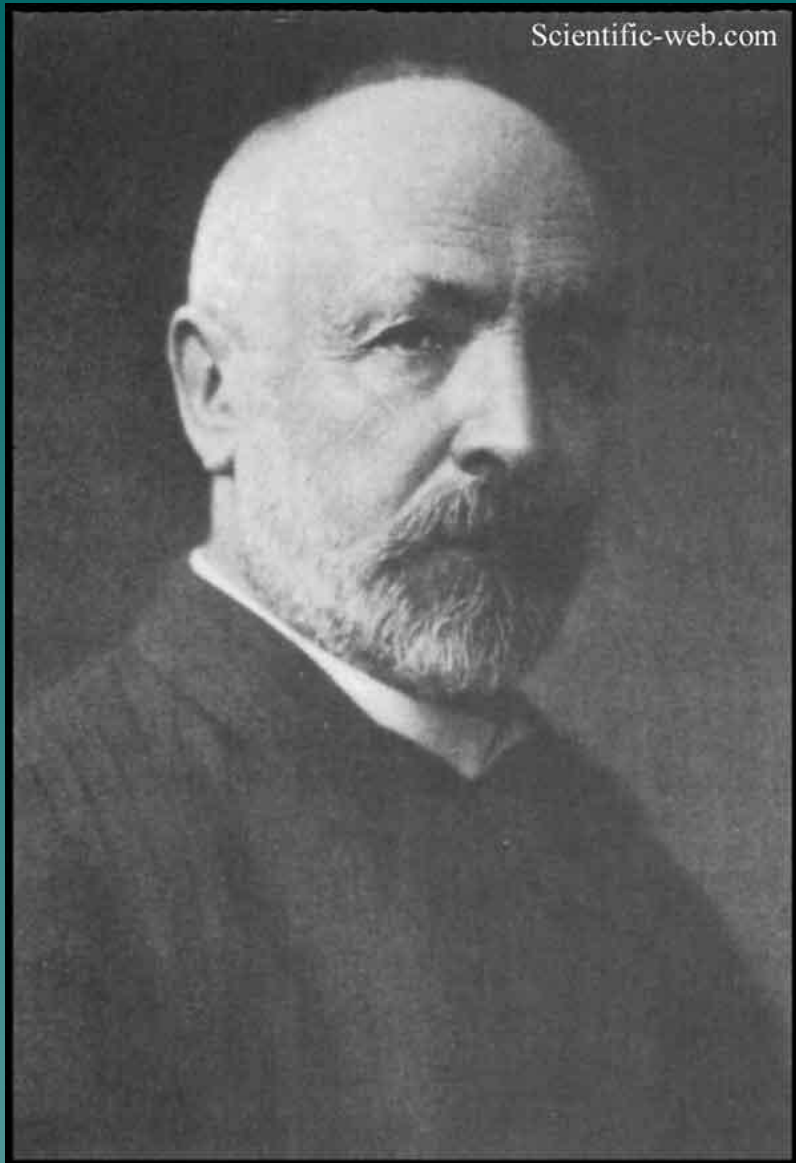


# Множества. Операции над множествами.



*«Множество  
есть многое,  
мыслимое  
нами как  
единое».*

*Основоположник  
теории множеств  
немецкий  
математик*

*Георг Кантор  
(1845-1918)*

# Основные определения теории множеств. Примеры

- Понятие множества является одним из фундаментальных понятий математики, которому трудно дать определение. Дело в том, что определить понятие – это значит найти такое родовое понятие, в которое это понятие входит в качестве вида, но понятие «множество» – это самое широкое понятие математики и математической логики, т.е. **категория**, а для категории нельзя найти более широкое, т.е. родовое понятие. Ограничимся описательным объяснением этого понятия.

# Основные определения теории множеств. Примеры

**Множество** – это набор, совокупность каких-либо **вполне различаемых** объектов, называемых его элементами, обладающими общими для всех их и только их свойствами, и рассматриваемых как единое целое.

## Примеры:

- множество людей, живущих сейчас в России,
- множество точек данной геометрической фигуры,
- множество решений данного уравнения.
- невозможно говорить о множестве капель в стакане воды, так как невозможно четко и ясно указать каждую отдельную каплю.

# Структура множества

- Каждое множество состоит из того или иного набора объектов, которые называются **элементами** множества.
- Факт, что элемент  $a$  принадлежит множеству  $X$  будем обозначать:  $a \in X$ .
- Порядок элементов в множестве несущественен. Множества  $\{a, b, c\}$  и  $\{a, c, b\}$  одинаковы.
- При этом, нужно иметь ввиду, что элемент  $a$  и множество  $\{a\}$  – это не одно и то же. Первое – это объект, обозначенный  $a$ , второе – это множество, состоящее из единственного элемента  $a$ . Поэтому можно сказать, что « $a$  принадлежит  $\{a\}$ » – это истинное суждение. В то время как, « $\{a\}$  принадлежит  $a$ » – это ложное суждение.

# Способы задания множества

1. Перечисление элементов множества. Обычно перечислением задают конечные множества.
2. Описание свойств, общих для всех элементов этого множества, и только этого множества. Это свойство называется **характеристическим свойством**, а такой способ задания множества **описанием**. Таким образом, можно задавать как конечные, так и бесконечные множества.

# Примерами множеств могут служить:

- а) множество всех натуральных чисел,
- б) множество всех целых чисел  
(положительных, отрицательных и нуля),
- в) множество всех рациональных  
чисел,
- г) множество всех действительных  
чисел,
- д) множество площадей треугольников,
- е) множество четырехугольников,

# Числовые множества

1. Множество **НАТУРАЛЬНЫХ** чисел  $N$ ,  $N=\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
2. Множество **ЦЕЛЫХ** чисел  $Z$ ,  $Z=\{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$   
 $\sqrt{2}=1,414213\dots$
3. Множество **РАЦИОНАЛЬНЫХ** чисел  $Q$ ,  $Q=\{x \mid x=p/q, \text{ где } p \in Z, q \in N\}$
4. Множество **ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ** чисел  $I$  - ,  
бесконечные непериодические дроби, ( $\pi=3,141592\dots$ ,  $e=2,718281, \dots$ )
5. Множество **ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ** чисел  $R$  получено объединением **РАЦИОНАЛЬНЫХ** и **ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ** чисел.
6. Множество **КОМПЛЕКСНЫХ** чисел  $C$ , содержащих в себе мнимую единицу  $i$ , которая является квадратным корнем из  $-1$ . Построены для



