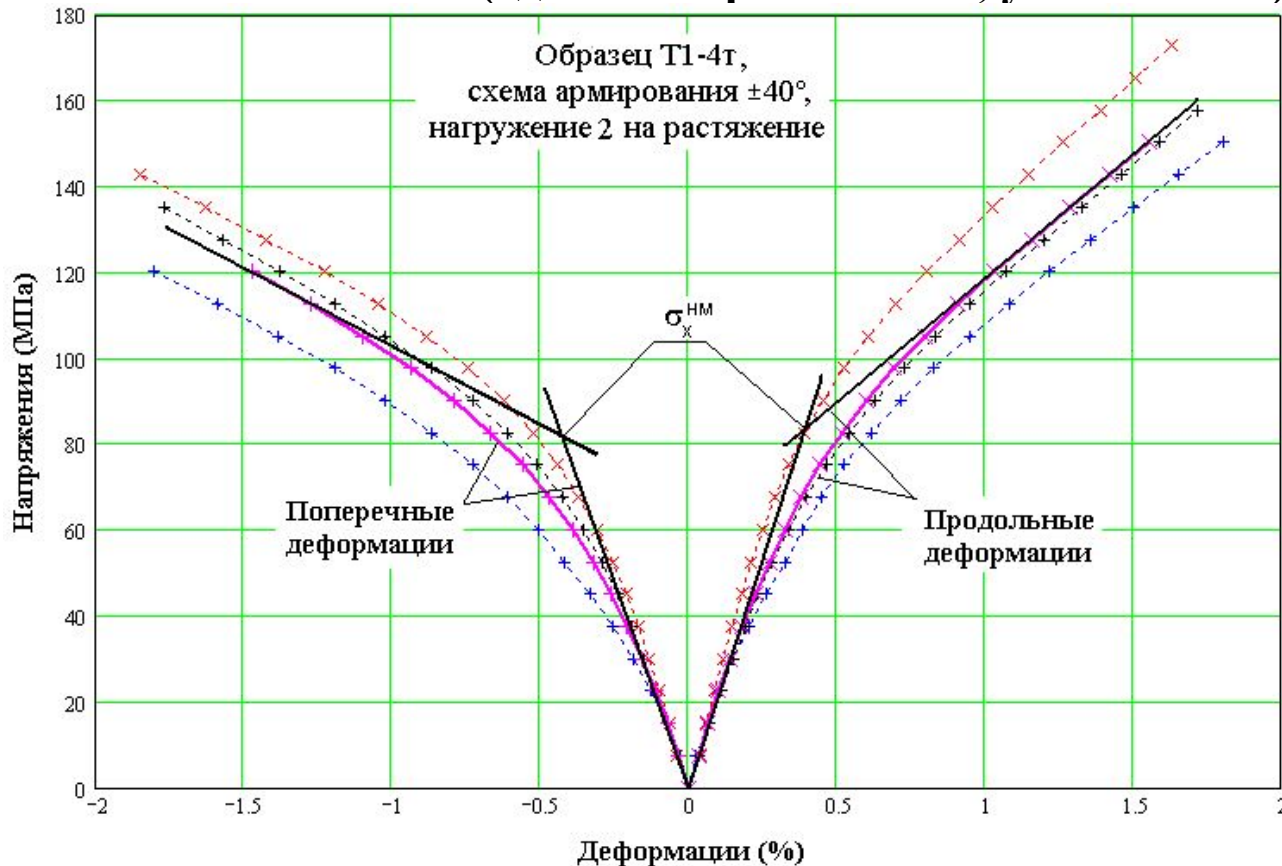


# Идентификация характеристик прочности слоя по характеристикам прочности пакетов

## Гипотезы:

- плоское напряженно-деформированное состояние слоев;
- слои деформируются совместно, без проскальзывания (деформации постоянны по толщине);
- до начала разрушения (нарушения монолитности) деформирование линейно-упругое;
- причина нелинейности диаграммы деформирования – нарушение монолитности (выход на предельную поверхность).

## Определение напряжений нарушения монолитности (одноосное растяжение, углепластик)



- крестики – показания датчиков,
- розовые сплошные линии – средние значения датчиков,
- черные прямые – линейная аппроксимация для средних деформаций.



# Блок-схема определения характеристик прочности слоя методом идентификации (вариант 1)

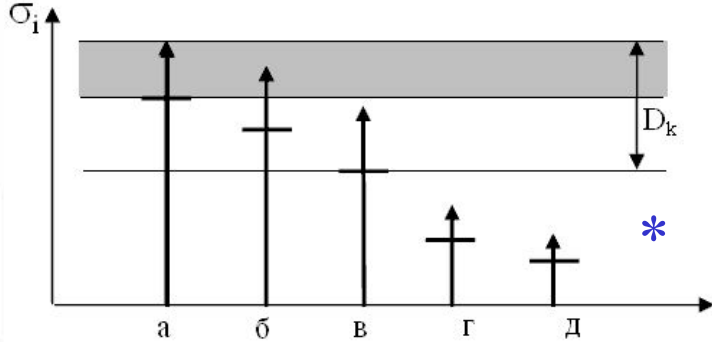
ИСХОДНЫЕ ДААННЫЕ	<ul style="list-style-type: none"> <li>❖ схемы армирования пакетов</li> <li>❖ напряжения наруш. монол. или разрушения пакетов</li> <li>❖ допуски на напряж. наруш. монол. или разруш. (D)</li> <li>❖ характеристики упругости слоя</li> </ul>
---------------------	---

