Ряд Фурье.
Преобразование Фурье, его свойства.
Дискретное преобразование Фурье.
Быстрое преобразование Фурье

МОИ

Лекция 8

Представление сигналов в системе гармонических колебаний (синусов и косинусов) и их анализ (традиционный Фурье или частотный анализ), получили большое распространение в радиотехнике и связи.

Так, теория преобразования Фурье периодических и непериодических функций вышла далеко за пределы математических дисциплин, став мощной теоретической базой в ряде прикладных областей, таких как радиоэлектроника и радиотехника, теория систем, теория автоматического регулирования, теория сигналов и др.

Сложный сигнал может быть представлен в виде некоторой комбинации компонентов – более простых колебаний (сигналов).

Если эти колебания имеют ясный физический смысл, то свойства сигнала могут быть объяснены в терминах самих колебаний.

Анализом сигналов называется процесс определения и оценки величины компонентов, осуществляемый некоторыми техническими средствами по определенным формулам.

Произвольные периодические функции представляют собой суммы простейших гармонических функций – синусов и косинусов кратных частот.

Эти суммы получили название

рядов Фурье.

Разложение периодического сигнала в ряд Фурье и проведение преобразования Фурье непериодических сигналов – являются основными методов исследования их свойств и характеристик

Разложению в ряд Фурье могут подвергаться *периодические* сигналы. При этом они представляются в виде суммы гармонических функций либо комплексных экспонент ($e^{2\pi\nu t}$) с частотами, образующими арифметическую прогрессию.

Чтобы такое разложение существовало, фрагмент сигнала длительностью в один период должен удовлетворять условиям Дирихле:

Условия Дирихле:

Во фрагменте сигнала длительностью
в один период

- Не должно быть разрывов второго рода (с уходящими в бесконечность ветвями функции);
- Число разрывов первого рода (скачков) должно быть конечным;
- Число экстремумов должно быть конечным;
- В любой точке периода первая производная должна быть конечной (или конечной является левая или правая производная – условие Дини).

Ряд Фурье может быть применен для представления не только периодических сигналов, но и сигналов конечной длительности.

При этом выбирается временной интервал, для которого строится ряд Фурье, в остальные моменты времени сигнал полагается равным нулю.

В зависимости от конкретной формы базисных функций различают несколько форм записи ряда Фурье:

- Синусно-косинусная форма
- Вещественная форма
- Комплексная форма

Синусно-косинусная форма

- Имеет следующий вид:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(\mathrm{k}\omega_1 t) + b_k \sin(\mathrm{k}\omega_1 t))$$

где $\omega_1 = {}^{2\pi}/_{T}$ - круговая частота, кратные ей частоты $\mathrm{k}\omega_1$ - гармоники сигнала, коэффициенты a_k и b_k рассчитываются по формулам:

- $a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\cos(k\omega_1 t)\,dt$ и
- $b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\sin(k\omega_1 t)\,dt$
- $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)dt$ - среднее значение сигнала за период

Вещественная форма ряда Фурье

- Чтобы в формуле ряда Фурье остались только слагаемые одного вида, например косинусные, применяют тригонометрические преобразования и получают *вещественную* форму представления разложения:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t + \varphi_k),$$

При этом изменяется амплитуда и возникает начальная фаза, а частота остается прежней.

Если s(t) четная функция, то фазы могут принимать только значения 0 и π, если нечетная – фазы могут быть равны ±π/2.

Комплексная форма ряда Фурье

- Является наиболее употребимой в технике обработки сигналов.

Получается из вещественной формы применением формулы Эйлера

$$e^{jx} = cosx + jsinx$$

в виде

$$cosx = \frac{1}{2}\left(e^{jx} + e^{-jx}\right).$$

Получим:

$$s(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_k \, e^{jk\omega_1 t}$$

- Формула расчета коэффициентов ряда Фурье в комплексной форме:

$$C_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\exp(-jk\omega_1\, t)dt$$

Если s(t) является *четной* функцией, коэффициенты ряда будут *вещественными*, если *нечетной* – *мнимыми*.

- Совокупность амплитуд гармоник ряда Фурье называют **амплитудным спектром**, совокупность их фаз – **фазовым спектром**.