# Количество элементов

## Множества

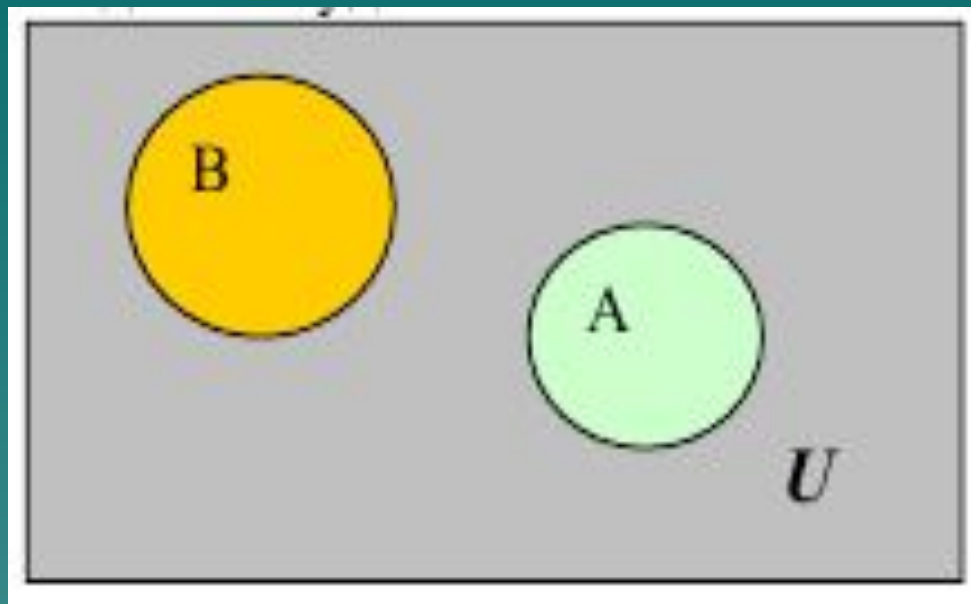
- Множества бывают конечными или бесконечными. Если число элементов множества конечно – множество называется конечным.
- Определение: Количество элементов, составляющих множество, называется **мощностью множества**.
- Определение: Если между элементами бесконечного множества можно установить взаимнооднозначное соответствие с элементами множества положительных целых чисел, то говорят, что множество счетно.
- Например:
  - множество действительных чисел - бесконечное множество.
  - множество чисел, делящихся без остатка на 3 – счетное множество,
  - множество букв русского алфавита, множество отличников вашей группы – конечно.

# Равенство множеств

- ◆ Определение: Два множества равны между собой, если они состоят из одних и тех же элементов.
- ◆ Т.е. любой элемент множества  $X$  является элементом множества  $Y$ , и любой элемент множества  $Y$  является элементом множества  $X$ .

# Диаграммы Эйлера-Венна

- Для наглядного представления (графического изображения) множеств и результатов операций над ними удобно пользоваться так называемыми диаграммами Эйлера-Венна (кругами Эйлера).
- При этом множества изображаются на плоскости в виде замкнутых кругов, а универсальное множество в виде прямоугольника. Элементы множества – точки внутри соответствующего круга.

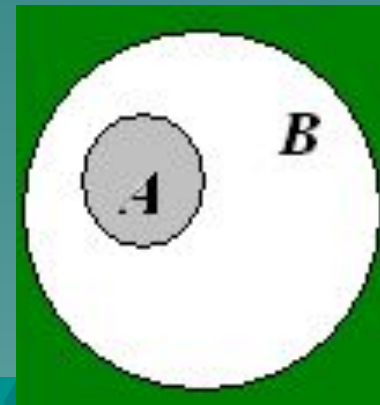


## «Парадокс брадобрея».

Одному солдату было приказано брить тех и только тех солдат его взвода, которые сами себя не бреют. Неисполнение приказа в армии, как известно, тягчайшее преступление. Однако возник вопрос, брить ли этому солдату самого себя. Если он побреется, то его следует отнести к множеству солдат, которые сами себя бреют, а таких брить он не имеет права. Если же он себя брить не будет, то попадёт во множество солдат, которые сами себя не бреют, а таких солдат согласно приказу он обязан брить. **Парадокс.**

# Подмножество. Включение

- ▣ Определение: Множество  $A$  является **подмножеством**  $B$ , если любой элемент множества  $A$  принадлежит множеству  $B$ . Это еще называется **нестрогим включением**  $A \subseteq B$ .
- ▣ Например:
- ▣ Пусть  $X$  – множество студентов некоторой группы,  $E$  – множество отличников этой же группы.
- ▣  $E \subseteq X$  т.к. группа может состоять только из отличников.
- ▣ Когда хотят подчеркнуть, что в множестве  $B$  есть обязательно элементы, отличные от элементов множества  $A$ , то пишут  $A \subset B$ . Это называется **строгим включением**.
- ▣ Например:
- ▣ Пусть  $X$  – множество всех студентов ВлГУ,  $E$  – множество студентов педагогического института.
- ▣  $E \subset X$  т.к. в множестве всех студентов ВлГУ обязательно есть элементы  $\notin E$ .



# Пустое множество $\emptyset$

- Если характеристическим свойством, задающим множество,  $A$  не обладает ни один объект, то говорят, что множество  $A$  пустое.
- Понятие пустого множества очень важное понятие. Оно позволяет описательно задавать множества, не заботясь, есть ли в этом множестве элементы и совершенно спокойно оперировать с этими множествами. Пустое множество будем считать конечным множеством.
- Например: множество действительных корней уравнения

$$x^2 = -1$$

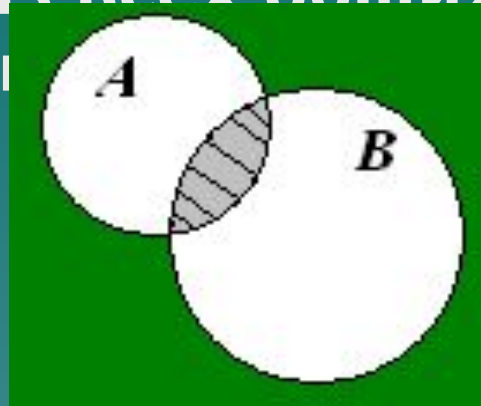
пустое.

# Операции над множествами



# 1. Пересечение множеств $A \cap B$

Пересечением множества  $A$  и  $B$  называют множество, состоящие из всех общих элементов множеств  $A$  и  $B$ .



Например,

а)  $A = \{3; 9; 12\}$  и  $B = \{1; 3; 5; 7; 9; 11\}$ , то  $A \cap B =$

$\{3;$   
 $9\}$ ;

$\{3;$

б)  $A = \{10; 20; \dots; 100\}$  и  $B = \{6; 12; 18; \dots\}$ , то



# Непересекающиеся множества

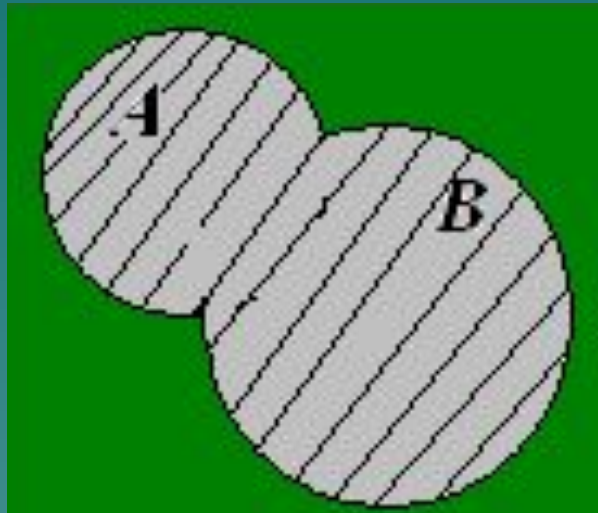
- ▣ Определение: Множества называются непересекающимися, если не имеют общих элементов, т.е. их пересечение равно пустому множеству.
- ▣ Например:
  - непересекающимися множествами являются множества отличников группы и неуспевающих.
  - непересекающимися множествами являются множества  $A = \{3; 9; 12\}$  и  $B = \{1; 5; 7; 11\}$ .

# Свойства пересечения

- ◆  $X \cap Y = Y \cap X$  – коммутативность;
- ◆  $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z) = X \cap Y \cap Z$  – ассоциативность;
- ◆  $X \cap \emptyset = \emptyset$ ;
- ◆  $X \cap I = X$ ;

## 2. Объединение множеств $A \cup B$

Объединением множеств  $A$  и  $B$  называют множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из этих множеств.



