

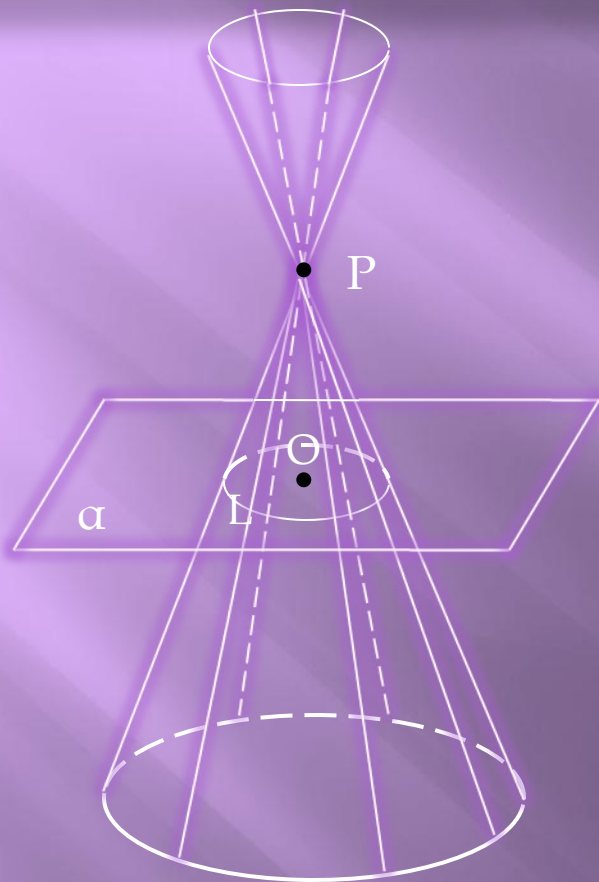


# КОНУС

КОНУС

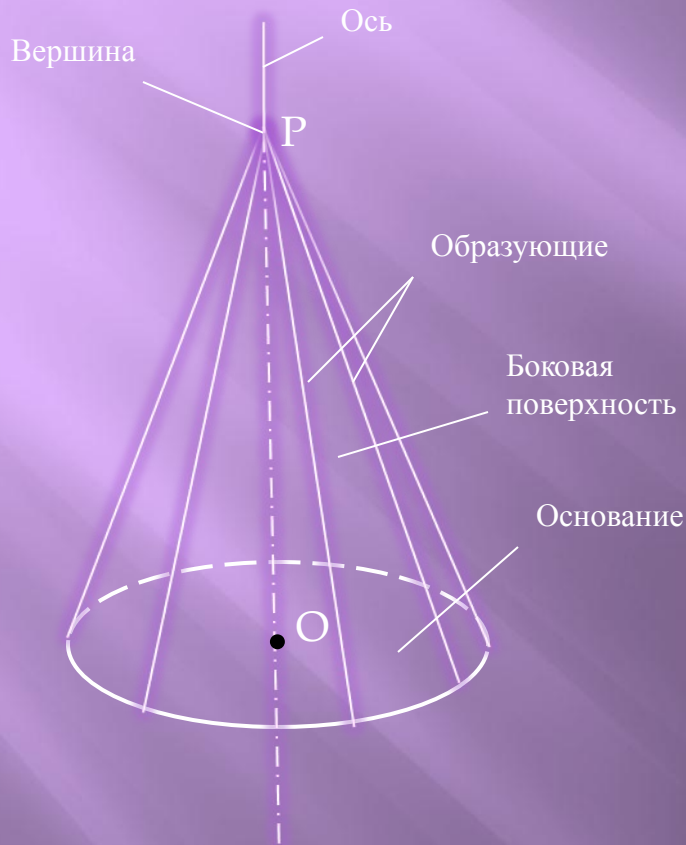
Понятие конуса.  
Площадь поверхности  
конуса. Усеченный  
конус.

