

Степенная функция, её свойства и график

Вы знакомы с функциями $y=x$,
 $y=x^2$, $y=x^3$, $y=1/x$ и т. д.

Все эти функции являются частными случаями степенной функции,

т. е. функции $y = x^p$, где p - заданное действительное число.

Виды степенной функции

1. Показатель $p=2n$ - четное натуральное число.

В этом случае степенная функция $y = x^{2n}$, где n - натуральное число, обладает следующими свойствами:

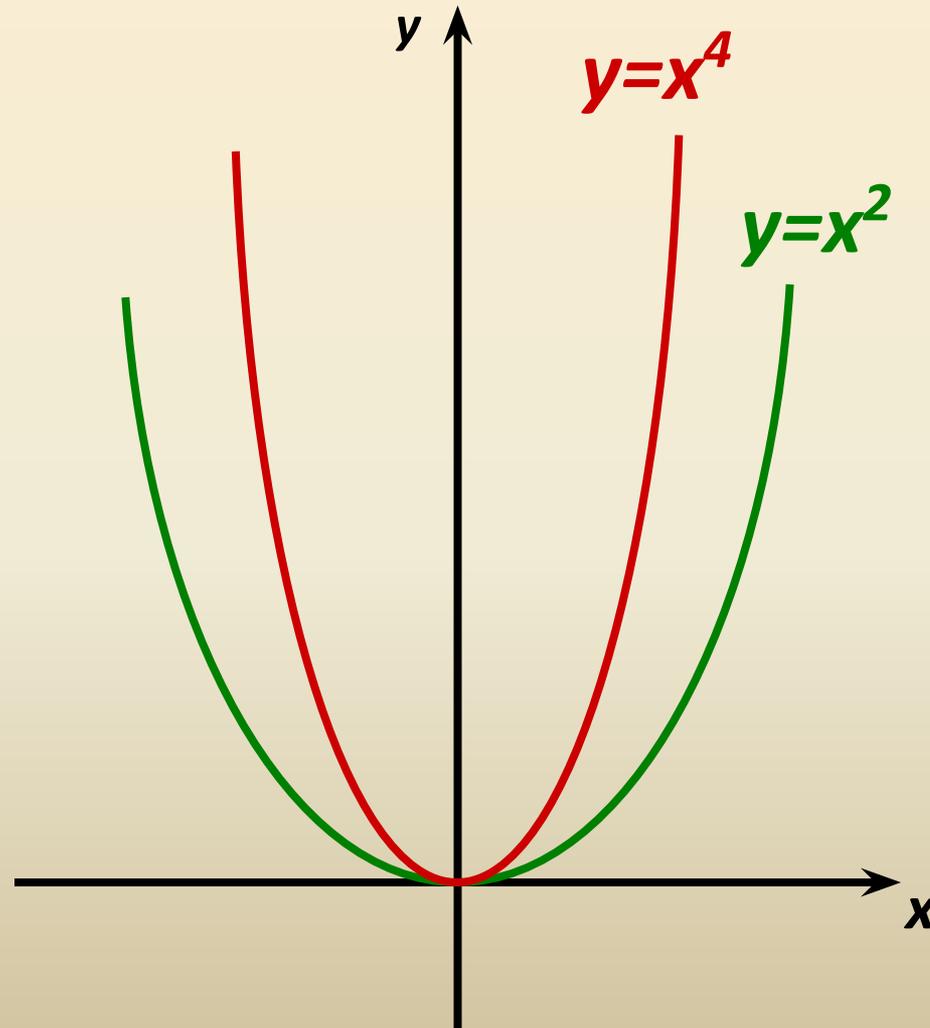
- область определения - все действительные числа, т. е. множество R ;
- множество значений - неотрицательные числа, т. е. $y \geq 0$;
- функция $y = x^{2n}$ четная, так как $(-x)^{2n} = x^{2n}$;
- функция является убывающей на промежутке $x \geq 0$ и возрастающей на промежутке $x \leq 0$.

График функции $y = x^p$ имеет такой же вид, как, например, график функции $y = x^4$ (рис. 1).

p - чётное число

$$y = x^{2n}$$

$$p = 2n$$



2. Показатель $p=2n-1$ - нечетное натуральное число.