Например,

$A = \{3; 9; 12\}$  и  $B = \{1; 3; 5; 7; 9; 11\}$ ,  
 $A \cup B = ?$

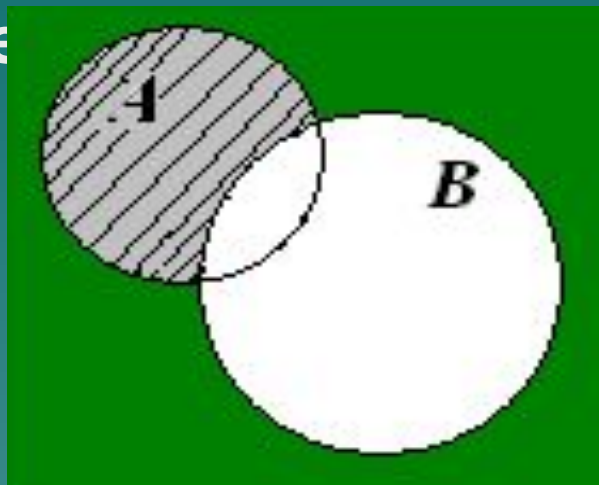
$A \cup B = \{1; 3; 5; 7; 9; 11; 12\}$ .

# Свойства объединения

- ◆  $XUY = YUY$  - коммутативность;
- ◆  $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z) = XUYUZ$  - ассоциативность;
- ◆  $XU\emptyset = X$ ;
- ◆  $XUI = I$ .

### 3. Разность множеств $A \setminus B$

Разность  $A$  и  $B$  это множество элементов  $A$ ,  
не  
принадле



Например,

$A = \{2; 4; 6; 8; 10\}$  и  $B = \{5; 10; 15; 20\}$ ,

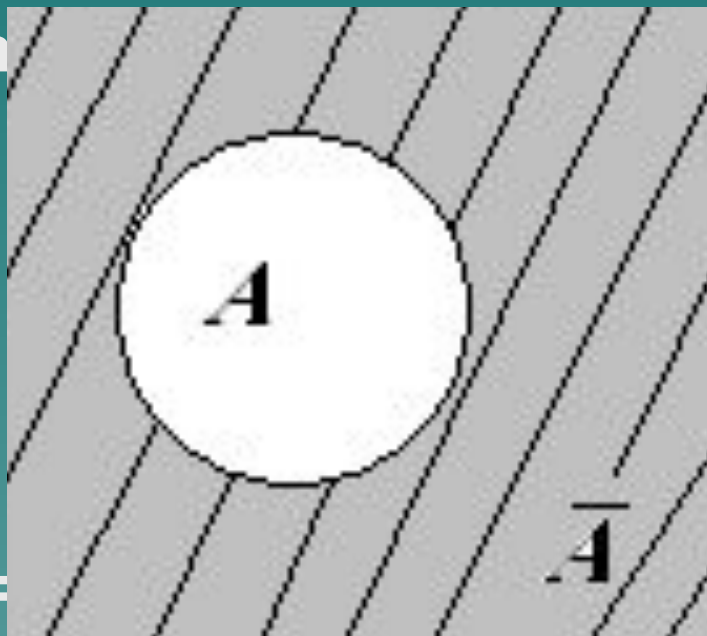
$A \setminus B = \{2; 4; 6; 8\}$ .

# Свойства операции разности

- ◆  $A \setminus B \neq B \setminus A;$
- ◆  $A \setminus A = \emptyset;$
- ◆  $A \setminus \emptyset = A;$
- ◆  $I \setminus A = \bar{A}.$

# 4. Дополнение множеств $\bar{A}$

Дополнением множества  $A$  называется разность  $I \setminus A$ . То есть, дополнением множества  $A$  называется множество, состоящее из всех элементов универсального множества, не принадлежащих к  $A$ .



Например,  $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; \dots\}$ ,  $\bar{A} = \{7; 8; 9; 10; 11; 12; \dots\}$

$\bar{A} = \{1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11; 13; \dots\}$ .

# Свойства дополнения

1. Множество  $X$  и его дополнение не имеют общих элементов  $X \cap \bar{X} = \emptyset$
2. Любой элемент  $I$  принадлежит или множеству  $X$  или его дополнению.  $X \cup \bar{X} = I$
3. Закон двойного отрицания  $\overline{\bar{X}} = X$



# Декартово произведение множеств

Фабрика верхнего трикотажа изготавливает мужские пуловеры, женские костюмы, кофты и платья следующих расцветок: бордо, синяя, голубая, зеленая, коричневая, серая.

Посмотрим, какие изделия можно получить, учитывая возможные для них расцветки.

Обозначим через  $A$  множество видов изделий:  $A = \{\text{мужской пуловер, женский костюм, кофта, платье}\}$ , через  $B$  – множество предлагаемых расцветок:  $B = \{\text{бордо, синяя, голубая, зеленая, коричневая, серая}\}$ .

Составим список всех пар из элементов множества  $A$  и элементов множества  $B$  таким образом, что сначала будем записывать элемент множества  $A$ , затем элемент множества  $B$ . получим множество  $C$  упорядоченных пар элементов множеств  $A$  и  $B$ . Возможные изделия можно перечислить с помощью таблицы.

# Декартово произведение множеств

<b>В \ А</b>	<b>Мужской пуловер</b>	<b>Женский костюм</b>	<b>Кофта</b>	<b>Платье</b>
Бордо	Пуловер-бордо	костюм-бордо	Кофта-бордо	Платье-бордо
Синяя	Пуловер-синий			
Голубая				
Зеленая			Кофта-зеленая	
Коричневая				Платье-коричневое
Серая		Костюм-серый		

# Определение декартова произведения

Декартовым (или прямым) произведением  $A \times B$  множества  $A$  на множество  $B$  называется множество всех упорядоченных пар, в которых первая компонента – элемент множества  $A$ , а вторая – элемент множества  $B$ .

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

Количество элементов в декартовом произведении двух множеств:  
если  $m(A) = n$ ,  $m(B) = k$ , то  $m(A \times B) = n \cdot k$ .

# Пример декартова произведения

Вычислить количество двухзначных чисел.

Двухзначное число можно принять за упорядоченную пару, где на первом месте может стоять цифра из множества  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , а на втором – из множества  $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , т.е. за элемент прямого произведения этих множеств, тогда получаем:  
 $m(A) = 9$ ,  $m(B) = 10$ , то  $m(A \times B) = 9 \cdot 10 = 90$ .

Итак, всего имеется 90 различных двухзначных чисел.

# Соответствие множеств

- ▣ **Определение.** Будем говорить, что между элементами двух множеств  $A$  и  $B$  установлено соответствие  $\rho$ , если в их произведении  $A \times B$  выделено некоторое подмножество  $\Omega$ . Если пара  $(a, b) \in \Omega \subseteq A \times B$ , это означает по определению, что элементы  $a$  и  $b$  множеств  $A$  и  $B$  находятся в отношении  $\rho$  (пишется  $a \rho b$ ).
- ▣ **Пример соответствия.** Пусть даны множества  $A$  – студентов и  $B$  – множество групп. Утверждение “студент  $a$  учится в группе  $b$ ” задает соответствие между множеством студентов и множеством групп. Здесь  $a$  пробегает множество значений  $A$ ,  $b$  – множество значений  $B$ . Такое соотношение называется бинарным соответствием, т.е. соответствием между двумя множествами  $A$  и  $B$ .

# Пример соответствия множеств

Бинарные соответствия можно задавать таблицами (например, расписание занятий) или ориентированными графами.

Группы Студенты	1	2	3
Иванов			
Петров			
Сидоров			



# Отображение множеств $f$ :

$$X \rightarrow Y$$

**Определение.** Если каждому элементу  $x \in X$  поставлен в соответствие единственный элемент  $y \in Y$ , то такое соответствие называется отображением множества  $X$  в множество  $Y$ . Т.е., каждому элементу  $x$  соответствует только один элемент  $y$ .

