Системы счисления

Введение

Г.В. Лейбинц говорил: «Кто хочет ограничиться настоящим, без знания прошлого, тот никогда его не поймет…».

ГЛАВА I
Непозиционные системы

Чтобы иметь дело с числами, необходимо прежде всего уметь называть и записывать их.

Способ наименования и записи чисел принято считать *системой счисления.*

Египетская нумерация

Египтяне придумали свою систему счисления около 5 000 лет назад

В ней ключевые числа:1,10,100 и т.д.- изображались значками-иероглифами.

Это одна из древнейших систем записи чисел, известная человеку

1. Как и большинство людей для счета небольшого количества предметов Египтяне использовали палочки.

Если палочек нужно изобразить несколько, то их изображали в два ряда, причем в нижнем должно быть столько же палочек сколько и в верхнем, или на одну больше.

10. Такими путами египтяне связывали коров

Если нужно изобразить несколько десятков, то иероглиф повторяли нужное количество раз. Тоже самое относится и к остальным иероглифам.

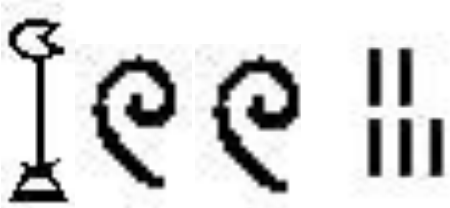
100. Это мерная веревка, которой измеряли земельные участки после разлива Нила.

1 000. Вы когда-нибудь видели цветущий лотос? Если нет, то вам никогда не понять, почему Египтяне присвоили такое значение изображению этого цветка.

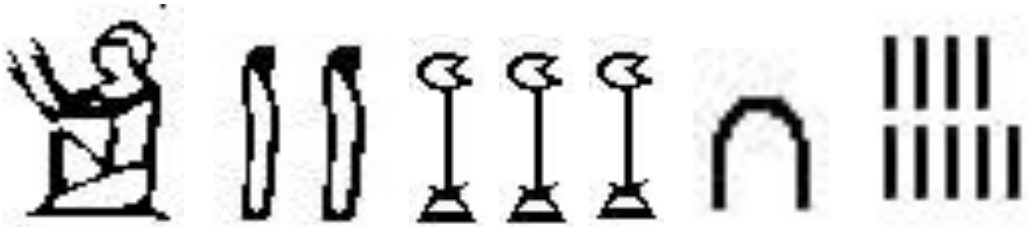
10 000. "В больших числах будь внимателен!" - говорит поднятый вверх указательный палец.

100 000. Это головастик. Обычный лягушачий головастик.

1 000 000. Увидев такое число обычный человек очень удивится и возденет руки к небу. Это и изображает этот иероглиф



-1205,



-1023019.