Критерий  
максимальных  
напряжений

Для каждого пакета и  
типа нагружения  
в момент разрушения

Напряжения в слоях  
(относительно осей  
ортотропии слоя)

Выбор максимальных в каждом пакете  
 $\sigma_{+1}, \sigma_{-1}, \sigma_{-2}, \sigma_{+2}, \tau_{+12}$  \*



Перегруппировка всех выбранных напряжений  
по типам и величине

Уточнение допустимых отклонений D и выбор напряжений, определяющих разрушение каждого типа \*

Для всех  
пакетов и типов  
нагружения  
в момент  
разрушения

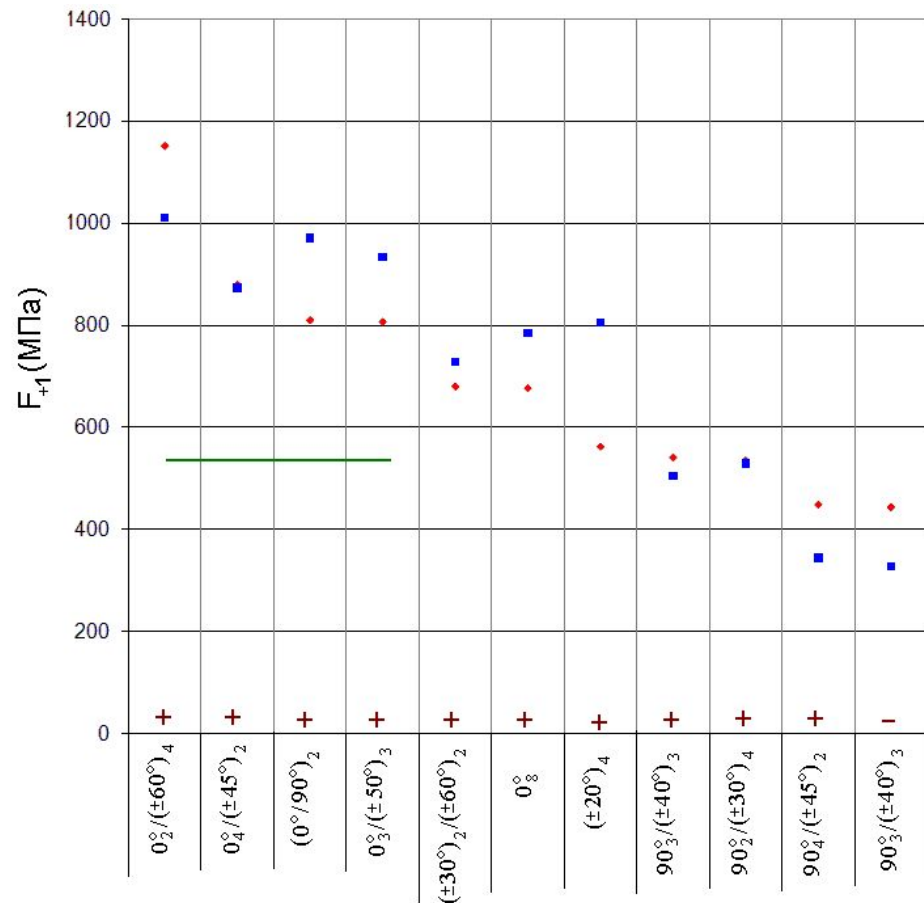
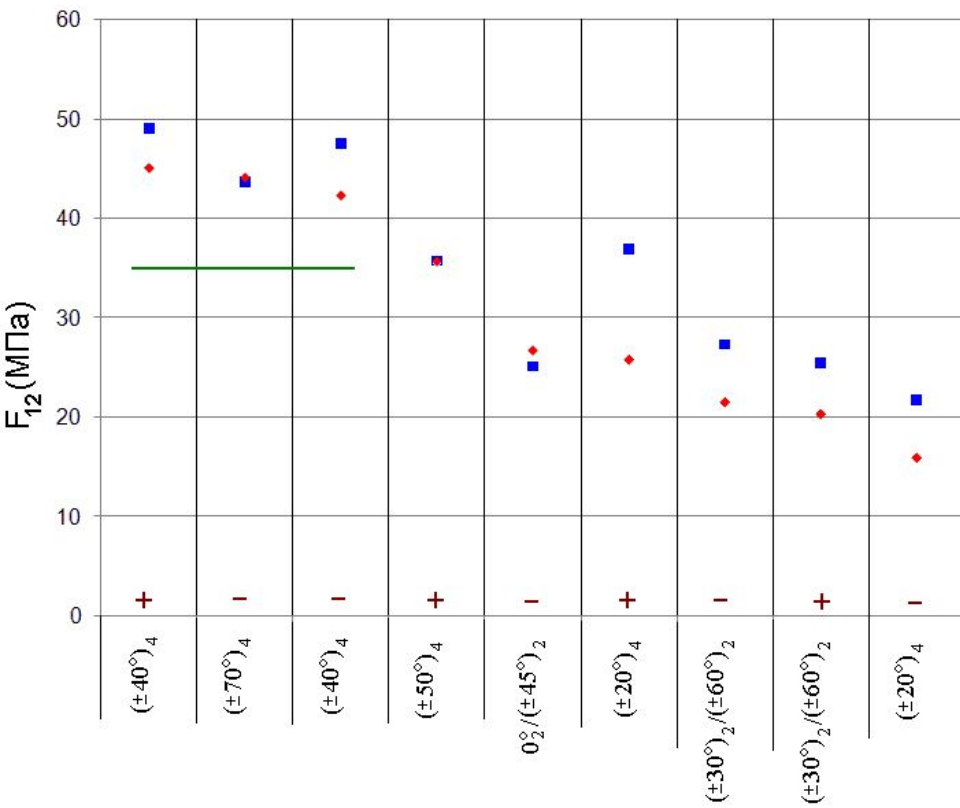
\* Априори неизвестно, какие из напряжений явились причиной разрушения пакета