При таком отображении множества  $X$  в множество  $Y$ , элемент  $y \in Y$  называется **образом** элемента  $x \in X$ , а элемент  $x \in X$  называется **прообразом** элемента  $y \in Y$ .

**Пример.** Пусть  $X$  – множество студентов в аудитории,  $Y$  – множество столов в этой аудитории. Соответствие “студент  $x$  сидит за столом  $y$ ” задает отображение множества  $X$  в множество  $Y$ , так как все студенты сидят за столом, иногда по двое, по трое и т.д., но есть и пустые столы.



# Сюръективное отображение

**Определение.** Если при отображении  $f$  каждый элемент множества  $Y$  является образом хотя бы одного элемента из  $X$ , то  $f$  называют отображением  $X$  на  $Y$  или сюръективным (рис.15).

**Пример 3.5** Пусть  $X$  – множество студентов,  $Y$  – множество книг. Соответствие “студенту  $x$  принадлежит книга  $y$ ” задает сюръективное отображение множества  $X$  на множество  $Y$ . Это очевидно, так как каждая книга принадлежит одному или нескольким студентам, а некоторые студенты книг не имеют.

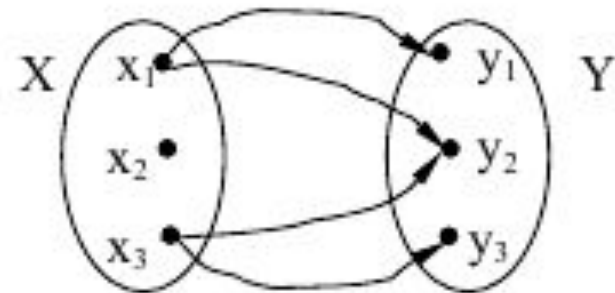


Рис.15



# Инъективное отображение

**Определение.** Если при отображении  $f$  все различные элементы множества  $X$  переходят в различные элементы множества  $Y$ , то отображение  $f$  называется инъективным отображением (рис.16).

**Пример 3.6** Пусть  $X$  – множество студентов,  $Y$  – множество стульев. Соответствие “студент  $x$  сидит на стуле  $y$ ” задает инъективное отображение между множествами  $X$  и  $Y$ . Это очевидно, так как все студенты сидят на стульях, причем каждый на своем, но в аудитории есть и пустые стулья.

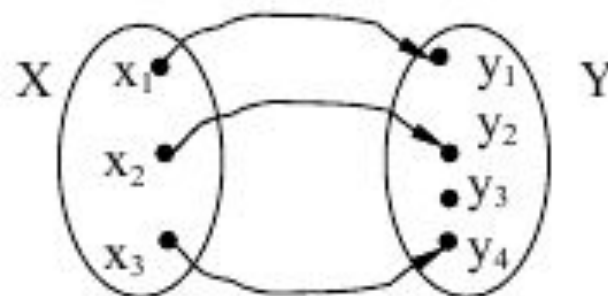


Рис.16

# Взаимно-однозначное соответствие

**Определение.** Если при отображении  $f$  каждому элементу  $x \in X$  поставлен в соответствие один элемент  $y \in Y$ , при этом соответствию каждому элементу  $y \in Y$  соответствует единственный элемент  $x \in X$ , то такое отображение называется взаимно-однозначным (рис.17).

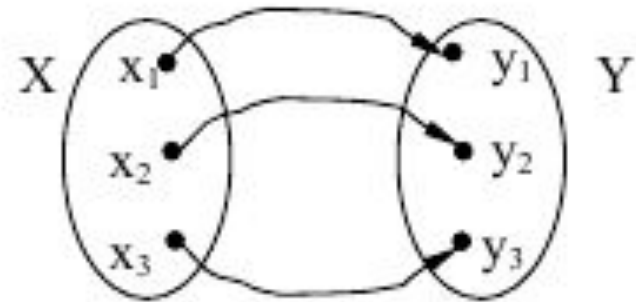


Рис.17

**Пример 3.7** Пусть  $X$  – множество студентов,  $Y$  – множество зачетных книжек. Соответствие “студенту  $x$  принадлежит зачетная книжка  $y$ ” задает взаимно-однозначное отображение между множествами  $X$  и  $Y$ . Это очевидно, так как все студенты имеют зачетные книжки, причем каждый только одну и каждая зачетная книжка принадлежит своему студенту.

# Задания



## Задание 1

1) Задайте множество цифр, с помощью которых записывается число:

а) 3254; б) 8797; в) 11000; г) 555555.

2) Задайте множество  $A$  описанием:

а)  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ; б)  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ;

в)  $A = \{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$ ;

г)  $A = \{0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; \dots\}$ ;

д)  $A = \{1/2, 2/3, 3/4, 4/5, \dots\}$ .

3) Задание с выбором ответа. Даны множества:  
 $M = \{5,4,6\}$ ,  $P = \{4,5,6\}$ ,  $T = \{5,6,7\}$ ,  $S = \{4, 6\}$ .

Какое из утверждений неверно?

а)  $M = P$ .    б)  $P \neq S$ .    в)  $M \neq T$ .    г)  $P = T$ .

## Задание 2

1. Запишите на символическом языке следующее утверждение:

- а) число 10 – натуральное;
- б) число – 7 не является натуральным;
- в) число – 100 является целым;
- г) число 2,5 – не целое.

2. Верно ли, что:

- а)  $-5 \in \mathbb{N}$ ; б)  $-5 \in \mathbb{Z}$ ; в)  $2,(\overline{45}) \in \mathbb{Q}$ ?

3. Верно ли, что:

- а)  $0,7 \in \{x \mid x^2 - 1 < 0\}$ ; б)  $-7 \in \{x \mid x^2 + 16x \leq -64\}$ ?

## Задание 3

1. Даны множества:

$$A = \{10\}, B = \{10, 15\}, C = \{5, 10, 15\}, D = \{5, 10, 15, 20\}.$$

Поставьте вместо ... знак включения  ( или ) так,

чтобы получилось верное утверждение:

а)  $A \dots D$ ; б)  $A \dots B$ ; в)  $C \dots A$ ; г)  $C \dots B$ .

2. Даны три множества  $A = \{1, 2, 3, \dots, 37\}$ ,  $B = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ ,

$$C = \{4, 8, 12, 16, \dots, 36\}.$$

Верно ли, что:

а)   $A \subset B$ ; б)   $B \subset C$ ; в)   $C \subset A$ ; г)   $C \subset B$ ?

## Задание 4

1. Даны множества:  $A = \{2; 3; 8\}$ ,  $B = \{2; 3; 8; 11\}$ ,  
 $C = \{5; 11\}$ .  
Найдите: 1)  $A \cap B$ ; 2)  $A \cap C$ ; 3)  $C \cap B$ .
2. Даны множества:  $A$  – множества всех натуральных чисел, кратных 10,  $B = \{1; 2; 3; \dots, 41\}$ .  
Найдите  $A \cap B$ .
3. Даны множества:  $A = \{a, b, c, d\}$ ,  $B = \{c, d, e, f\}$ ,  
 $C = \{c, e, g, k\}$ . Найдите  $(A \cap B) \cap C$ .

## Задание 5

1. Даны множества:  $A = \{2; 3; 8\}$ ,  $B = \{2; 3; 8; 11\}$ ,  $C = \{5; 11\}$ .

Найдите: 1)  $A \cup B$ ; 2)  $A \cup C$ ; 3)  $C \cup B$ .