В этом случае степенная функция $y=x^{2n-1}$, где $2n-1$ - натуральное число, обладает следующими свойствами:

- область определения - множество R ;
- множество значений - множество R ;

Функция $y=x^{2n-1}$ **нечетная**, так как

$$(-x)^{2n-1} = -x^{2n-1};$$

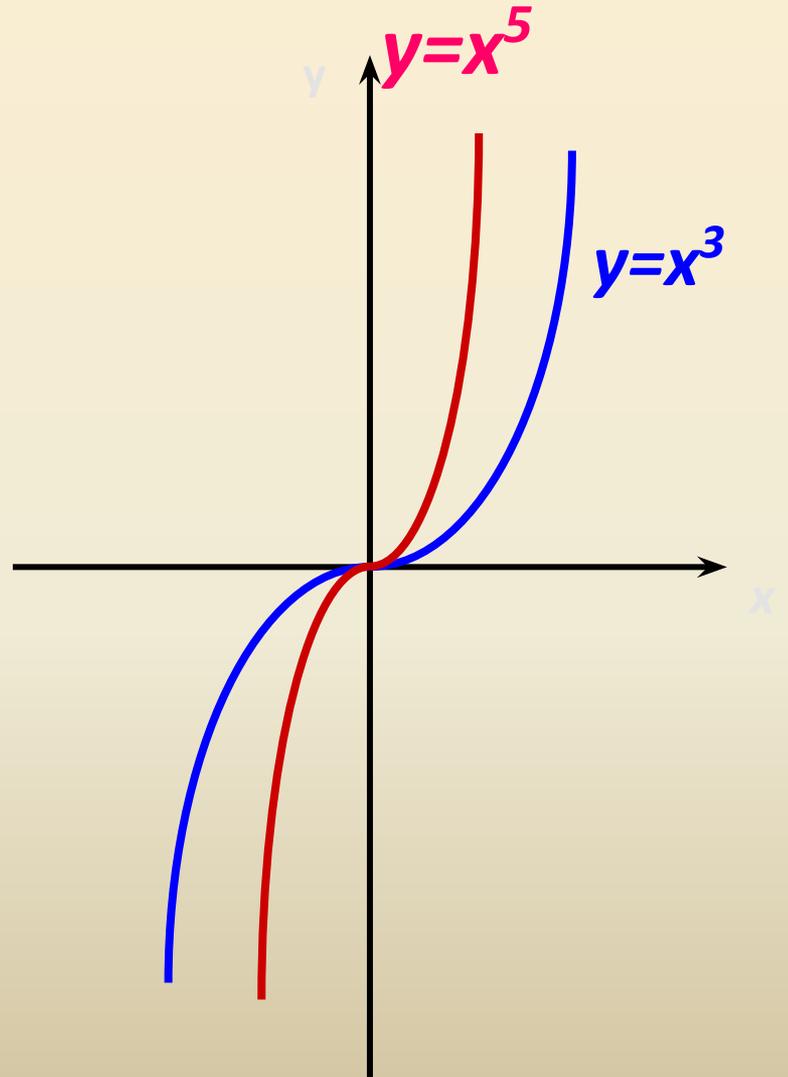
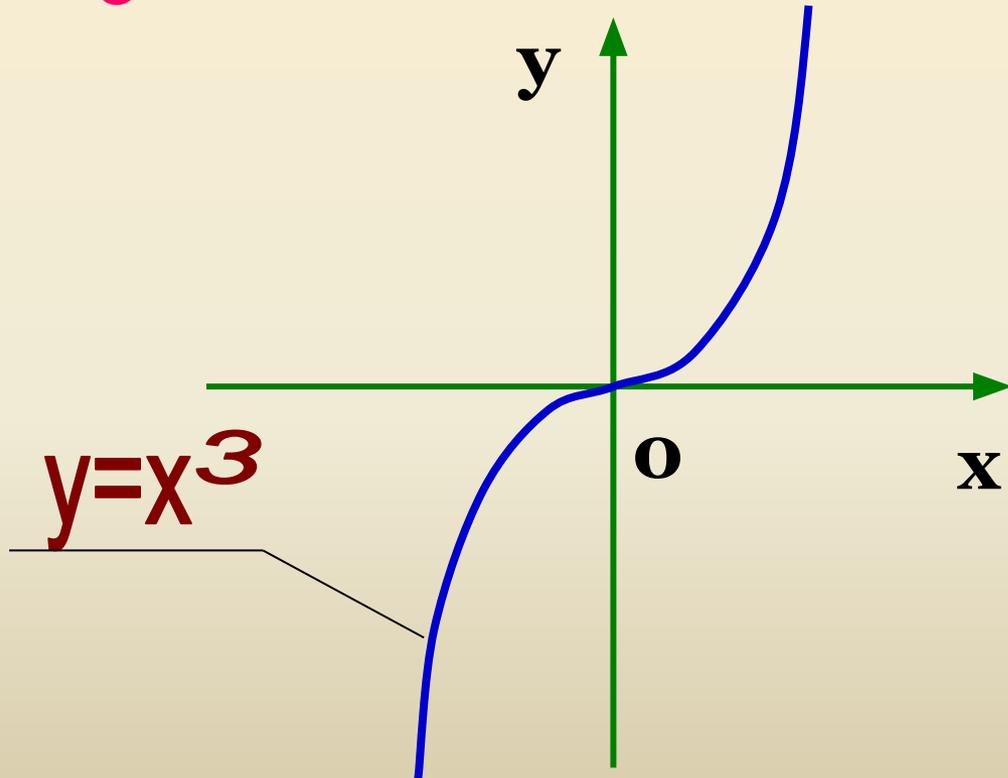
- функция является **возрастающей** на всей действительной оси.