$$F_t = \frac{\sum_{j=1}^K (\sigma_t)_j}{K}$$

Выбор напряжений, определяющих разрушение каждого типа – наиболее сложный, творческий момент задачи идентификации



# Примеры напряжений в слоях в момент разрушения углепластика



- ◆ немодифицированное связующее
- модифицированное связующее

# Результаты идентификации характеристик прочности углепластика на основе препрега П-4УН - HTS 5631 (испытания на растяжение и сжатие)

№ п/п	№ структ. в табл. 1.5.1, 1.6.1	Схема армирования	Базовые хар. (эксперим.)		Расчет					
			1 нагр. $[\sigma^+]$ (МПа)	2 нагр. $[\sigma^-]$ (МПа)	растяж.		сжатие		Опред-е характ. слоя (№ нагр.)	
					$[\sigma^+]$ (МПа)	прич. разр.	$[\sigma^-]$ (МПа)	прич. разр.		
1	1.1	0	2690	815	2439	$F_1^+$	960	$F_1^-$	$F_1^+$ (1 н.), $F_1^-$ (2 н.)	
2	1.2, 1.3	$\pm 20^\circ$ (8 и 16 сл.)	902	477	917	$F_{12}$	891	$F_1^-$	$F_{12}$ (1 н.)	
3	1.4	$\pm 40^\circ$ (8 сл.)	180	-	200	$F_{12}$	200	$F_{12}$	$F_{12}$	
4	1.5	$\pm 50^\circ$ (8 сл.)	85	140	150	$F_{12}$	150	$F_{12}$	$F_{12}$ (2 н.)	
5	1.6	$\pm 70^\circ$ (8 сл.)	45,7	194	187	$F_2^+$	194	$F_2^-$	$F_2^+, F_{12}$ (2 н.)	
6	1.7	$90^\circ$ (8 сл.)	33,2	-	153	$F_2^+$	159	$F_2^-$	-	
7	1.8 (табл. 1.5.1)	$0_+/90^\circ_+$ (10 сл.)	873	-	912	$F_2^+$	427	$F_1^-$	$F_2^+$	
8	1.8 (табл. 1.6.1)	$0_+/90^\circ_+$ (10 сл.)	-	628	1300	$F_2^+$	604	$F_1^-$	$F_1^-$ (2 н.)	
9	2.2L	$0_2/\pm 70^\circ_2$ (8 сл.)	756	330	725	$F_2^+$	297	$F_1^-$	$F_1^+, F_2^+, F_{12}$ (1 н.), $F_1^-$ (2 н.)	
10	2.2T	$90^\circ_2/\pm 20^\circ_2$ (8 сл.)	754	-	1330	$F_2^+$	676	$F_1^-$	-	
11	2.3L	$0_2/\pm 60^\circ_2$ (5 сл.)	594	403	459	$F_{12}$	262	$F_1^-$	$F_1^+$ (1 н.), $F_{12}$ (1, 2 н.)	
12	2.3T	$90^\circ/\pm 30^\circ_2$ (5 сл.)	422	-	640	$F_{12}$	640	$F_{12}$	-	

Характеристики прочности слоя, определенные методом идентификации

№ вар-та идентификации	$F_1^+$ (МПа)	$k_v^{+H}$ (%)	$F_1^-$ (МПа)	$k_v^{-L}$ (%)	$F_2^+$ (МПа)	$k_v^{+H}$ (%)	$F_2^-$ (МПа)	$k_v^{-L}$ (%)	$F_{12}$ (МПа)	$k_v^{+H}$ (%)
1	2567	10,3	941	0,6	152,5	30,0	98,1	0,8	76,5	2,8
2	2439	14,9	960	8,1	152,5	21,3	159	9,8	82,9	21,5