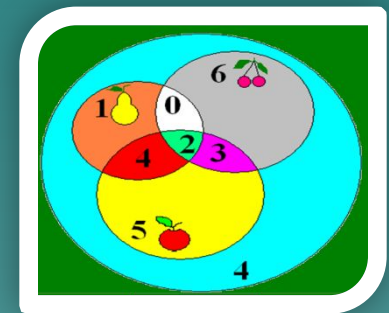
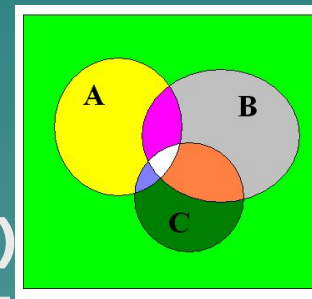
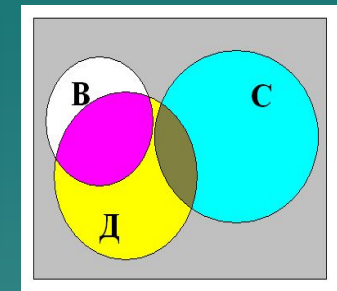
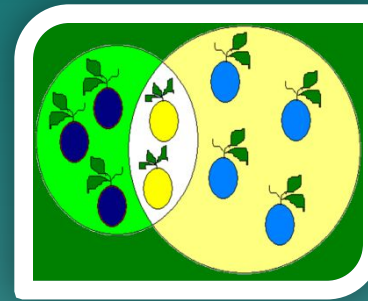
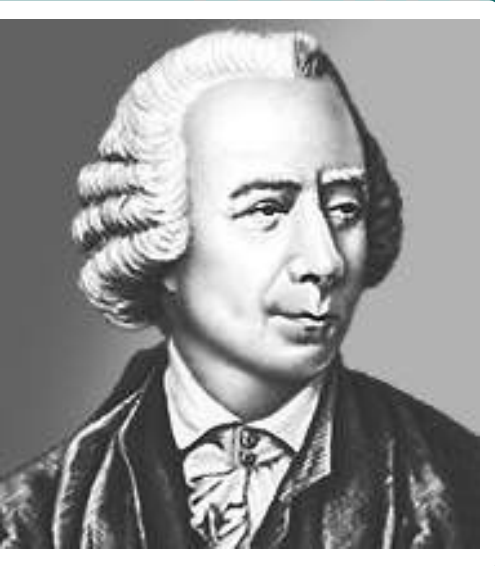
2. Даны множества:  $A = \{a, b, c, d\}$ ,  $B = \{c, d, e, f\}$ ,

$C = \{c, e, g, k\}$ .

Найдите  $(A \cup B) \cup C$ .



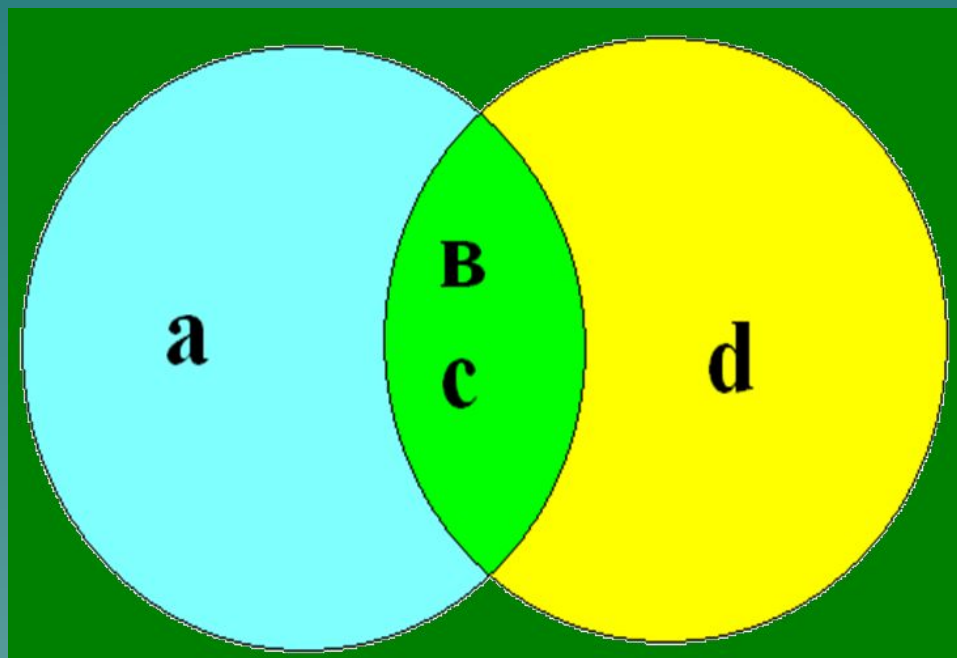
# Решение задач с помощью кругов Эйлера



ЭЙЛЕР Леонард (1707-1783)  
российский ученый — математик,  
механик, физик и астроном.

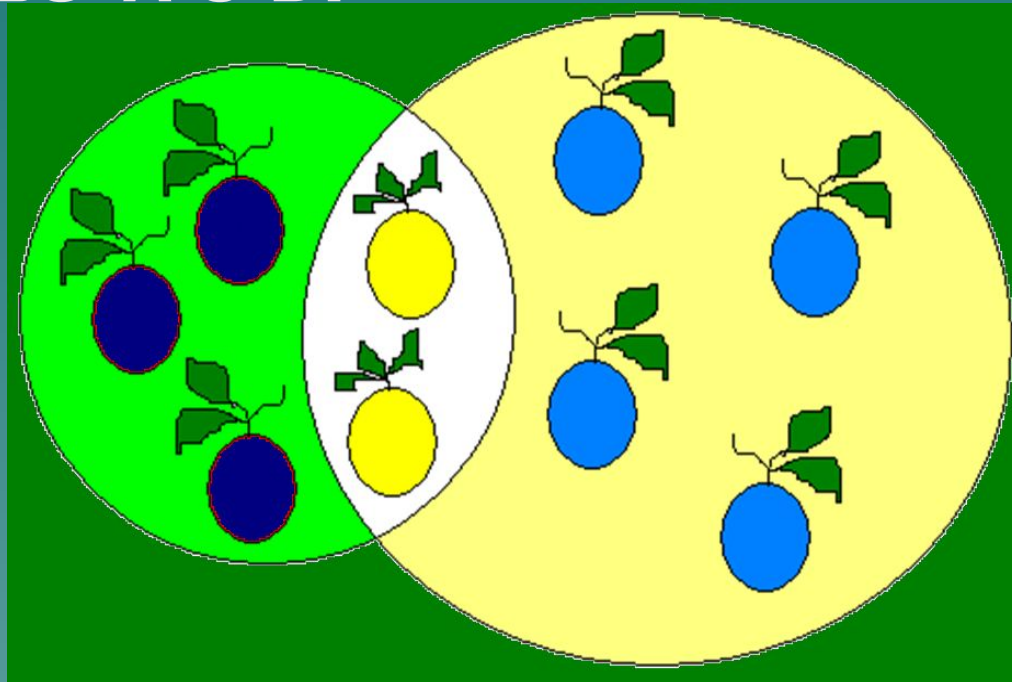
# Задача 1

Расположите 4 элемента в двух множествах так, чтобы в каждом из них было по 3 элемента.



# Задача 2

Множества  $A$  и  $B$  содержат соответственно 5 и 6 элементов,  
а множество  $A \cap B$  – 2 элемента. Сколько  
элементов в  
множестве  $A \cup B$ ?