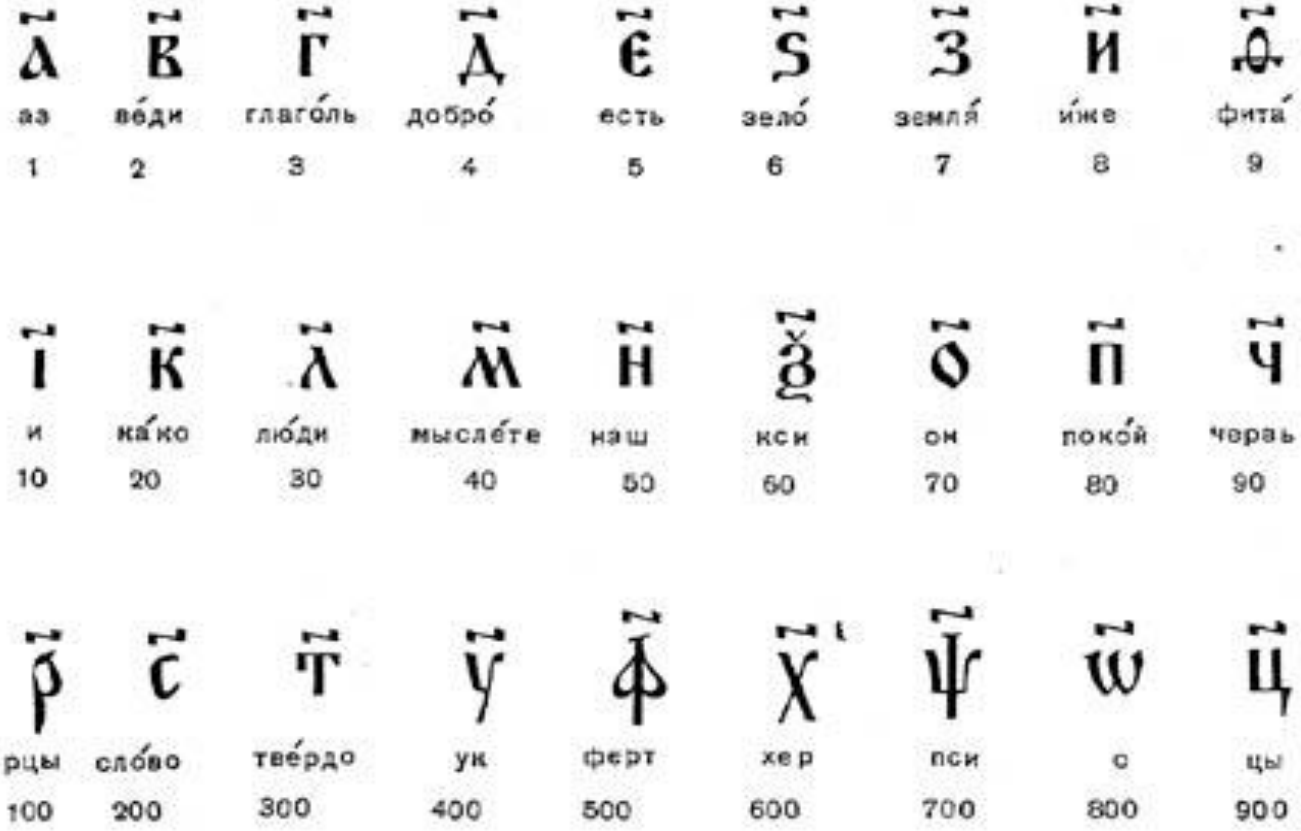
Алфавитная нумерация

В середине V в. до н. э. появилась запись чисел нового типа, так называемая **алфавитная нумерация**.

В этой системе записи числа обозначались при помощи букв алфавита., над которыми ставились черточки: первые девять букв обозначали числа от 1 до 9, следующие девять - числа 10, 20, 30, ..., 90, и следующие девять - числа 100, 200, ..., 900.

Таким образом, можно было обозначать любое число до 999.

Славянская нумерация



например это число

$$2 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 10^3 = 2\,541\,000$$

Римская система счисления

До нас дошла римская система записи чисел, которая в некоторых случаях применяется в нумерации (века, тома в собрании сочинений и др.). В римской системе в качестве цифр используются латинские буквы:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Эта система непозиционная.

В ней цифры записываются слева направо.

Римская система счисления

1. *Если знак, изображающий меньшее число, стоит после знака, изображающего большее число, то производится сложение.*

VI=5+1=6,

XV=10+5=15,

CLV=100+5+5=155,

MCCV=1000+100+100+5=1205.

2. *Если знак, изображающий меньшее число, стоит перед знаком, изображающим большее число, то производится вычитание:*

IV=5-1=4,

IX= 10-1=9,

XL=50-10=40,

XC=100-10=90,

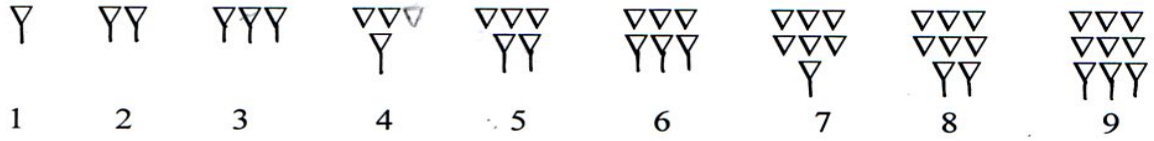
MCDXXIX=1000+ (500-100)+ 10+10+ (10-1)=1429.