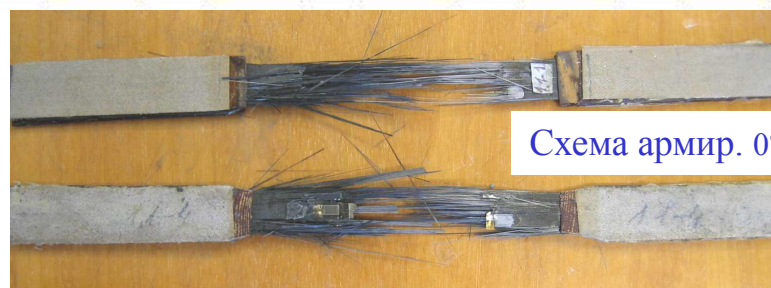


Схема армир. 0°



Схема армир. +50°

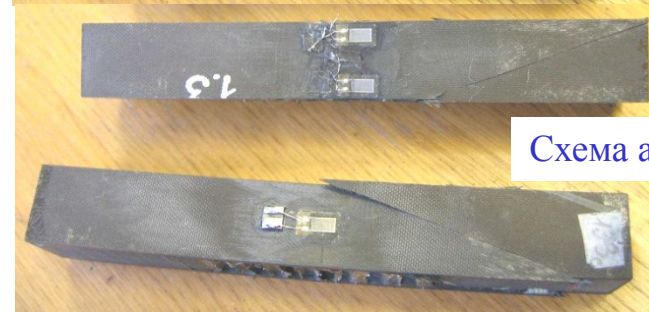


Схема армир. +20°

■ характеристики, использованные при определении пределов прочности

## Последовательность анализа при определении характеристик прочности слоя методом идентификации (вариант 2)

### Исходные данные:

- схемы армирования пакетов;
- напряжения нарушения монолитности или разрушения пакетов;
- характеристики упругости слоя.

- 1 этап.** Определение напряжений  $[\sigma_1]$ ,  $[\sigma_2]$ ,  $[\tau_{12}]$  в каждом слое каждого пакета в момент разрушения (ось 1 – вдоль волокон, ось 2 – поперек волокон).
- 2 этап.** Построение точек, соответствующих напряжениям  $[\sigma_1]$ ,  $[\sigma_2]$ ,  $[\tau_{12}]$ , в осях напряжений слоя.
- 3 этап.** Выбор предельных значений для напряжений каждого вида (максимальных по абсолютной величине, заметно превышающих остальные).
- 4 этап.** Оценка применимости критерия максимальных напряжений и (при необходимости) выбор иного критерия прочности.
- 5 этап.** Определение прочностных характеристик слоя как результат аппроксимации экспериментальных точек, соответствующих выбранным на этапе 3 максимальным напряжениям.
- 6 этап.** Определение относительных невязок расчетных и экспериментальных значений всех характеристик рассматриваемых пакетов – оценка степени соответствия прогноза и эксперимента.

## Пример анализа экспериментальных значений характеристик слоя

Углепластик на основе наполнителя ЛУ-П/0,2 и связующего ЭНФБ, испытания на растяжение (образцы – полоски), сжатие (трехслойные образцы).

Схемы армирования (14 структур, 2-4 одинаковых образца):

$0^{\circ}_8, 90^{\circ}_8, \pm 20^{\circ}_4, \pm 70^{\circ}_4, \pm 40^{\circ}_4, \pm 50^{\circ}_4, 90^{\circ}_4/0^{\circ}_4,$

$(0^{\circ}_2/\pm 45^{\circ})_2, (90^{\circ}_2/\pm 45^{\circ})_2, 0^{\circ}_2/\pm 60^{\circ}_4, 90^{\circ}_2/\pm 30^{\circ}_4, 90^{\circ}_3/\pm 40^{\circ}_3, 0^{\circ}_3/\pm 50^{\circ}_3, (\pm 60^{\circ}/\pm 30^{\circ})_2$