# Задача 3

Каждая семья, живущая в нашем доме, выписывает или

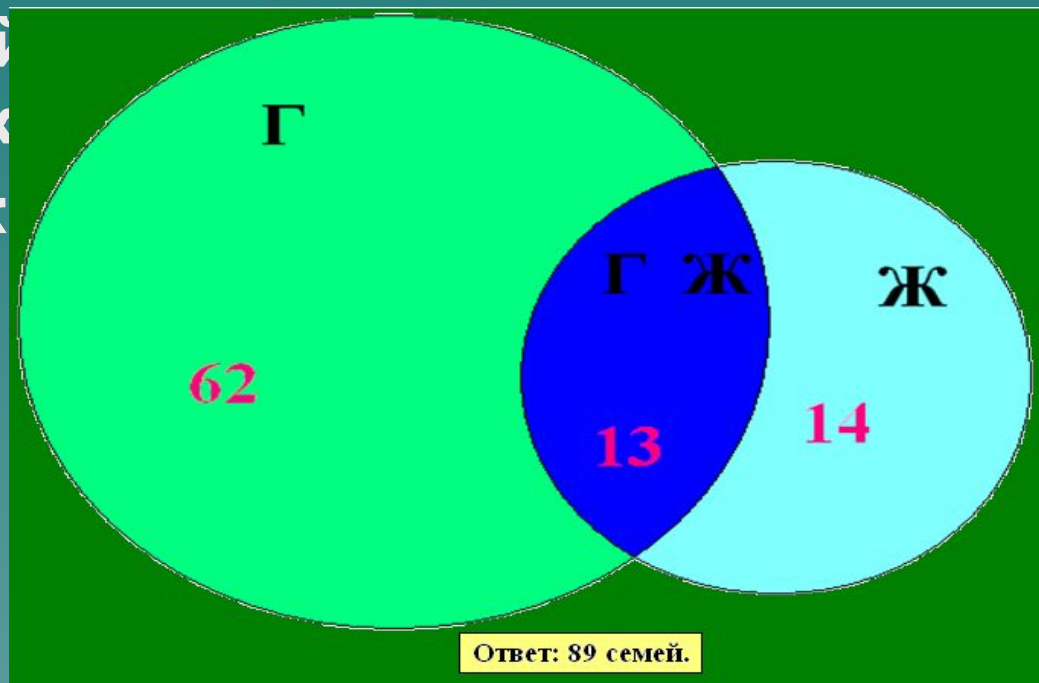
газету, или журнал, или и то и другое вместе. 75 семей

выписывают газету, а 27 семей выписывают журнал и лишь

13 семей выписывают и газету, и журнал.

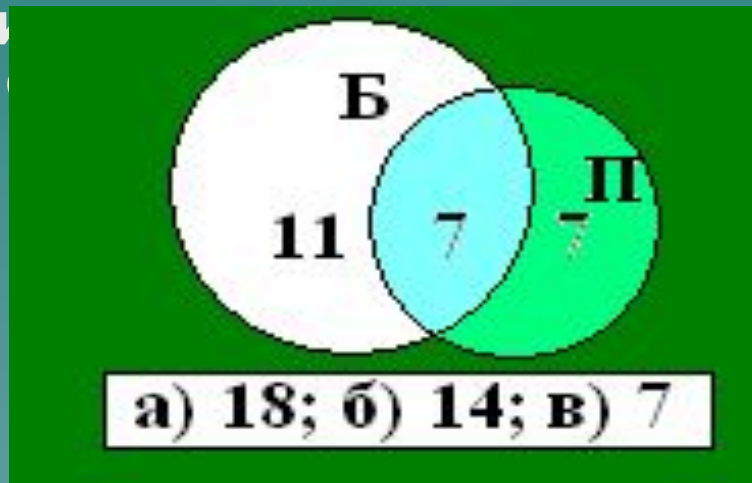
Сколько семей ж

семей ж



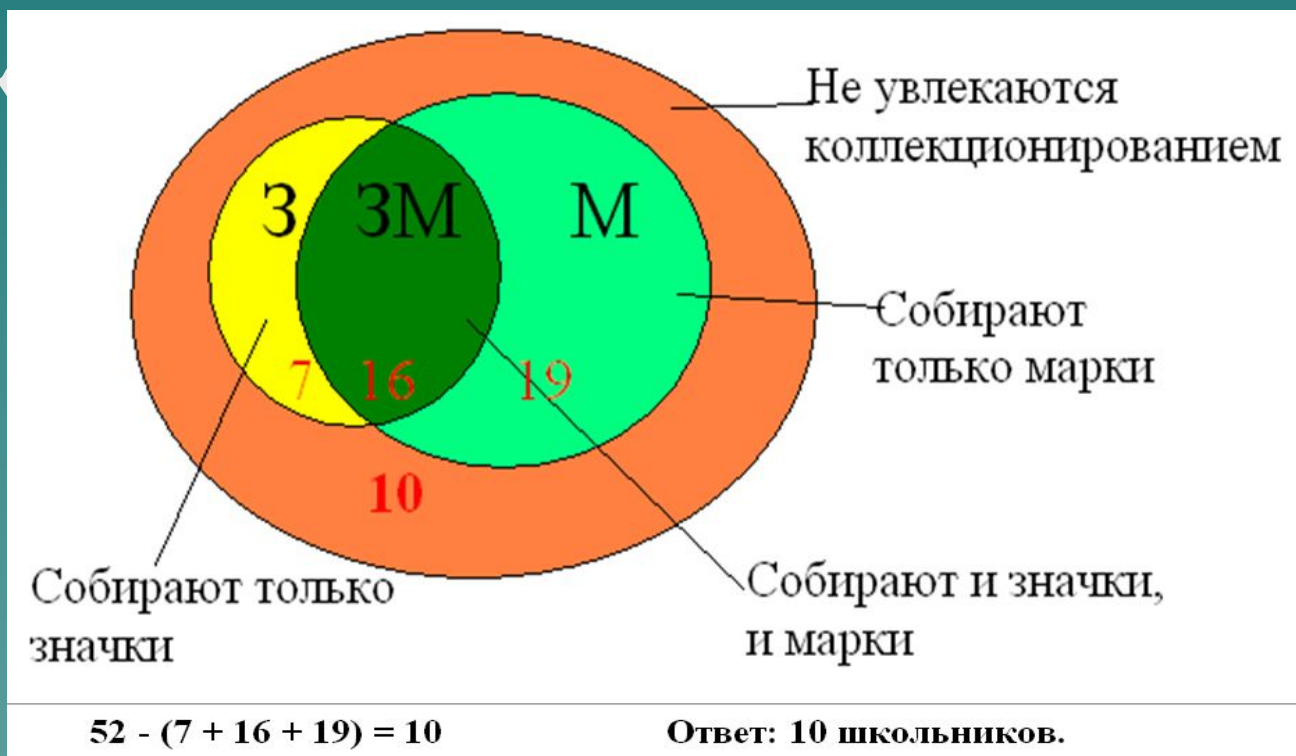
# Задача 4

На школьной спартакиаде каждый из 25 учеников 9 –го класса выполнил норматив или по бегу, или по прыжкам в высоту. Оба норматива выполнили 7 человек, а 11 учеников выполнили норматив по бегу, но не выполнили норматив по прыжкам в высоту. Сколько учеников выполнили норматив: а) по бегу; б) по прыжкам в высоту; в) по прыжкам при выполнении норматив по бегу