# Понятие конуса



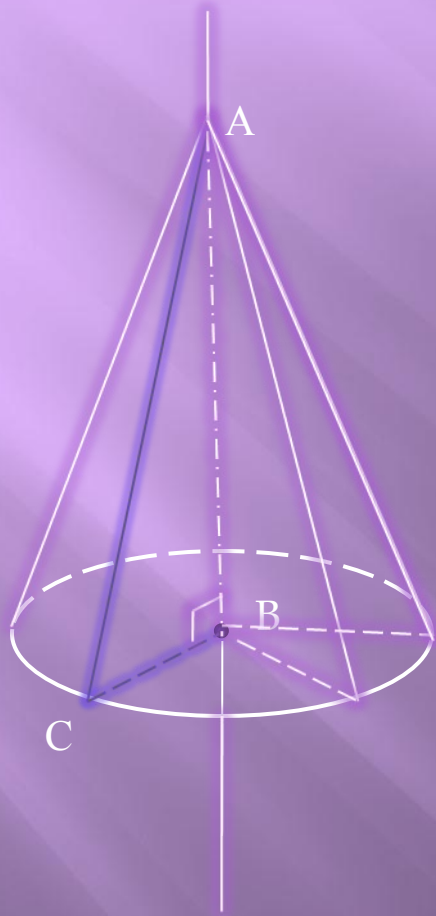
Рассмотрим окружность  $L$  с центром в точке  $O$  и прямую  $OP$ , перпендикулярную к плоскости  $\alpha$  этой окружности. Через точку  $P$  и каждую точку окружности проведем прямую. Поверхность, образованная этими прямыми, называется конической поверхностью, а сами прямые – образующими конической поверхности. Точка  $P$  называется вершиной, а прямая  $OP$  – осью конической поверхности.

# Понятие конуса



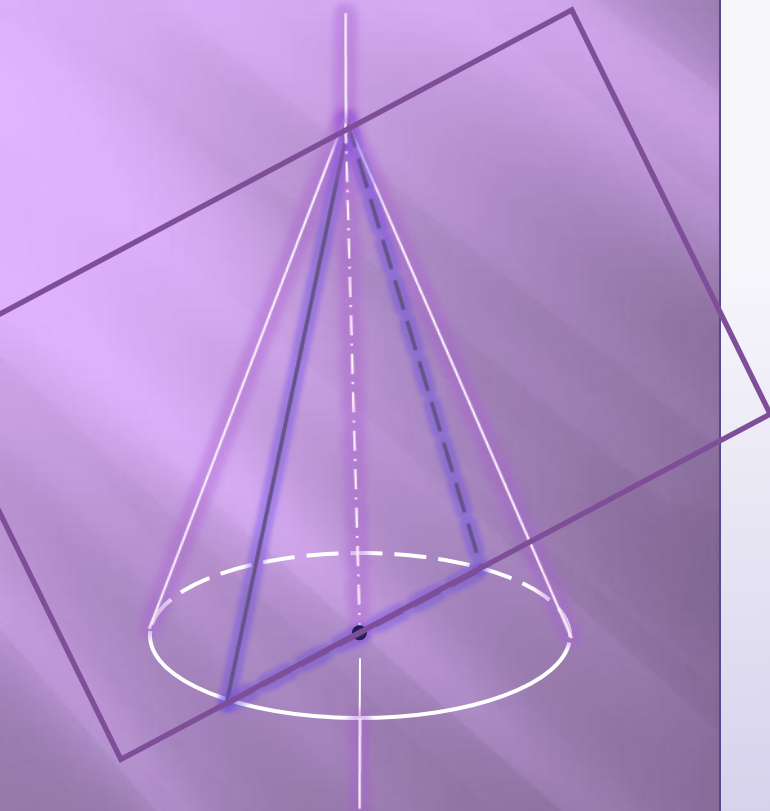
Тело, ограниченное конической поверхностью и кругом с границей  $L$ , называется **конусом**. Круг называется **основанием конуса**, вершина конической поверхности — **вершиной конуса**, отрезки образующих, заключенные между вершиной и основанием, — **образующими конуса**, а образованная ими часть конической поверхности — **боковой поверхностью конуса**. Ось конической поверхности называется **осью конуса**, а ее отрезок, заключенный между вершиной и основанием, — **высотой конуса**. Отметим, что все образующие конуса равны друг другу (объясните почему).