Происхождение позиционных систем счисления

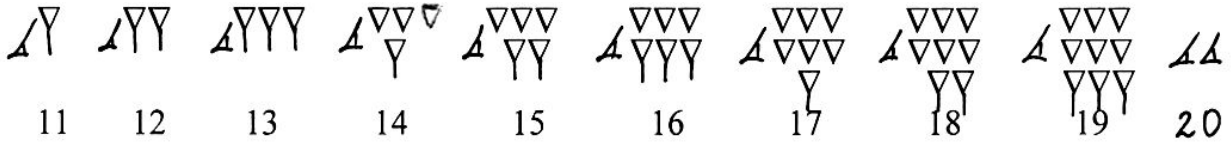
Около 1700 г. до н.э.

Глиняные таблички, найденные в Месопатамии с культурным центром - г.Вавилон.

Вавилоняне писали палочками на глиняных пластинках. Все числа они записывали при помощи двух знаков – означавшего единицу и горизонтального клина означавшего 10. Первые девять чисел натурального ряда у них записывались так:



Числа второго десятка записывали в таком виде



Система счисления ацтеков и майя

У ацтеков и майя, населявших американский континент и создавших там высокую культуру, почти полностью уничтоженную испанскими завоевателями в XVI - XVII в., была принята двадцатеричная система счисления.

Та же система была принята у кельтов, населявших Западную Европу, начиная со II тысячелетия до нашей эры.

Десятичная система

Эта система пришла к нам из Индии, где зародилась около V в н.э.

В десятичной системе счисления используется всего десять цифр – 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.

Значение каждой цифры в позиционной системе счисления определяется не только ею самой, но также и местом (позицией), которое она занимает в записи числа.

$$135609 = 1 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0 .$$

Позиционные системы счисления

В позиционных системах значение применяемых символов (цифр) зависит от места, которое он занимает в записи числа. При этом сдвиг цифры на одно место влево влечет увеличение ее числового значения в g- раз, где g- некоторое натуральное число, больше единицы. Число g – называют основанием системы счисления.

Определение: *Систематической записью натурального числа m по основанию g называют представление этого числа в виде суммы:*

$$m = k_n \cdot g^n + k_{n-1} \cdot g^{n-1} + \ldots + k_1 \cdot g + k_0,$$

$k_n, k_{n-1}, \ldots k_1, k_0$ – числа, принимающие значения от 0, 1, … , g – 1

При g >10 также используют необходимые цифры десятичной системы, а числа от десяти до g – 1 обычно записывают в виде соответствующих чисел, заключенных в круглые скобки: (10), (11), …, (g- 1).

Позиционные системы счисления

Система счисления - это совокупность правил для обозначения и наименования чисел.

Системы счисления делятся на позиционные и непозиционные.

Знаки, используемые при записи чисел, называются цифрами.

Арифметические действия над систематическими числами

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

Это таблицы сложения и умножения чисел в пятеричной системе

Для выполнения действий пользуются составленными таблицами сложения и умножения.

Перевод целых чисел из одной позиционной системы в другую

Пусть дана g- ичная запись числа m.

$$m = k_n \cdot g^n + k_{n-1} \cdot g^{n-1} + \ldots + k_1 \cdot g + k_0$$

Найти десятичную запись этого же числа.

Для решения этой задачи достаточно подставить в запись

$$m = k_n \cdot g^n + k_{n-1} \cdot g^{n-1} + \ldots + k_1 \cdot g + k_0$$

вместо $k_n \; k_{n-1} \ldots k_0$ и g – десятичные записи этих чисел и выполнить действия. и g – десятичные записи этих чисел и выполнить действия.