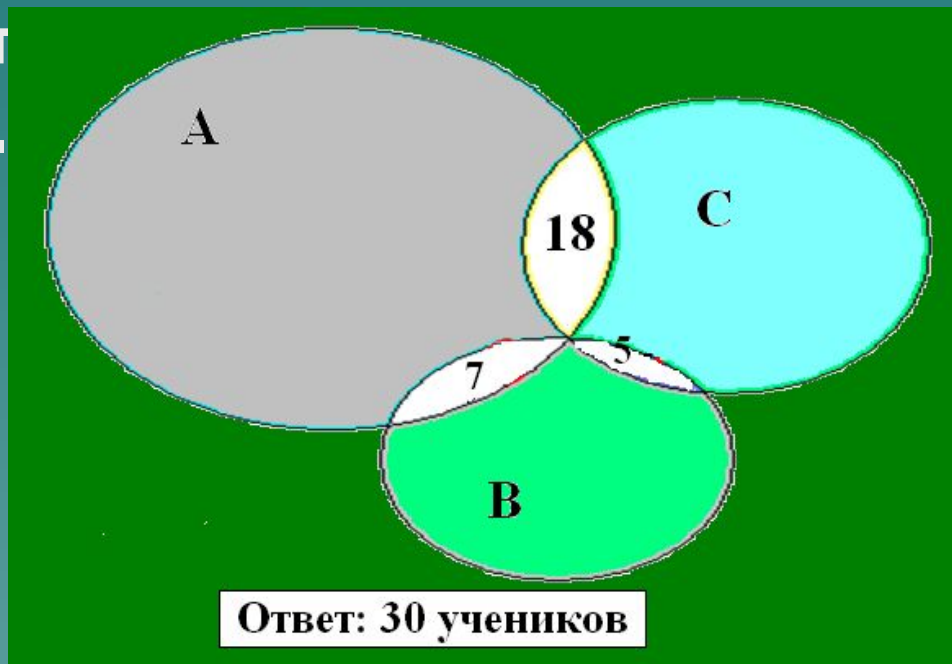
# Задача 5

Из 52 школьников 23 собирают значки, 35 собирают марки, а 16 – и значки, и марки. Остальные не увлекаются коллекционированием. Сколько школьников не увлекаются коллекционированием.



# Задача 6

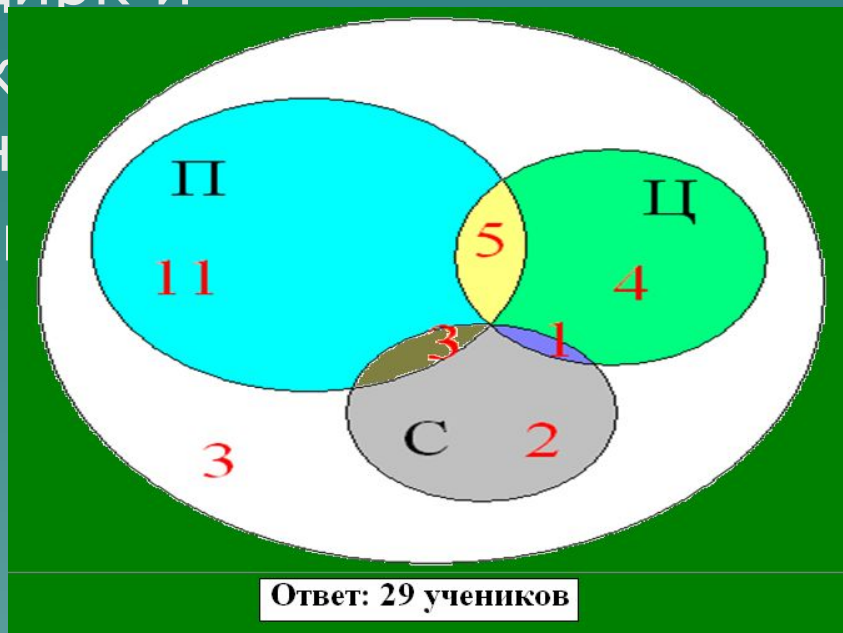
Каждый из учеников 9-го класса в зимние каникулы ровно два раза был в театре, посмотрев спектакли А, В или С. При этом спектакли А, В, С видели соответствующие ученика.



се?

# Задача 7

В воскресенье 19 учеников нашего класса побывали в планетарии, 10 – в цирке и 6 – на стадионе. Планетарий и цирк посетили 5 учеников; планетарий и стадион-3; цирк и стадион -1. Сколько учеников в классе, если никто не успел посетить ни одного места?



классе,  
еника не

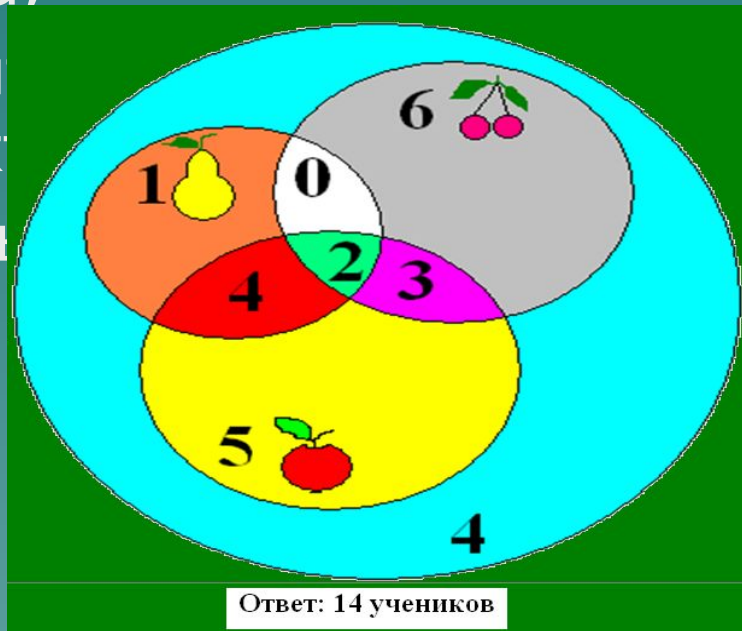


# Задача 8

В одном классе 25 учеников. Из них 7 любят груши, 11 – черешню. Двое любят груши и черешню; 6 – груши и яблоки; 5 – яблоки и черешню. Но есть в классе два ученика,

которые любят фрукты вообще. Сколько учеников любят яблоки?

, что не  
асса любят



# Задача 9

На уроке литературы учитель решил узнать, кто из 40

учеников 9 –го класса читал книги А, В, С.

Результаты

опроса выглядели так: книгу А прочитали 25 учеников,

книгу В – 22 ученика, книгу С – 22 ученика; одну из книг А

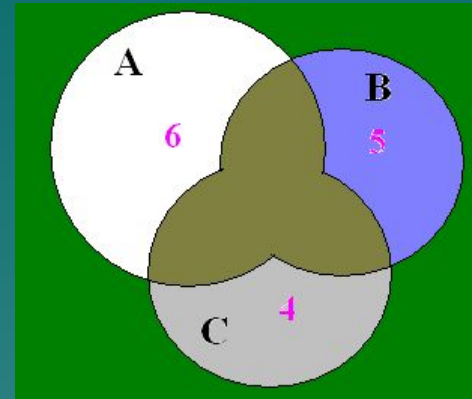
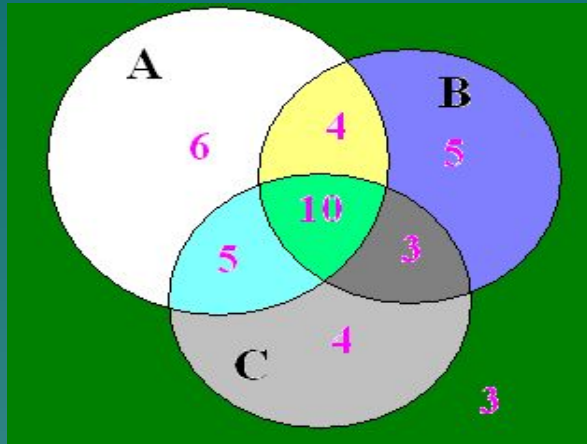
или В прочитали 33 ученика, одну из книг А или С прочитали 32 ученика, одну из книг В или С – 31 ученик.

Все три книги прочитали 10 учеников.