График функции $y=x^{2n-1}$ имеет такой же вид, как, например, график функции $y=x^3$ (рис. 2).

p - нечётное число

$$p=2n-1$$

$$y = x^{2n-1}$$

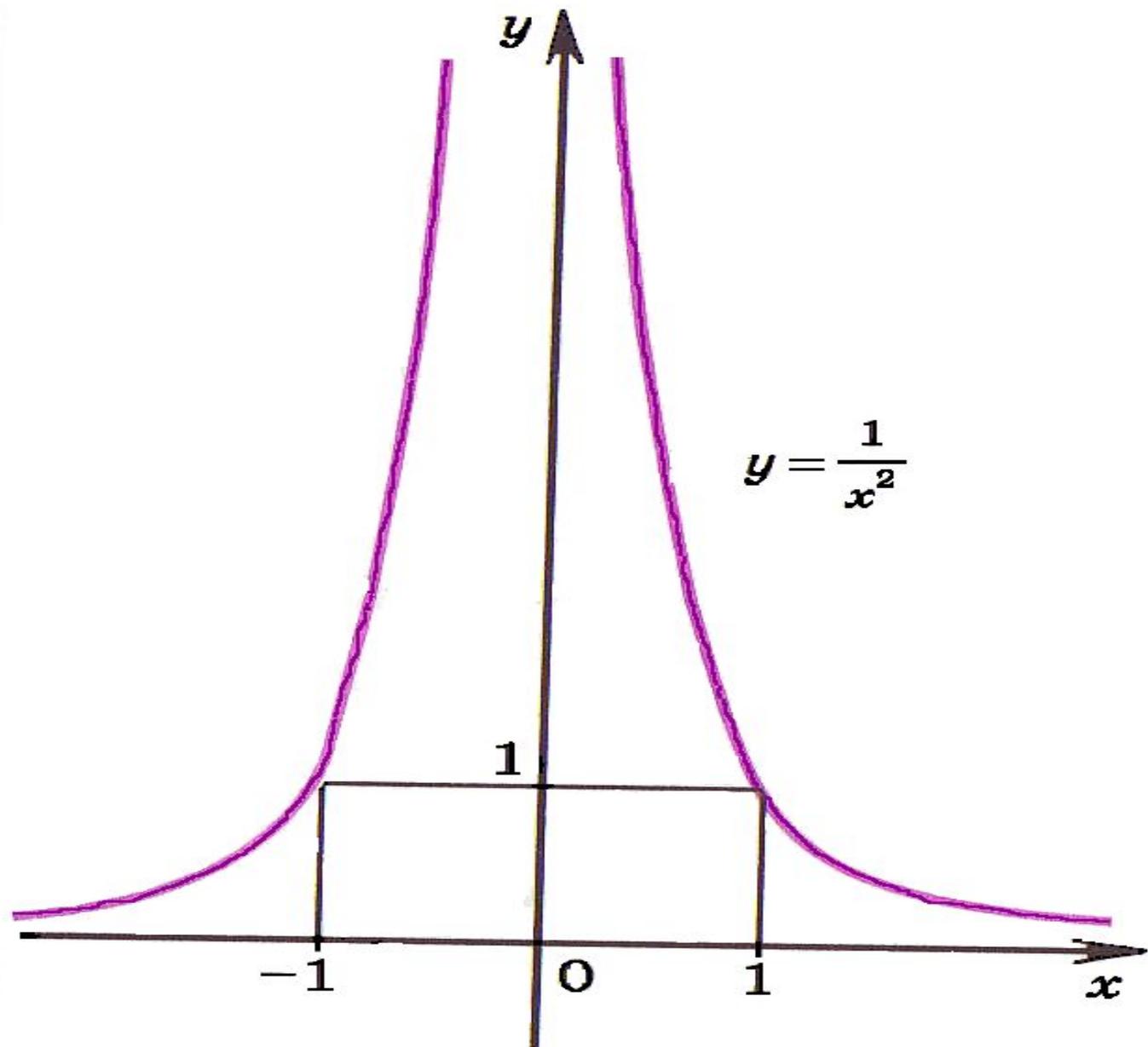


3. Показатель $p = -2n$, где n - натуральное число.

В этом случае степенная функция $y = x^{2n}$ обладает следующими свойствами:

- **область определения** - множество R , кроме $x = 0$;
- **множество значений** - положительные числа $y > 0$;