Эти спектры являются линейчатыми. Для любого сигнала x(t) можно

определить спектры амплитуд A_k и фаз φ_k следующим образом:

$$A_k(\mathrm{k}\omega_0)=\sqrt{{a_k}^2+{b^2}_k}$$

$$\varphi_k(\mathrm{k}\omega_0)=\mathrm{arctg}\ b_k/a_k$$

- *Следует отличать спектры от характеристик. Последние относятся не к сигналам (как спектры), а к* ***системам*** *обработки сигналов.*

Любой периодический сигнал бесконечен во времени, что на практике неосуществимо, поэтому периодический сигнал - математическая абстракция, и все рассмотренное выше не применимо к реальным сигналам.

Реальный сигнал ограничен во времени и, следовательно, является непериодическим. Однако, условно его можно рассматривать как периодический с периодом $T \to \infty$. Тогда $\omega_0 = 2\pi/T \to 0$, а спектры амплитуд и фаз становятся непрерывными (сплошными), сумма в разложении Фурье превращается в интеграл.

В результате переходим к интегралу Фурье

Преобразование Фурье

- Является инструментом спектрального анализа *непериодических* сигналов.

Прямое преобразование Фурье (Фурье-образ сигнала):

$$\boldsymbol{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$$

Обратное преобразование Фурье:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

- Если использовать не круговую частоту, а обычную $f = {}^{\omega}/_{2\pi}$, то формулы прямого и обратного преобразований Фурье будут отличаться только знаком в показателе экспоненты:

$$\boldsymbol{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{S}(\omega) e^{j2\pi f t} d\omega$$

Итак,

прямое преобразование Фурье – это разложение сигнала на гармонические функции (в спектр).

О*братное преобразование Фурье* – это синтез сигнала по гармоникам.

- Чтобы преобразование Фурье было применимо, сигнал должен удовлетворять не только тем же, что и в случае разложения в ряд Фурье, условиям, но и еще одному –
  - Сигнал должен быть абсолютно интегрируемым, т.е. интеграл его модуля должен быть конечной величиной:

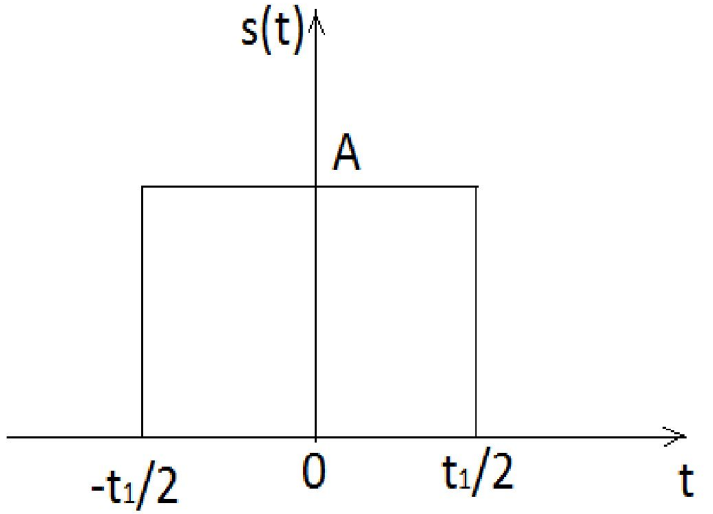
$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|\, dt < \infty$$

Модуль спектральной функции **S**(ω) называют амплитудным спектром, а ее аргумент – фазовым спектром

Преобразование Фурье ставит в соответствие сигналу, **заданному во времени**, его **спектральную функцию**, т.е. осуществляется **переход из временной области в частотную**.