# Конус – фигура вращения



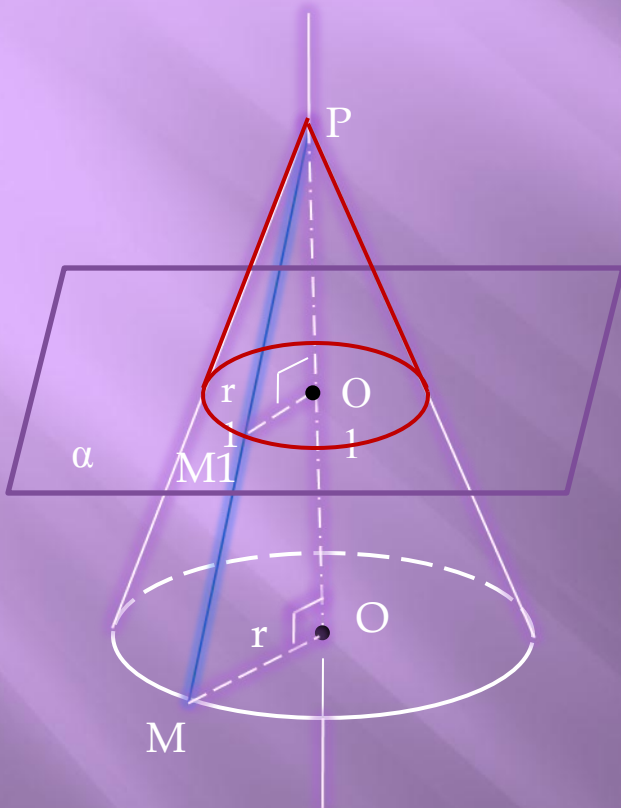
Конус может быть получен вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов. На рисунке изображен конус, полученный вращением прямоугольного треугольника  $ABC$  вокруг катета  $AB$ . При этом боковая поверхность конуса образуется вращением гипотенузы  $AC$ , а основание — вращением катета  $BC$ .

# Осевое сечение



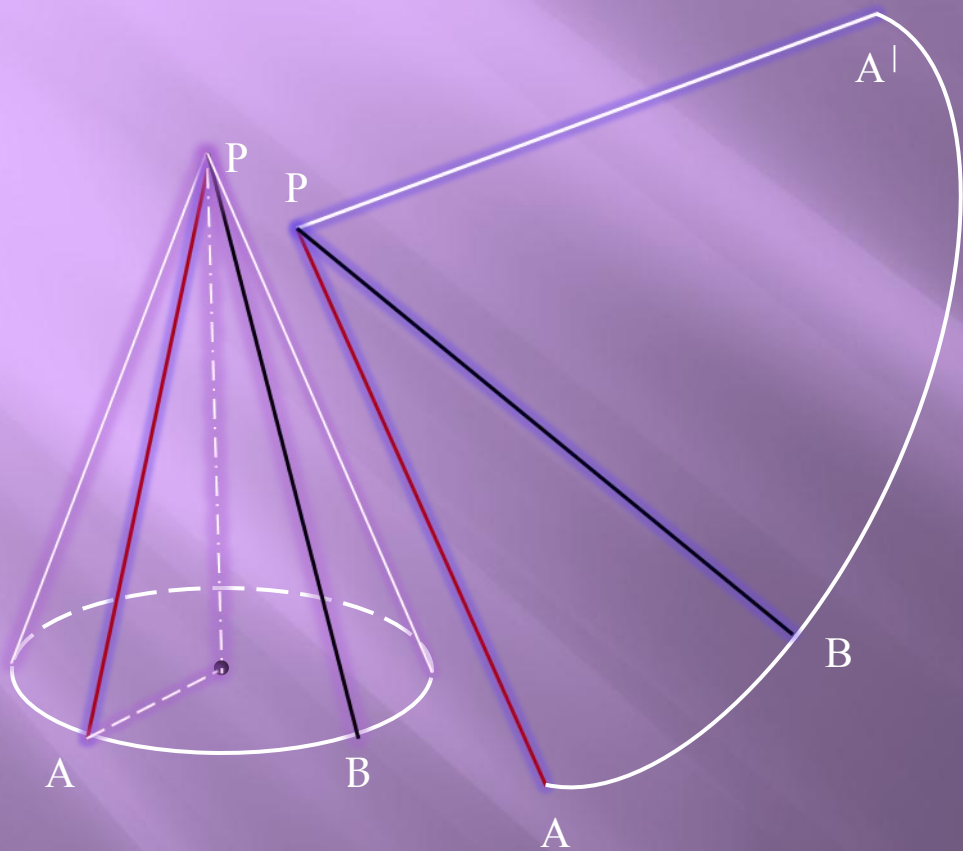
Рассмотрим сечение конуса различными плоскостями. Если секущая плоскость проходит через ось конуса, то сечение представляет собой равнобедренный треугольник, основание которого — диаметр основания конуса, а боковые стороны — образующие конуса. Это сечение называется