- Функция $y = x^{2n}$ - **четная**, так как $(-x)^{2n} = x^{2n}$;
- функция является **возрастающей** на промежутке $x < 0$ и **убывающей** на промежутке $x > 0$.

График функции $y = x^{2n}$ имеет такой же вид, как, например, график функции $y = x^2$ (рис.3).



4. Показатель $p = -(2n - 1)$, где n - натуральное число.

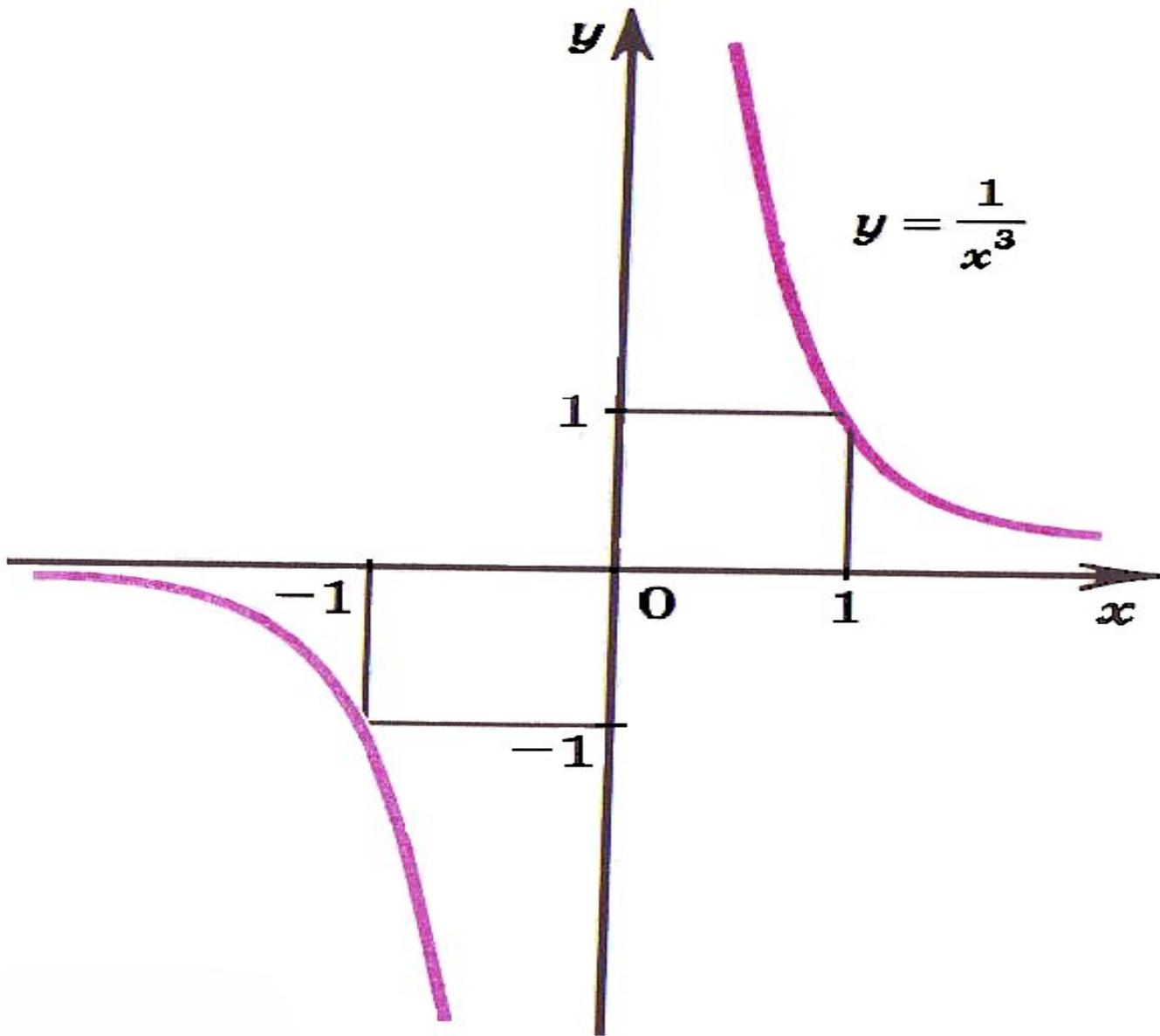
В этом случае степенная функция $y = x^{-(2n-1)}$ обладает следующими свойствами:

- **область определения** - множество \mathbf{R} , кроме $\mathbf{x=0}$;
- **множество значений** - множество \mathbf{R} , кроме $\mathbf{y=0}$;
- функция **нечетная**, так как

$$(-x)^{-(2n-1)} = x^{-(2n-1)};$$

- функция является **убывающей** на промежутках $\mathbf{x < 0}$ и $\mathbf{x > 0}$.

График функции $y = x^{-(2n-1)}$ имеет такой же вид, как, например, график функции $y = x^3$ (рис. 4).

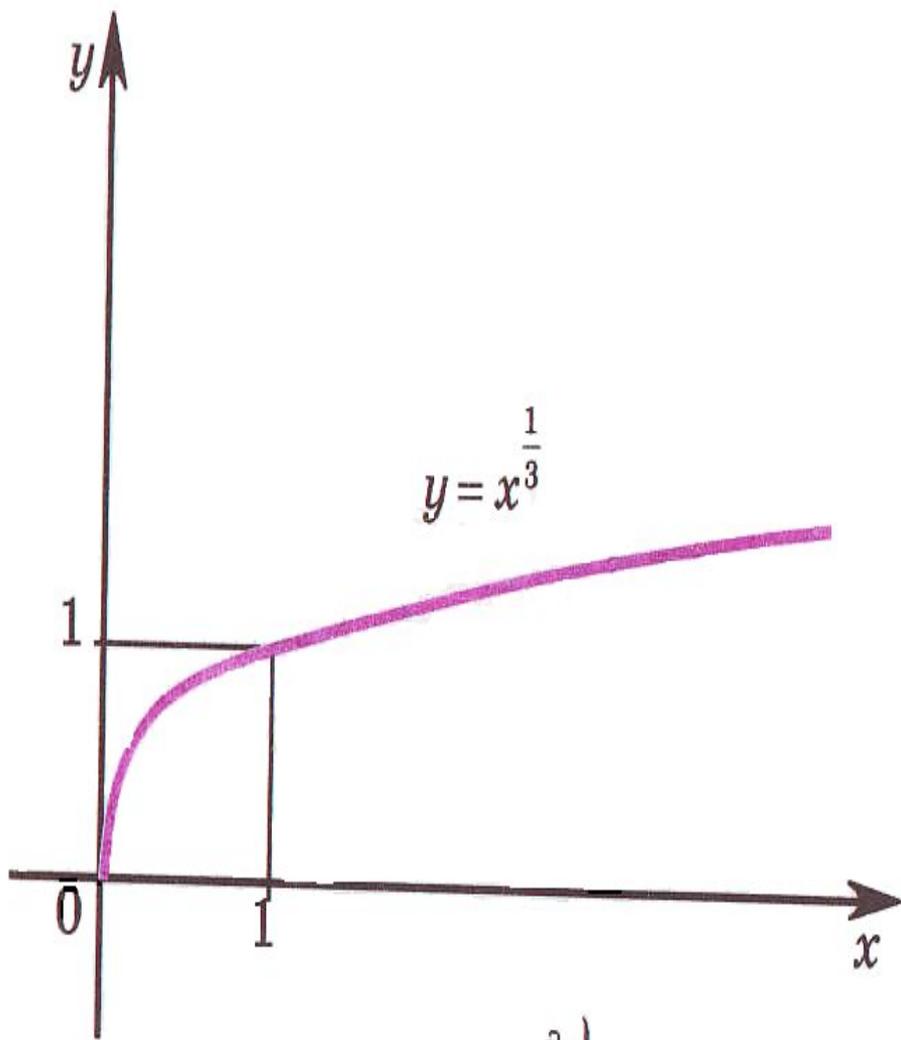


5. Показатель p - положительное действительное нецелое число.

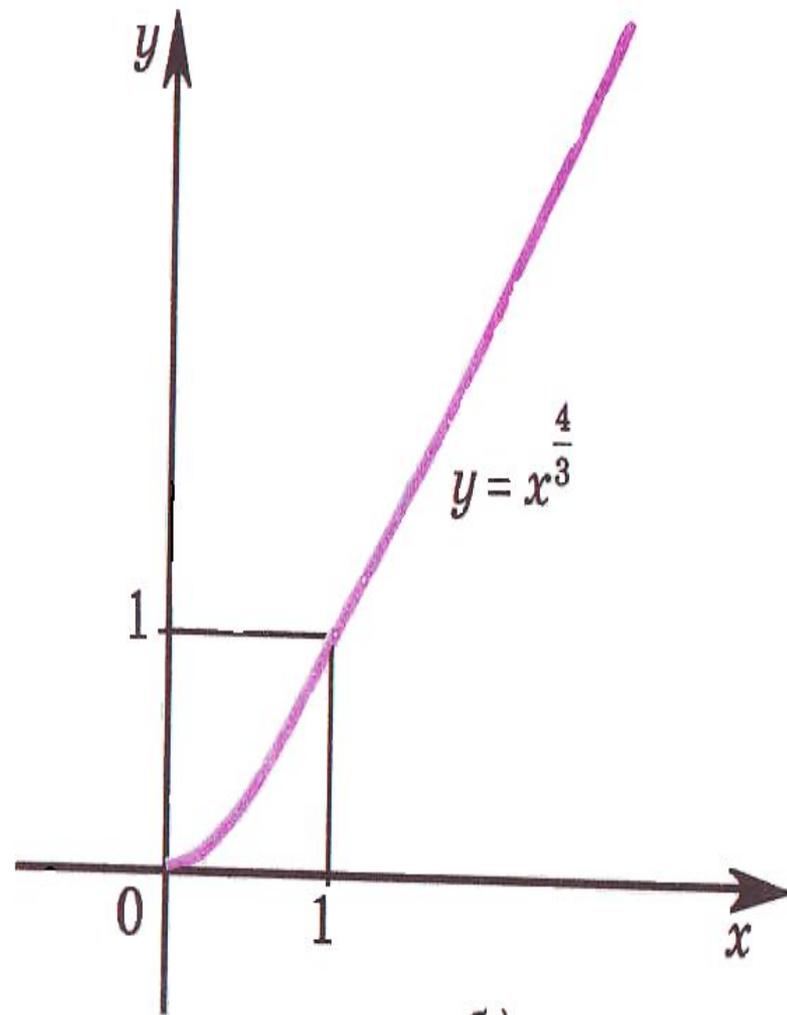
В этом случае функция $y=x^p$ обладает следующими свойствами:

- область определения - неотрицательные числа x ;
- множество значений - неотрицательные числа y ;
- функция является *возрастающей* на промежутке $(x; \infty)$.

