# Матрицы

Линейная алгебра

# Матрица

- Прямоугольная таблица чисел или символов, их заменяющих, из $m$ строк (или $n$ столбцов) одинаковой длины

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Матрица размера *m*×n

**Элемент матрицы**

$$A_{m\times n} = (a_{ij})$$

$$i = 1..m$$

$$j = 1..n$$

# Главная диагональ

- Элементы матрицы, у которых номер строки равен номеру столбца

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} \end{pmatrix}$$

# Равные матрицы

- Матрицы называются равными, если равны все соответствующие элементы этих матриц

$$\mathbf{A=B}$$

$$\forall i \ \forall j \ \ a_{ij} = b_{ij}$$

# Квадратная матрица

Матрица, число строк которой равно числу столбцов

Количество строк =

= количество столбцов = ***n***

⇒ Квадратная матрица ***n**-го* порядка

# Диагональная матрица

- Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю

$$B = \begin{pmatrix} \mathbf{-5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

# Нулевая матрица

- Матрица, все элементы которой равны нулю

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

# Единичная матрица

- Диагональная матрица, каждый элемент главной диагонали равен единице

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Треугольная матрица

- Квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю

$$C = \begin{pmatrix} -\mathbf{5} & 5 & 9 & 8 \\ 0 & \mathbf{3} & -3 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{6} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

# Вектор

- Матрица, состоящая из одного столбца (**вектор-столбец**) или одной строки (**вектор- строка**)

$$X = \begin{pmatrix} -5 \\ 7{,}2 \\ 4\dfrac{2}{17} \\ 110 \end{pmatrix}$$

# ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

# Транспонирование

- Меняем местами строки и столбцы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

# Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -5 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 3 \\ 3 & 6 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

# Сложение матриц

- **Матрицы одного размера!!!**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{312} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{22}+b_{22} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}$$

# Пример

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 2 & -5 & 1 \\ -11 & 8 & -5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 6 & 0 & 7 \\ -4 & 16 & -10 \end{pmatrix}$$

# Умножение матрицы на число

$$k \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} k \times a_{11} & k \times a_{12} & k \times a_{13} \\ k \times a_{21} & k \times a_{22} & k \times a_{23} \\ k \times a_{31} & k \times a_{32} & k \times a_{33} \end{pmatrix}$$

- Получаем матрицу того же размера, что и исходная

# Пример

$$2 \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & -10 \end{pmatrix}$$

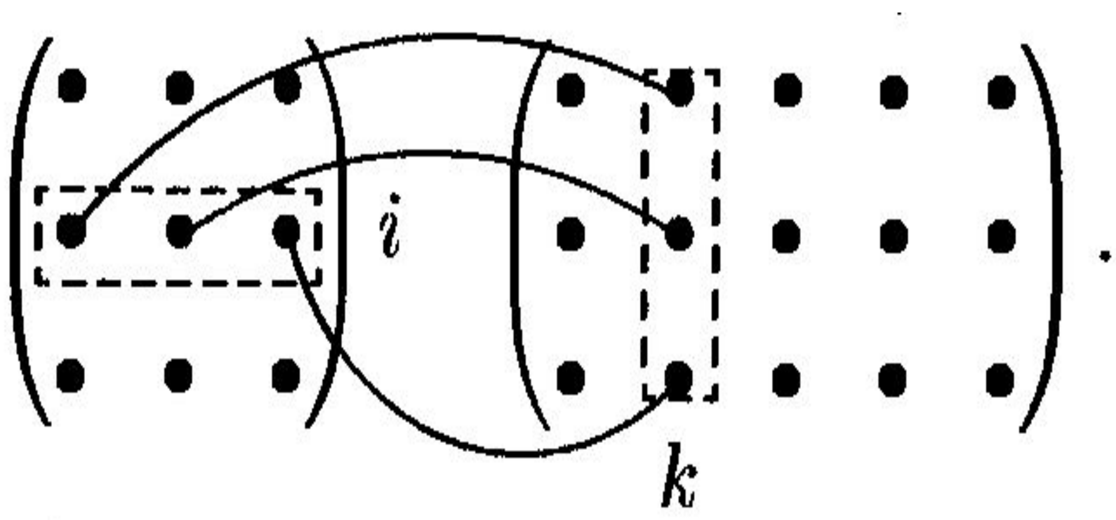
# Умножение матриц

- Количество столбцов в первой матрице равно количеству строк во второй

$$A_{m\times k} \times B_{k\times n} = C_{m\times n}$$

# Умножение матриц

- **СТРОКА НА СТОЛБЕЦ**



# Пример

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 3} \times \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 0 & -1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\times(-2)+2\times 0+3\times 7 & 1\times 8+2\times(-1)+3\times 9 \\ 4\times(-2)+5\times 0+6\times 7 & 4\times 8+5\times(-1)+6\times 9 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

$$= \begin{pmatrix} 19 & 33 \\ 34 & 81 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

# Задача

- Найти линейную комбинацию матриц **-3A +4 B**

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 5\\ 8 & 10 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}5 & 8 & 9\\ 4 & 0 & 2\\ 6 & 7 & 23\end{pmatrix}$$

# ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МАТРИЦ

Элементарные преобразования матриц = **эквивалентные** преобразования матриц

$$A \sim B$$

# Перестановка местами двух строк (столбцов) матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ 7 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

# Умножение всех элементов строки (столбца) на число ≠ 0

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{15 \times 1} & \mathbf{15 \times 2} & \mathbf{15 \times 3} \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{15} & \mathbf{30} & \mathbf{45} \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

Прибавление ко всем элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и то же число

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

- К первой строке прибавим вторую, умноженную на 10

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \mathbf{1+10\times 4} & \mathbf{2+10\times 5} & \mathbf{3+10\times 6} \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{41} & \mathbf{52} & \mathbf{63} \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

# СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ НАД МАТРИЦАМИ

# 1. Коммутативность

$$A + B = B + A$$

Операция умножения матриц **не является** коммутативной

$$A \times B \neq B \times A$$

# 2. Ассоциативность

$$(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$$

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C$$

# 3. Дистрибутивность

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$$

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$$

$$(\alpha \beta)A = \alpha (\beta A)$$

$$A \times (B+C) = A \times B + A \times C$$

$$(A + B) \times C = A \times C + B \times C$$

$$\alpha(A \times B) = (\alpha A) \times B$$

# 4.Наличие нейтрального элемента

$$A + O = O + A = A$$

$$A \times E = E \times A = A$$

$$1 \times A = A$$

# 5. Для операции транспонирования

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(A \times B)^T = B^T \times A^T$$

# Канонический вид матрицы

- Матрица имеет канонический вид, если у неё в начале главной диагонали идут единицы, а все остальные элементы равны нулю

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Любую матрицу с помощью эквивалентных преобразований можно привести к каноническому виду

# Ранг матрицы

- Количество линейно независимых строк (столбцов) матрицы

- **rang (A) или r(A)**

# Свойства ранга матрицы

- 1. При транспонировании матрицы её ранг не меняется
- 2. Если вычеркнуть из матрицы нулевую строку (нулевой столбец), то её ранг не изменится
- 3. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы

# Ранг канонической матрицы

- = количеству единиц на главной диагонали

# След квадратной матрицы

- Сумма её диагональных элементов

$$trace\,(A) = trA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

# Симметричная матрица

- Квадратная матрица, у которой

$$\forall\ i\ \forall j\ \ a_{ij} = a_{ji}$$