# Осевое сечение



Если секущая плоскость перпендикулярна к оси  $OP$  конуса, то сечение конуса представляет собой круг с центром  $O_1$  и расположенным на оси, конуса. Радиус  $r_1$  этого круга равен  $(OP/PO_1) * r$ , где  $r$  - радиус основания конуса, что легко усмотреть из подобия прямоугольных треугольников  $POM$  и  $PO_1M_1$ .

# Площадь поверхности конуса



Боковую поверхность конуса, как и боковую поверхность цилиндра, можно развернуть на плоскость, разрезав ее по одной из образующих. Разверткой боковой поверхности конуса является круговой сектор, радиус которого равен образующей конуса, а длина дуги сектора равна длине окружности основания конуса.

# Площадь поверхности конуса

За площадь боковой поверхности конуса принимается площадь ее развертки. Выразим площадь  $S_{бок}$  боковой поверхности конуса через его образующую  $l$  и радиус основания  $r$ .

Площадь кругового сектора — развертки боковой поверхности конуса равна

$$\frac{\pi l^2 \alpha}{360}$$

Где  $\alpha$  — градусная мера дуги  $ABA^l$ , поэтому



# Площадь поверхности конуса

$$S_{\text{бок}} = \frac{\pi l^2 \alpha}{360} \quad (1)$$

# Площадь поверхности конуса

Выразим  $a$  через  $l$  и  $r$ . Так как длина дуги  $ABA'$  равна  $2\pi r$  (длине окружности основания конуса), то  $2\pi r = (\pi l/180) \cdot a$ , откуда

$$\alpha = \frac{360 r}{l}$$

# Площадь поверхности конуса

Подставив это выражение в формулу (1), получим

$$S_{\text{бок}} = \pi r l \quad (2)$$

# Площадь поверхности конуса

Таким образом, площадь боковой поверхности конуса равна произведению половины длины окружности основания на образующую.

Площадью полной поверхности конуса называется сумма площадей боковой поверхности и основания. Для вычисления площади  $S_{\text{кон}}$  полной поверхности конуса получается формула

# Площадь поверхности конуса

$$S_{\text{бок}} = \pi r (l + r)$$

# Усеченный конус

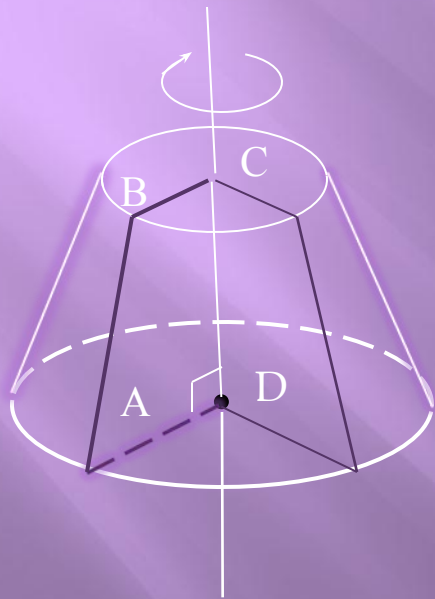


Возьмем произвольный конус и проведем секущую плоскость, перпендикулярную к его оси. Эта плоскость пересекается с конусом по кругу и разбивает конус на две части. Одна из частей представляет собой конус, а другая называется **усеченным конусом**. Основание исходного конуса и круг, полученный в сечении этого конуса плоскостью, называются **основаниями** усеченного конуса, а отрезок, соединяющий их центры, — **высотой** усеченного конуса.