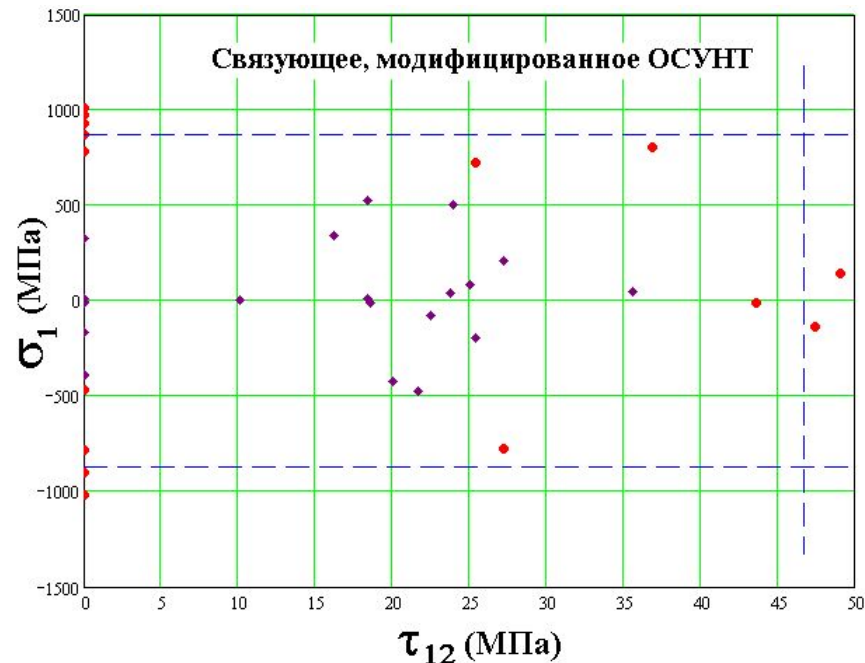
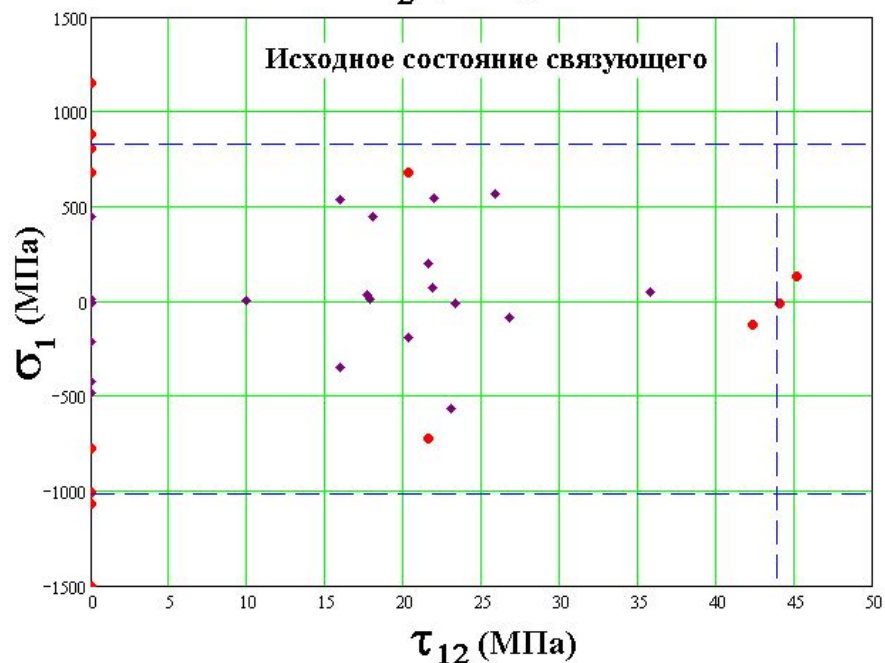
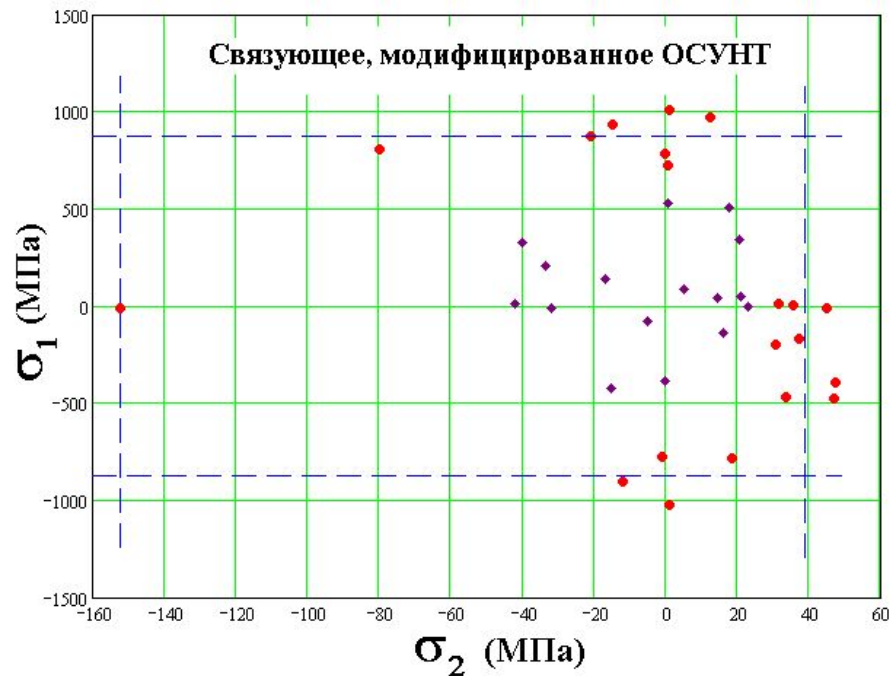