График функции $y=x^p$, где p - положительное нецелое число, имеет такой же вид, как, например, график функции $y=x^p$ (при $0 < p < 1$) или как, например, график функции $y=x^p$ (при $p > 1$) (рис.5 а, б)



а)



б)

Рис.5

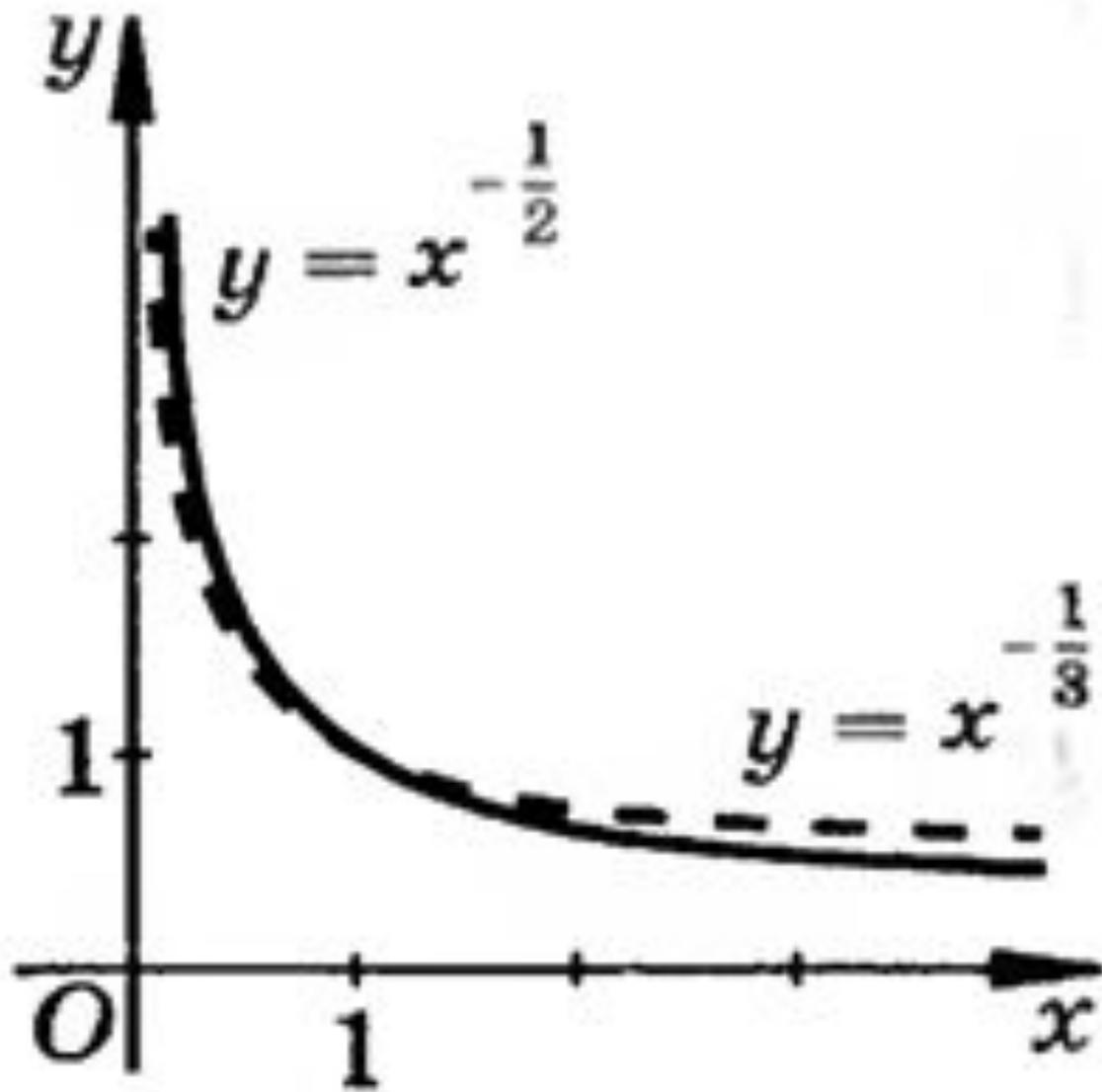
6. Показатель p - отрицательное действительное нецелое число.

В этом случае функция $y=x^p$ обладает следующими свойствами:

- ▣ область определения – **положительные** числа $x>0$;
- ▣ множество значений – положительные числа $y >0$;
- ▣ функция является **убывающей** на промежутке $x>0$.