Найти десятичную запись числа

- Найти десятичную запись числа

$$(10)6(11)_{12} = 10 \cdot 12^2 + 6 \cdot 12^1 + 11 \cdot 12^0 = 1523_{10}.$$

Перевод целых чисел из одной позиционной системы в другую

Пример 1.

1) Найти десятичную запись числа 4602_7

$$4602_7 = 4 \cdot 7^3 + 6 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7^1 + 2 \cdot 7^0 = 1668_{10}.$$

2) Найти десятичную запись числа $(10)6(11)_{12}$.

$$(10)6(11)_{12} = 10 \cdot 12^2 + 6 \cdot 12^1 + 11 \cdot 12^0 = 1523_{10}.$$

3) Найти десятичную запись числа 4602_7

$$4602_7 = 4 \cdot 7^3 + 6 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7^1 + 2 \cdot 7^0 = 1668_{10}.$$

Число 58 перевести в двоичную систему счисления.

Выполним деление 58 на 2.

Таким образом $58_{10} = 111010_2$

Двоичная система счисления

Официальное рождение двоичной арифметики связанно с именем Г.В. Лейбница, опубликовавшего в 1703 г. статью, в которой он рассмотрел правила выполнения арифметических действий над двоичными числами.

Двоичная система проста, так как для представления информации в ней используются всего два состояния или две цифры.

Представление информации в двоичной системе использовалось человеком с давних времен.

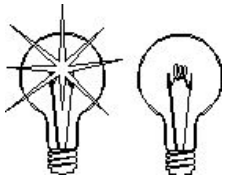
Так, жители островов Полинезии передавали необходимую информацию при помощи барабанов: чередование звонких и глухих ударов.

Единица – вздор. Единица – ноль.”
В. Маяковский

Для электронных машин характерно наличие двух различных устойчивых состояний (есть ток- нет тока, намагничен – не намагничен).

Поэтому для изображения чисел в вычислительных машинах требуется такая система, в которой имеются лишь две различные цифры т.е. двоичная система счисления.

“***Единица”*** условно обозначает включенное состояние,
а “***нуль”*** - выключенное состояние.



Почему люди пользуются десятичной системой, а компьютеры — двоичной?

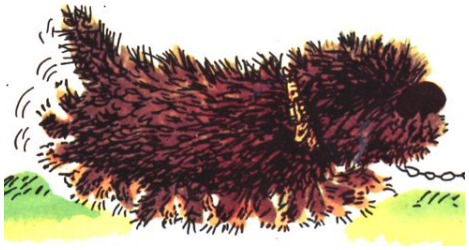
Компьютеры используют двоичную систему потому, что она имеет ряд преимуществ перед другими системами:

- для ее реализации нужны технические устройства с двумя устойчивыми состояниями (есть ток — нет тока, намагничен — не намагничен и т.п.), а не, например, с десятью, — как в десятичной
- представление информации посредством только двух состояний надежно и помехоустойчиво;
- двоичная арифметика намного проще десятичной.

Решение задач в различных системах счисления

«Необыкновенная девочка» А.Н.Стариков

Ей было тысяча сто лет,
Она в сто первый класс ходила,
В портфеле по сто книг носила –
Все это правда, а не бред.
Когда, пыля десятком ног,
Она шагала по дороге,
За ней всегда бежал щенок
С одним хвостом, зато стоногий.
Она ловила каждый звук
Своими десятью ушами,
И десять загорелых рук
Портфель и поводок держали.
И десять темно-синих глаз
Рассматривали мир привычно…
Но станет все сейчас обычным,
Когда поймете мой рассказ



Решение.