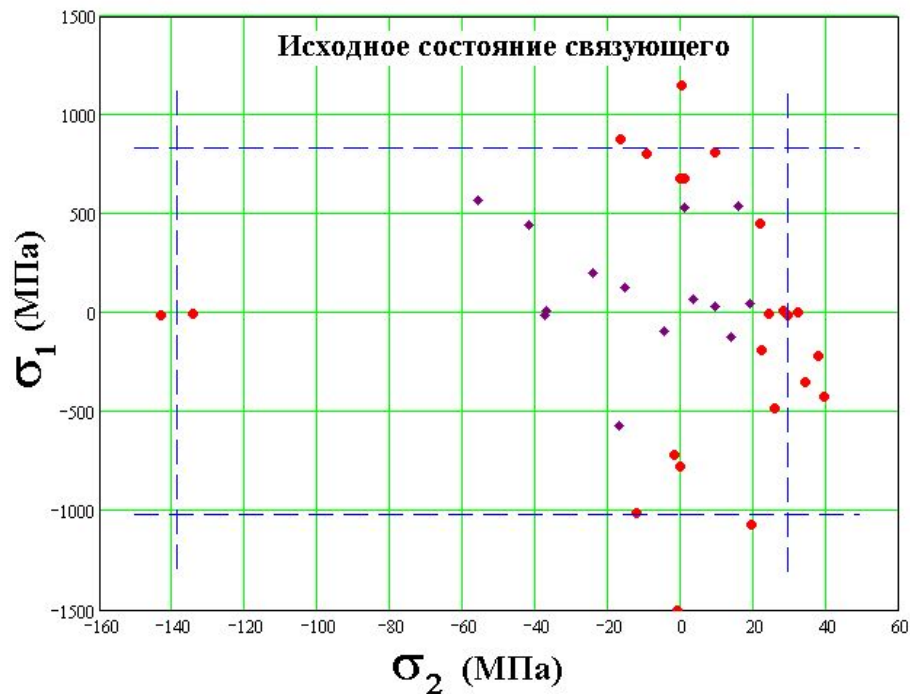
- ❖ исходное состояние связующего;
- ❖ связующее с ОСУНТ, концентрация 0,008% к массе связующего.