# Усеченный конус

Часть конической поверхности, ограничивающая усеченный конус, называется его **боковой поверхностью**, а отрезки образующих конической поверхности, заключенные между основаниями, называются **образующими** усеченного конуса. Все образующие усеченного конуса равны друг другу.

# Усеченный конус



Усеченный конус может быть получен вращением прямоугольной трапеции вокруг ее боковой стороны, перпендикулярной к основаниям. На рисунке изображен усеченный конус, полученный вращением прямоугольной трапеции  $ABCD$  вокруг стороны  $CD$ , перпендикулярной к основаниям  $AD$  и  $BC$ . При этом боковая поверхность образуется вращением боковой стороны  $AB$ , а основания усеченного конуса — вращением оснований  $CB$  и  $DA$  трапеции.



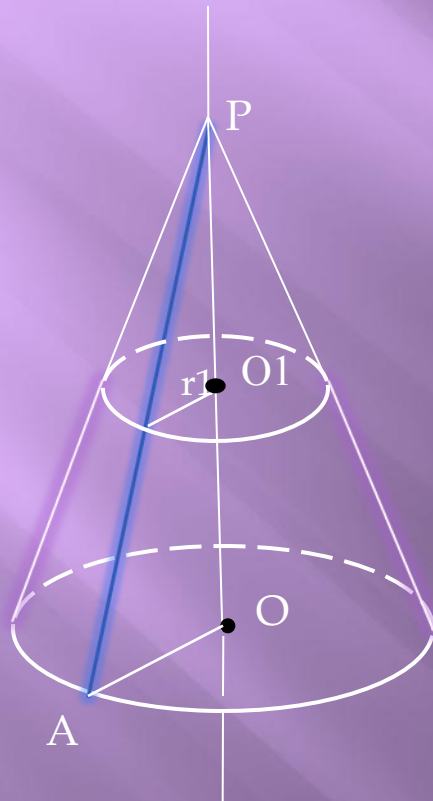
# Усеченный конус

Докажем, что площадь боковой поверхности усеченного конуса равна произведению полусуммы длин окружностей оснований на образующую, т. е.

$$S_{\text{бок}} = \pi (r + r_1) l$$

Где  $r$  и  $r_1$  – радиусы оснований,  $l$  – образующая усеченного конуса.

# Усеченный конус



▼ Пусть  $P$  — вершина конуса, из которого получен усеченный конус,  $AA_1$  — одна из образующих усеченного конуса,  $r > r_1$  точки  $O$  и  $O_1$  — центры оснований. Используя формулу (2), получаем

$$\begin{aligned}
 S_{\text{бок}} &= \pi r * PA \\
 &- \pi r_1 * PA = \\
 &\pi r (PA_1 + AA_1) \\
 &- \pi r_1 * PA_1
 \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что  $AA_1 = l$ , находим

$$S_{\text{бок}} = \pi r l + \pi(r - r_1) PA_1 \quad (3)$$

Выразим  $PA_1$  через  $l$ ,  $r$  и  $r_1$ . Прямоугольные треугольники  $PO_1A_1$  и  $POA$  подобны, так как имеют общий острый угол  $P$ , поэтому

$$\frac{PA_1}{PA} = \frac{r_1}{r}$$

или

$$\frac{PA_1}{PA_1 + l} = \frac{r_1}{r}$$

Отсюда получаем

$$PA_1 = \frac{l r_1}{r - r_1}$$

Подставив это выражение в формулу (3), приходим к формуле

$$S_{\text{бок}} = \pi(r + r_1)l$$