Данный случай проиллюстрирован графиками

$$y = x^{-1/2} = \frac{1}{x^{1/2}} \text{ и } y = x^{-1/3} = \frac{1}{x^{1/3}}.$$



Задача 1.

Изобразить схематически график функции и найти её область определения и множество значений:

1) $y = x^{\frac{3}{8}}$; 2) $y = x^{-\frac{1}{5}}$.

Решение.

1) $y = x^{\frac{3}{8}}$, $p = \frac{3}{8}$, $0 < p < 1$, p — не-

целое число. Область определения $x \geq 0$.
Множество значений $y \geq 0$ (рис. 14).

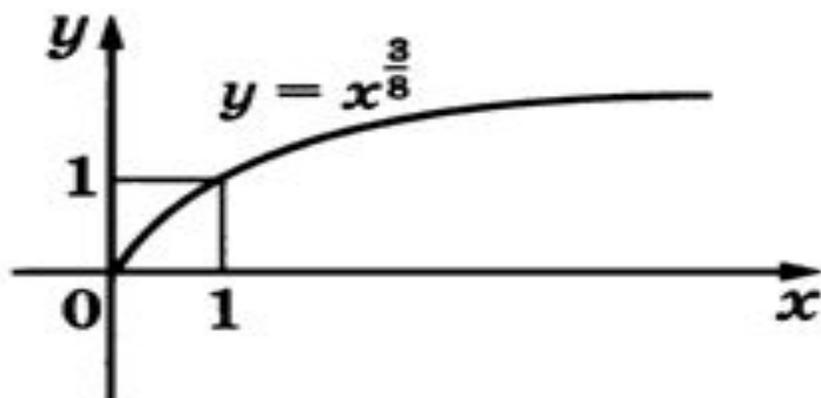


Рис. 14

2) $y = x^{-\frac{1}{5}}$, $p < 0$, p — нецелое число.

Область определения $x > 0$. Множество значений $y > 0$ (рис. 15).

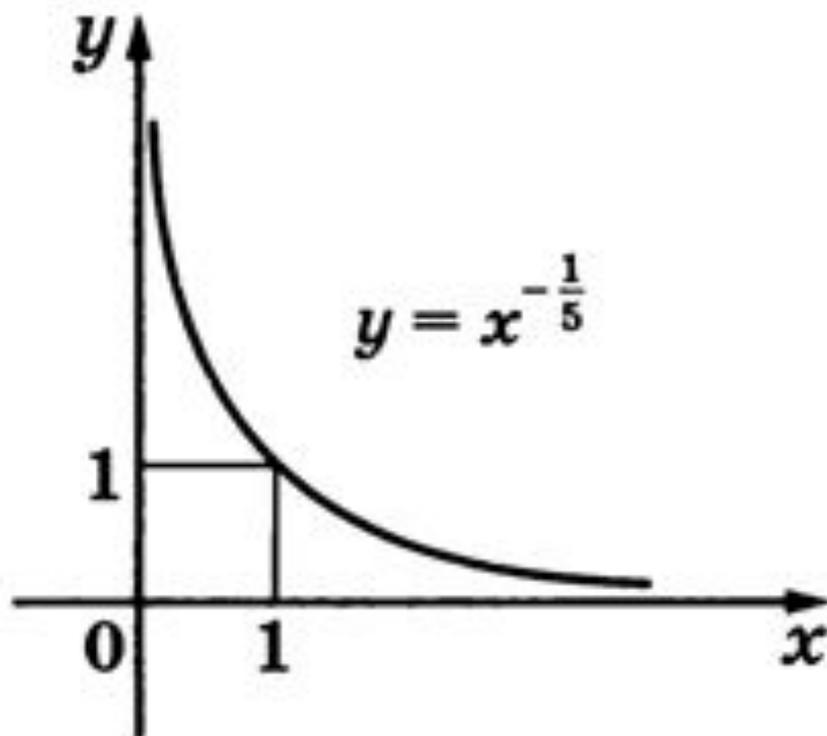


Рис. 15

УПРАЖНЕНИЯ

Изобразить схематически график функции и указать ее область определения и множество значений:

1) $y = x^6$;

2) $y = x^5$;

3) $y = x^{\frac{1}{2}}$;

4) $y = x^{-2}$;

5) $y = x^{-3}$;

6) $y = x^{\frac{1}{3}}$.