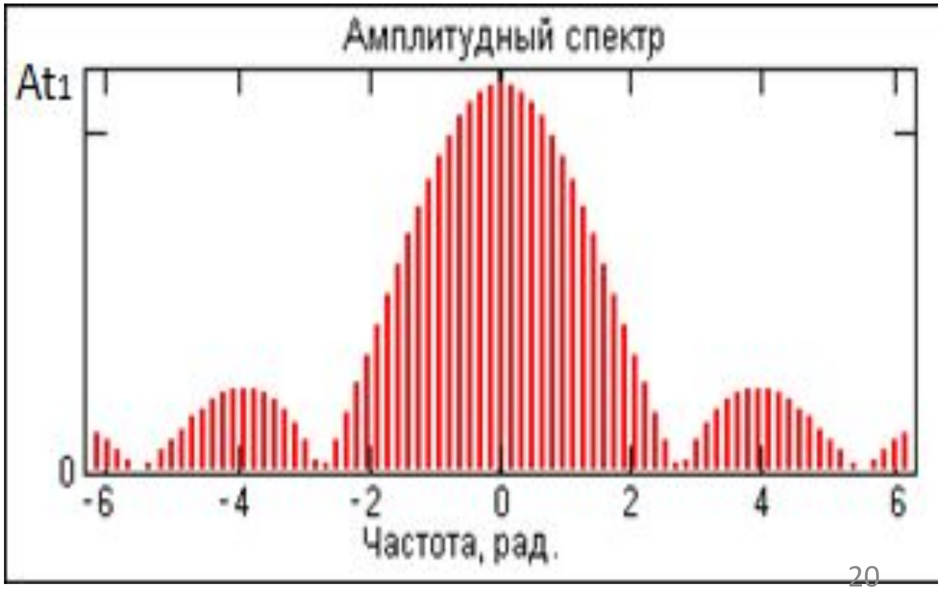
Преобразование Фурье является взаимно-однозначным, поэтому представление сигнала в частотной области (т.е. спектральная функция) содержит **столько же информации**, сколько и исходный сигнал, заданный во временной области.

Пример: прямоугольный импульс



$$s(t) = \begin{cases} A, |t| \leq t1/2 \\ 0, |t| > t1/2 \end{cases}$$

Спектр, простираясь до бесконечности и постепенно затухая, носит лепестковый характер. **Эффективная ширина спектра** в этом случае – ширина главного лепестка, т.е. 2π/t1, где t1 – длительность импульса. И в общем случае – чем короче импульс, тем шире его спектр.



При лепестковом характере спектра за его эффективную ширину принимают величину **$2\pi/\tau$** (τ - длительность импульса).

Если амплитудный спектр не содержит явно выраженных лепестков, то эффективную ширину определяют по уровню

0,1 от максимума.

Соотношение неопределенности

Длительность сигнала и ширина его спектра подчиняются соотношению неопределенности: ***произведение этих параметров (база спектра) не может быть меньше единицы***.

- Ограничений максимального значения базы сигнала не существует, поэтому можно сформировать сигнал большой длительности с широким спектром, а короткий сигнал с узким спектром существовать не может.

Свойства преобразования Фурье

- **Линейность** – преобразование Фурье является линейным интегральным преобразованием, спектр суммы сигналов равен сумме их спектров:

$$s(t) = \alpha f(t) + \beta g(t);$$

$$\boldsymbol{S}(\omega) = \alpha \boldsymbol{F}(\omega) + \beta \boldsymbol{G}(\omega).$$

Свойства преобразования Фурье

- **Задержка сигнала во времени** на величину τ не влияет на амплитудный спектр сигнала, добавляя в фазовый спектр слагаемое -ωτ, линейно зависящее от частоты:

$$s(t) = f(t-\tau);$$
$$\boldsymbol{S}(\omega) = \boldsymbol{F}(\omega)e^{-j\omega\tau}$$

Свойства преобразования Фурье

- **Изменение масштаба оси времени** (длительности сигнала) – приводит к изменению ширины спектра в обратную сторону с одновременным изменением уровня спектральных составляющих:

$$s(t) = f(at)$$

$$\boldsymbol{S}(\omega) = \frac{1}{|a|}\boldsymbol{F}\left(\frac{\omega}{a}\right), \qquad a \neq 0$$

Изменение длительности сигнала *не может* быть осуществлено *линейной системой* с постоянными параметрами.

Свойства преобразования Фурье

- **Дифференцирование сигнала** во временной области приводит к умножению спектра исходного сигнала на $j\omega$, т.о. низкие частоты ослабляются, а высокие усиливаются, фазовый спектр сдвигается на $\pm\pi$ для положительных и отрицательных частот соответственно.

$$s(t) = \frac{df}{dt},$$

$$\boldsymbol{S}(\omega) = j\omega\boldsymbol{F}(\omega)$$

Множитель $j\omega$ называется оператором дифференцирования сигнала в частотной области.