### Результаты идентификации характеристик упругости слоя

Тип связующего	Расчетные значения				
	$E_1$ (ГПа)	$\nu_{12}$	$E_2$ (ГПа)	$G_{12}$ (ГПа)	$\bar{\delta}_{\Sigma} / (\delta_{\Sigma})_{\max}$ (%)
Исходное состояние	170	0,346	6,27	2,29	6,62 / 15,2
Модифиц. (0,008%)	179	0,306	8,34	2,82	6,67 / 19,6

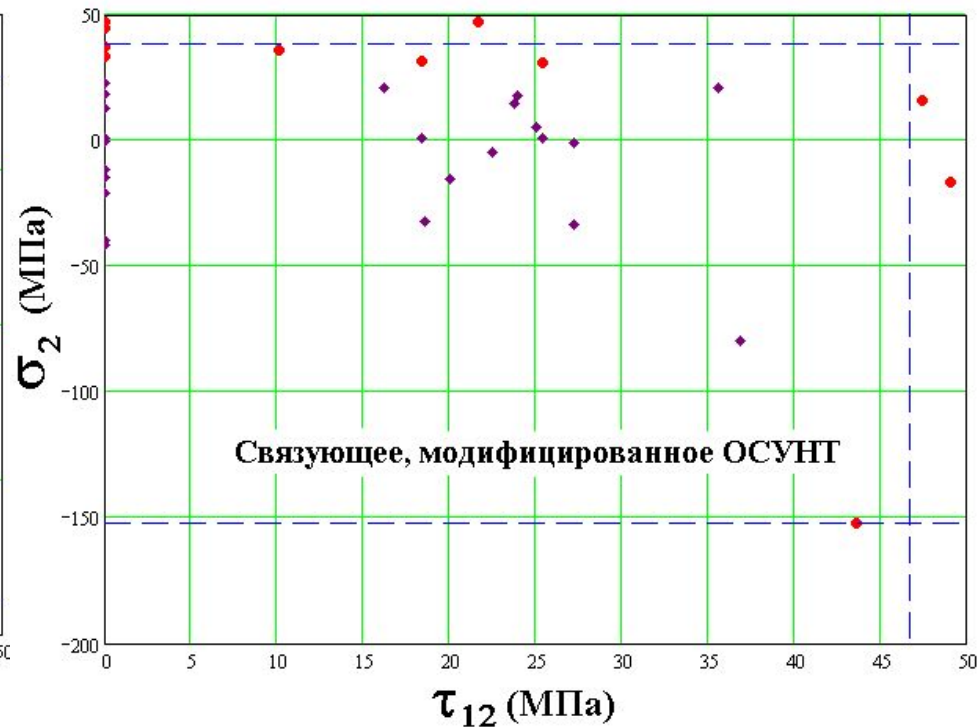
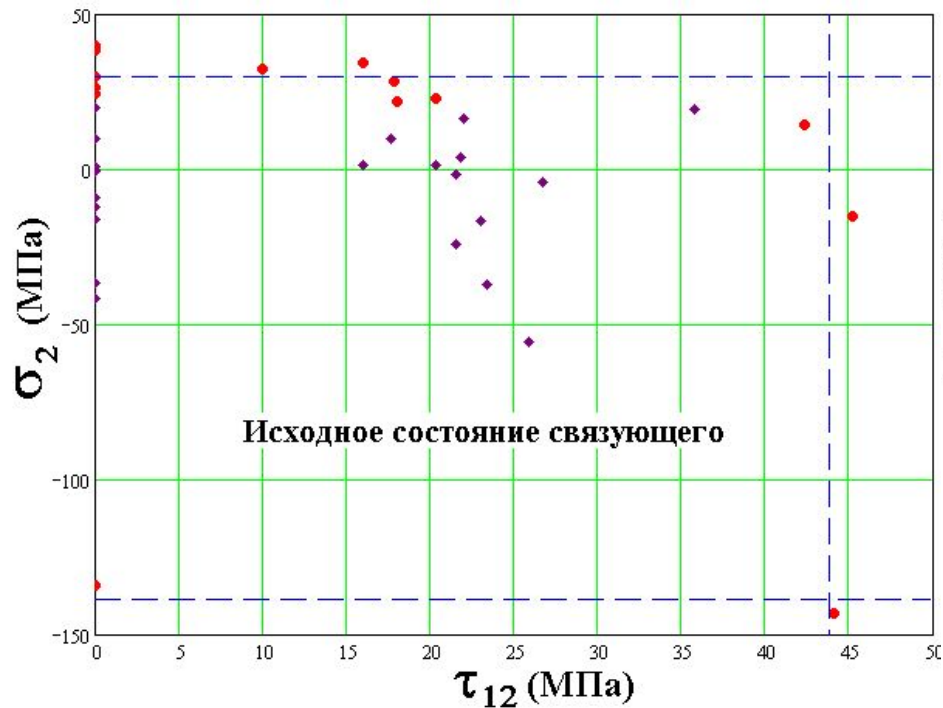
$\bar{\delta}_{\Sigma}, (\delta_{\Sigma})_{\max}$  - среднее и максимальные значения относительных невязок расчетных и экспериментальных значений характеристик пакетов