Сколько учеников:

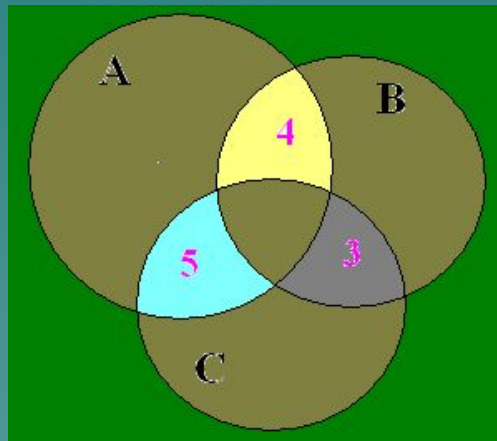
- а) прочитали только по одной книге;
- б) прочитали ровно две книги;
- в) не прочили ни одной из указанных книг?

# Задача 9. Решение



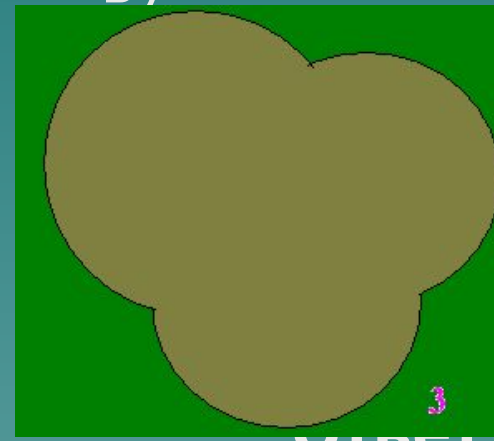
ответ: 15

б)



ответ: 22 учеников  
ученика

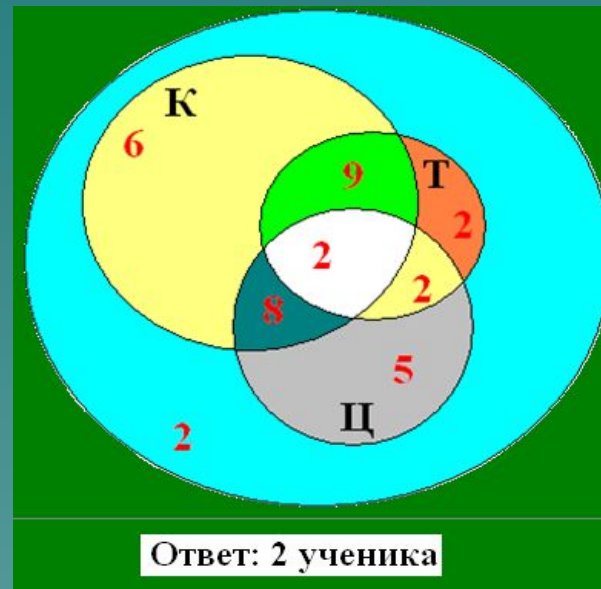
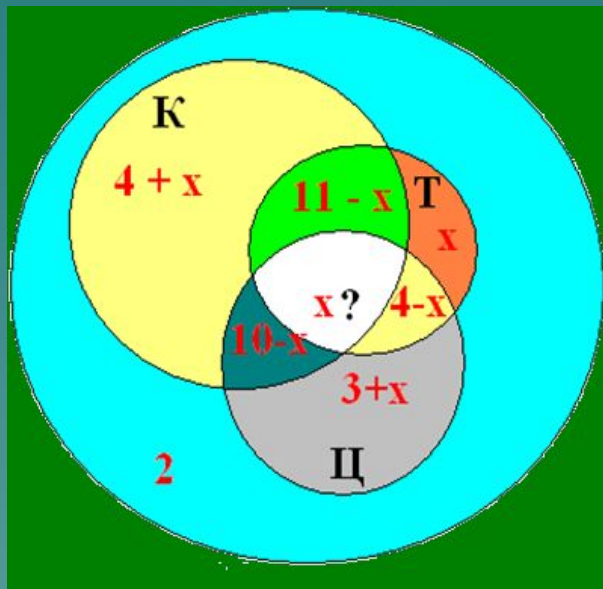
в)



ответ: 3

# Задача 10

На зимних каникулах из 36 учащихся класса только двое просидели дома, а 25 ребят ходили в кино, 15 – в театр, 17 – в цирк. Кино и театр посетили 11 человек, кино и цирк – 10, театр и цирк – 4. Сколько ребят побывало и в кино, и в театре, и в цирке?



## Литература

[1] Алгебра, 9 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / [А. Г. Мордкович, Л.А. Александрова и др.] -12-е изд., испр. - М.: Мнемозина, 2010.

[2] Занимательная математика. 5 – 11 классы. Авт.- сост. Т.Д. Гаврилова. – Волгоград: Учитель, 2005. – 96 с.

[3] Математика 6 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / Г.В. Дорофеев, И.Ф.

Шарыгин, С.Б. Суворова и др./; под ред. Г.В. Дорофеева, И.Ф. Шарыгина; Рос. акад. наук, Рос. акад. образования, изд-во «Просвещение». – 11 –е изд. - М.: Просвещение, 2010. – 303 с.: ил.

# Связь между алгеброй логики и теорией множеств

- Дело в том, что термин **алгебра** в своем роде имя нарицательное. Под ним понимается раздел математики, изучающий алгебраические операции, а природа объектов, к которым применяются эти операции, не важна. Говоря об алгебре логики или об алгебре множеств, мы более всего уделяли внимание операциям, определенным над допустимыми в данной теории объектами, свойствам этих операций. Еще одним хорошо известным вам примером алгебры, является **алгебра чисел**, к которой все выписанные законы также применимы. Проводя аналогии между этими алгебрами, мы можем сказать

## № 5.

В классе 30 человек, каждый из которых поёт или танцует. Известно, что поют 17 человек, а танцевать умеют 19 человек. Сколько человек поёт и танцует одновременно?

# Решение 1.

Пусть  $A$  - это множество учеников, умеющих петь.  
Количество элементов в нём по условию равно  $n = 17$ .  
Пусть  $B$  - множество учеников, умеющих танцевать.  
Количество элементов в нём -  $m = 18$ . Множество  $A \cap B$   
совпадает со всем классом, т.к. каждый ученик в классе  
поёт или танцует.  $A \cap B$  - это множество тех учеников  
класса, которые поют и танцуют одновременно. Пусть их  
количество равно  $k$ .  
Согласно формуле доказанной выше  
 $n + m - k = 17 + 19 - k = 30 \quad k = 6$ .  
Ответ: 6 учеников в классе поют и танцуют одновременно.



## Решение 2.

Сначала заметим, что из 30 человек не умеют петь  $30 - 17 = 13$  человек.

Все они умеют танцевать, т.к. по условию каждый ученик класса поёт или танцует. Всего умеют танцевать 19 человек, из них 13 не умеют петь, значит, танцевать и петь одновременно умеют  $19 - 13 = 6$  человек.

## №6

На фирме работают 67 человек. Из них 47 знают английский язык, 35 - немецкий язык, а 23 - оба языка.

Сколько человек в фирме не знают ни английского, ни немецкого языков?

## Решение.

$n(A) = 47$  – знают английский язык

$n(B) = 35$  – знают немецкий язык

$n(C) = x$  – не знают ни английский, ни немецкий язык

$n(A \cap B) = 23$  – знают английский и немецкий языки

$n(A \cap B \cap C) = 67$  – работники фирмы

$$67 = 47 + 35 - 23 + x \quad x = 8$$

Ответ: 8 человек не знают ни английский, ни немецкий язык.

## № 7.

Изобразите с помощью кругов Эйлера пересечение множеств  $K$  и  $M$ , если:

а)  $K \subset L$

б)  $L \subset K$

в)  $K = L$

г)  $K \cap L = \emptyset$

# Решение задачи с помощью кругов Эйлера.