Свойства преобразования Фурье

- **Интегрирование сигнала** ведет к ослаблению высоких и усилению низких частот, фазовый спектр смещается на -/+π для положительных и отрицательных частот соответственно:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt\,,$$

$$\boldsymbol{S}(\omega) = \frac{\boldsymbol{F}(\omega)}{j\omega} + \pi\boldsymbol{F}(0)\delta(\omega)$$

Дополнительное слагаемое – дельта-функция на нулевой частоте, умноженная на постоянную составляющую сигнала *s(t)*.

Свойства преобразования Фурье

- **Спектр свертки сигналов** равен произведению спектров:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t')g(t-t')dt$$

$$\boldsymbol{S}(\omega) = \boldsymbol{F}(\omega)\boldsymbol{G}(\omega)$$

Свертка сигнала описывает прохождение сигнала через линейную систему с постоянными параметрами.

Свойства преобразования Фурье

- **Спектр произведения сигналов** дает свертку спектров с дополнительным множителем $1/2\pi$:

$$s(t) = f(t)g(t)$$

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G(\omega - \omega')d\omega'$$

Свойства преобразования Фурье

- **Умножение сигнала на гармоническую функцию** приводит к раздвоению спектра – он распадается на два сигнала вдвое меньшего уровня каждый, смещенных вправо и влево на ω_0 по оси частот:

$$s(t) = f(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\boldsymbol{S}(\omega) = \frac{1}{2}e^{j\varphi_0}\boldsymbol{F}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}e^{-j\varphi_0}\boldsymbol{F}(\omega + \omega_0)$$

Свойства преобразования Фурье

- Связь преобразования Фурье и коэффициентов ряда Фурье:

$$\mathrm{C}_k = \frac{1}{T}\boldsymbol{S}\left(\frac{2\pi k}{T}\right)$$

Спектр дискретного сигнала

Преобразование Фурье применяется для вычисления спектра сигнала, являющегося функцией времени или пространственных координат.

Дискретный сигнал представляет собой последовательность чисел, которую для проведения Фурье-преобразований необходимо представить в виде некоторой функции.

Спектр дискретного сигнала

- Обычно отсчеты представляют в виде дельта-функций с определенными множителями и задержками, что для последовательности отсчетов {x(k)} можно представить в виде:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(t-k)$$

$$\boldsymbol{S}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j\omega k}$$

Главное свойство спектра любого дискретного сигнала – его периодичность.

Спектр дискретного сигнала

Характер спектра дискретизированного сигнала демонстрирует частотно-временную дуальность преобразования Фурье:

- Периодический сигнал имеет дискретный спектр;
- Дискретный сигнал имеет периодический спектр.

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

Разновидность преобразования Фурье, специально предназначенная для работы с дискретными сигналами.

- Лежит в основе различных технологий спектрального анализа для исследования случайных процессов.

В результате вычисления ДПФ случайного процесса (сигнала) получается лишь спектр его единственной (одной из возможных) реализаций, что обычно не представляет большого интереса.

Для спектрального анализа случайных сигналов необходимо использовать **усреднение спектра**.

Методы спектрального анализа, в которых после усреднения сигнала используется только информация, извлеченная из самого входного сигнала, называются **непараметрическими**.

Если при проведении усреднения случайного сигнала определена некоторая его статистическая модель, спектральный анализ будет также решать задачи определения параметров этой модели. Такие методы называются **параметрическими**.

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

- Рассмотрим периодическую последовательность отсчетов $\{x(k)\}$ с периодом N:

$$x(k+N) = x(k)$$

для любого k.

Поставим в соответствие этой последовательности сигнал из смещенных по времени дельта-функций:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(t-kT),$$

также периодический с периодом NT.

Спектр дискретного сигнала s(t) периодический с периодом $2\pi/T$, а поскольку и сигнал периодический, то его спектр дискретен с расстояниями между гармониками $2\pi/NT$.