# Результаты анализа характеристик прочности слоя





# Результаты анализа характеристик прочности слоя

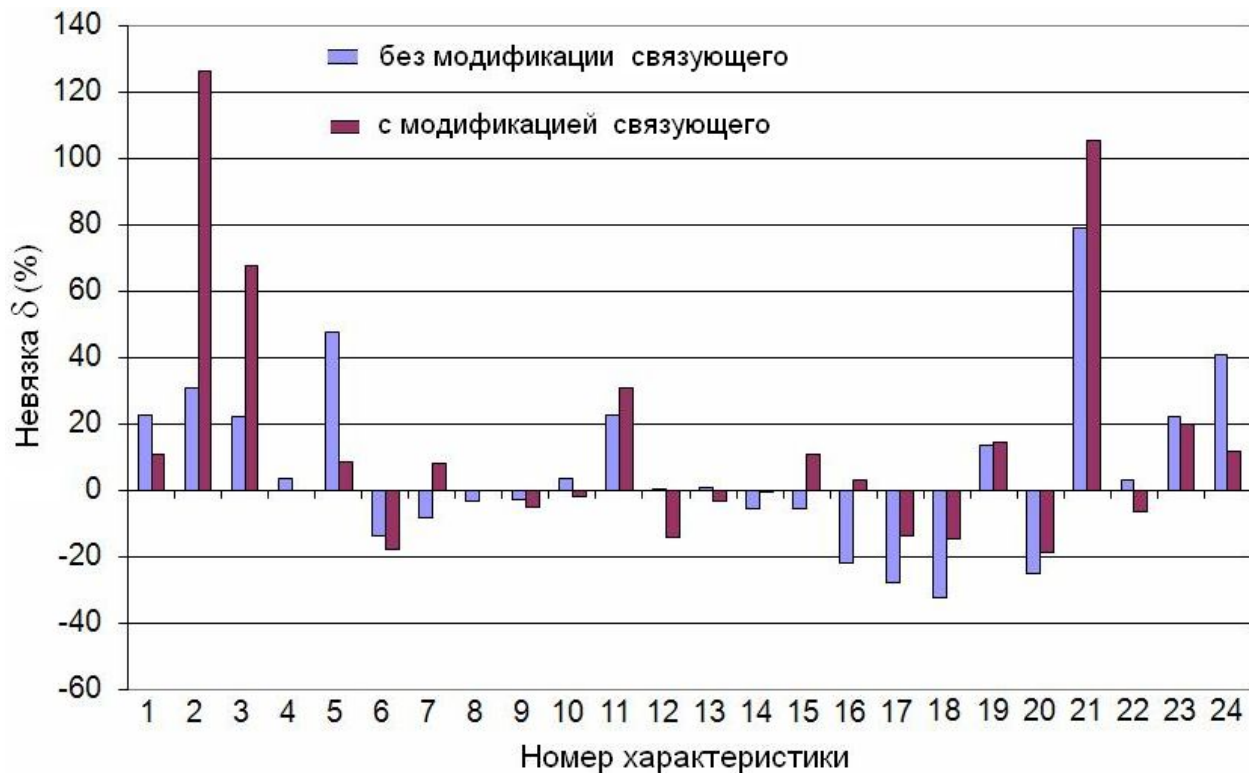


Тип связующего / кол-во баз. хар.	Расчетные значения					
	$F_1^+$ (МПа)	$F_1^-$ (МПа)	$F_2^+$ (МПа)	$F_2^-$ (МПа)	$F_{12}$ (МПа)	$\bar{\delta}_\Sigma$ (%)
Исходн. сост. / 24	832	1016	29,6	138	43,9	19,2
Модиф. (0,008%) / 23	872	870	38,6	152	46,8	21,4

Предельные  
напряжения в слое:  
 $F_{+1}, F_{-1}, F_{+2}, F_{-2}, F_{12}$

$\bar{\delta}_\Sigma$  - среднее значение относительных невязок расчетных и экспериментальных значений характеристик пакетов

# Относительные невязки расчетных и экспериментальных значений пределов прочности

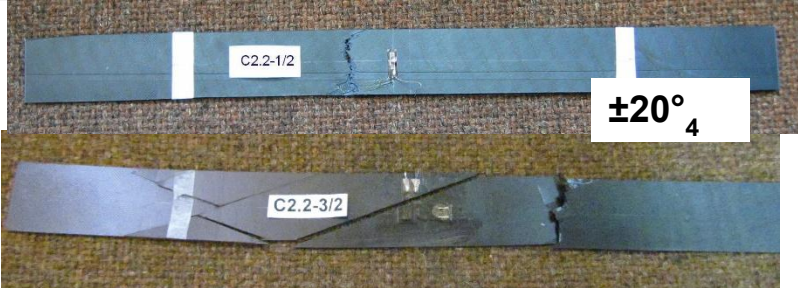


$$\delta_i = \frac{F_i^p - F_i^э}{F_i^э} 100\%$$



№ характ.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16			
Схема армпр.	0° <sub>8</sub>		90° <sub>8</sub>		±20° <sub>4</sub>		±70° <sub>4</sub>		±40° <sub>4</sub>		±50° <sub>4</sub>		90° <sub>4</sub> /0° <sub>4</sub>		(0° <sub>2</sub> /±45°) <sub>2</sub>		(90° <sub>2</sub> /±45°) <sub>2</sub>		
Тип характ.	F <sub>+x</sub>	F <sub>-x</sub>	F <sub>+x</sub>	F <sub>-x</sub>	F <sub>+x</sub>	F <sub>-x</sub>	F <sub>+x</sub>	F <sub>-x</sub>	F <sub>+x</sub>	F <sub>-x</sub>	F <sub>+x</sub>	F <sub>+x</sub>	F <sub>-x</sub>	F <sub>+x</sub>	F <sub>-x</sub>	F <sub>+x</sub>	F <sub>+x</sub>	F <sub>-x</sub>	F <sub>+x</sub>

№ характ.	17	18	19	20	21	22	23	24		
Схема армпр.	0° <sub>2</sub> /±60° <sub>4</sub>		90° <sub>2</sub> /±30° <sub>4</sub>		90° <sub>3</sub> /±40° <sub>3</sub>		0° <sub>3</sub> /±50° <sub>3</sub>		(±60°/±30°) <sub>2</sub>	
Тип характ.	F <sub>+x</sub>	F <sub>-x</sub>	F <sub>+x</sub>	F <sub>+x</sub>	F <sub>-x</sub>	F <sub>+x</sub>	F <sub>+x</sub>	F <sub>-x</sub>		





## Факторы, оказывающие влияние на результаты испытаний

- **технологические погрешности изготовления образцов** (отклонения углов укладки волокон от заданных направлений, искривление волокон, колебания содержания связующего и нанодобавок, колебания свойств используемых волокон, отклонения качества склейки обшивок с наполнителем для трехслойных образцов и т.д.)
  - **влияние концентрации напряжений** вблизи зон приложения нагрузки на характер разрушения и разрушающие напряжения (величина концентрации напряжений зависит от схемы армирования)
  - **погрешности эксперимента** (отклонения от соосности приложенной нагрузки и оси симметрии образца, погрешности измерения деформаций)
- 

## Заключение

- ◇ Задача определения характеристик слоя **по избыточному количеству** экспериментально определенных характеристик многослойных структур является весьма актуальной, т.к. экспериментально определенные на однонаправленных образцах характеристики слоя на обеспечивают необходимой точности прогнозирования характера деформирования и разрушения многослойных пакетов.
- ◇ При определении характеристик прочности слоя предпочтительно одновременное исследование **вида предельной поверхности** слоя в координатах напряжений, что возможно при наличии достаточно большого количества экспериментальных данных.
- ◇ Приведенные результаты экспериментальных исследований показывают, что **критерий максимальных напряжений** удовлетворительно описывает поверхность прочности исследованного углепластика (с учетом имеющихся разбросов).