«Ей было тысяча сто лет»

$1100 = 1 * 2^3 + 1 * 2^2+0*2+0*2^0 = 8 + 4 = 12$ лет

«Она в сто первый класс ходила»

$101 = 1*. 2^2 +0*2+ 1*2^0 = 4 + 1 = 5$ класс

«…пыля десятком ног»

$10 =1* 2+0*2^0 = 2$ ноги

«С одним хвостом, зато стоногий»

$1 = 1*2^0 = 1$ хвост,

$100 = 1*2^2+0*2+0*2^0 = 4$ ноги

и т.д.

Ответ: двоичная с/с.

Ей было 12 лет,
Она в 5 класс ходила,
В портфеле по четыре книги носила.
Все это правда, а не бред.
Она ловила каждый звук
Своими двумя ушами,
И две загорелые руки
Портфель и поводок держали.
Когда, пыля двумя ногами,
Она шагала по дороге,
За ней всегда бежал щенок
С одним хвостом, зато четырехногий.
И двое темно-синих глаз
Рассматривали мир привычно …
Но станет все совсем обычным,
Когда поймете наш рассказ.

Загадочная автобиография

В бумагах одного математика была найдена странная автобиография:

«Я окончил курс университета 44 лет отроду. Спустя год, 100- летним молодым человеком, я женился на 34-летней девушке. Незначительная разница в возрасте – всего 11 лет способствовала тому, что мы жили общими интересами и мечтами. Спустя немного времени у меня уже была маленькая семья из 10 детей. Жалованья я получал в месяц всего 200 руб., из которых 1/10 приходилось отдавать сестре, так, что мы жили на 130 руб. в месяц.»

Расшифруйте автобиографию.

Решение: Запись выполнена в пятеричной системе. Выполним перевод чисел в десятеричную систему:

44 = 4 5+ 4 =24, аналогично 100 = 1 5 +0 5 +0= 25, 34 = 3 5+ 4 =19, 11= 1 5+1= =6, 200 = 2 5+ 0 5+ 0= 50, 10 = 5, 1/10 = 1/5, 130 = 1 5 + 3 5 + 0 = 40.

Записка имеет следующее содержание:

«Я окончил курс университета 24 лет отроду . Спустя год, 25-летним молодым человеком, я женился на 19-летней девушке. Незначительная разница в возрасте – всего 6 лет способствовала тому, что мы жили общими интересами и мечтами. Спустя немного времени у меня уже была маленькая семья из 5 детей. Жалованья я получал в месяц всего 50 руб., из которых 1/5 приходилось отдавать сестре, так , что мы жили на 40 руб. в месяц.».

Задача

Один школьный учитель на наш вопрос -много ли у него в классе учеников, ответил: «У меня в классе 100 детей, из них 24 мальчика и 32 девочки».

Сначала его ответ нас удивил. Но потом мы поняли, что просто учитель пользовался не десятичной системой. Какую систему имел в виду учитель?

Решение:

Пусть х- основание системы счисления о которой идет речь.

Тогда слова учителя означают следующее: у него

$100_x = 1\ x^2 + 0\ x + 0 = x^2$ учеников, из них $24_x = 2x + 4$ мальчика и $32_x = 3x + 2$ девочки.
Таким образом, $2x + 4 + 3x + 2 = x^2$,

Решим уравнение

$x^2-5x-6=0,$

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 2{,}5 + 2{,}5^2 - 6 - 2{,}5^2 = 0,$$

$$(x - 2{,}5)^2 - 6{,}25 - 6 = 0,$$

$$(x - 2{,}5)^2 - 12{,}25 = 0,$$

$$(x - 2{,}5)^2 - 3{,}5^2 = 0,$$

$$(x - 2{,}5 - 3{,}5) \cdot (x - 2{,}5 + 3{,}5) = 0,$$

$$(x - 6) \cdot (x + 1) = 0,$$

$$x - 6 = 0 \quad \text{или} \quad x + 1 = 0$$

x=6, x= -1.

Так как -1 не может быть основанием системы счисления, то x=6. Итак, ответ учителя был дан в шестеричной системе; при этом было 1 36=36 учеников. Из них 2 6+4=16 мальчиков и 3 6+2=20 девочек.