Периодический дискретный сигнал, описываемый конечным набором из N чисел, имеет дискретный периодический спектр, один период спектра имеет N гармоник.

- Применив к дискретному периодическому сигналу s(t) разложение в ряд Фурье, получим дискретное преобразование Фурье, т.е. разложение сигнала по гармоникам:

$$\boldsymbol{X}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\exp(-j\frac{2\pi nk}{N})$$

Обратное дискретное преобразование Фурье:

$$x(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \boldsymbol{X}(n)\exp(j\frac{2\pi nk}{N})$$

Свойства дискретного преобразования Фурье

В целом аналогичны свойствам непрерывного преобразования Фурье, например линейность, задержка (сдвиг) сигнала, симметрия, произведение последовательностей. Но есть и некоторые нюансы, возникающие вследствие дискретности, например:

- при перемножении сигналов их длины должны быть одинаковыми (N);
- суммирование элементов произведения должно производиться по одному периоду (полученный результат называется круговой сверткой спектров исходных сигналов).

- Дискретное преобразование Фурье является спектром дискретного периодического сигнала и позволяет восстановить непрерывный периодический сигнал, занимающий некоторую ограниченную полосу частот. Заменив дискретный параметр k (номер отсчета) в формуле обратного ДПФ на непрерывный t/T, где T – период дискретизации, получим непрерывный сигнал:

$$x(t) = \frac{1}{N}\sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \boldsymbol{X}(n)\exp(j\frac{2\pi nt}{TN})$$

Такой аналоговый сигнал занимает полосу частот от 0 до π/T.

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\exp(-j\frac{2\pi nk}{N})$$

Из выражений ДПФ можно видеть, что для вычисления каждой гармоники нужно N операций комплексного умножения и сложения и соответственно N^2 операций на полное выполнение ДПФ.

При больших объемах массивов данных это может приводить к существенным временным затратам.

Ускорение вычислений достигается при использовании **быстрого преобразования Фурье** (БПФ).

Быстрое преобразование Фурье

БПФ базируется на том, что при вычислениях среди множителей в силу периодичности функций есть много периодически повторяющихся значений. Алгоритм БПФ группирует слагаемые с одинаковыми множителями в пирамидальный алгоритм, значительно сокращая число умножений за счет исключения повторных вычислений. В результате быстродействие БПФ в зависимости от N может в сотни раз превосходить быстродействие стандартного алгоритма.

При этом алгоритм БПФ даже точнее стандартного, т.к. сокращая число операций, он приводит к меньшим ошибкам округления.

Быстрое преобразование Фурье

При реализации БПФ возможно несколько вариантов организации вычислений в зависимости от способа деления последовательности отсчетов на части (так наз. прореживание по времени или по частоте) и от того, на сколько фрагментов производится разбиение последовательности на каждом шаге вычислений (основание БПФ).

При этом существенно, что N не должно быть простым числом, а должно быть разлагаемым на множители.

- Наибольшее ускорение может быть получено при $N = 2^k$, т.к. тогда деление последовательностей на две части возможно, пока не будут получены двухэлементные последовательности, ДПФ которых можно произвести без операции умножения, вычислив только сумму и разность двух отсчетов.

Число требуемых при этом пар операций «сложение-умножение» оценивают как $Nlog_2(N)$, а вычислительные затраты уменьшаются в $N/log_2(N)$ раз. При больших N это отношение становится весьма существенным.

Некоторые выводы

- Если длина анализируемого вектора (сигнала) является простым числом, вычисление спектра сигнала возможно только по прямой формуле дискретного преобразования Фурье.
- Алгоритм БПФ предназначен для одновременного расчета всех спектральных отсчетов **X**(n) сигнала x(k). Если необходимы только отсчеты для некоторых n, то применяется формула прямого ДПФ.
- Применение БПФ имеет смысл, если число элементов анализируемой последовательности (сигнала) является степенью числа 2, т.к. при этом достигается наибольшее ускорение расчетов.

ДПФ и фильтрация

- Дискретное преобразование Фурье можно представить как обработку сигнала набором фильтров с соответствующей импульсной характеристикой,
- Дискретную фильтрацию сигналов можно организовать с помощью дискретного преобразования Фурье