

# Оптимальные назначения, использующие вектор неоднородных критериев

Лекция 4

# Задача 1: минимизация стоимости выполнения работ при ограничении на время их выполнения

Задача отличается от ранее рассмотренной тем, что кроме стоимости известно время выполнения каждым рабочим каждой работы. Если  $i$ -й рабочий не может выполнять  $j$ -ю работу, то:

- где:
- $r_1(i, j) = r_2(i, j) = \infty$ ,  
 $r_1(i, j)$  – стоимость выполнения  $i$ -ым рабочим  $j$ -ой работы.
- $r_2(i, j)$  – время выполнения  $i$ -ым рабочим  $j$ -ой работы
- $T$  – плановый период.

# Формальная постановка задачи 1

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_1(i, j) y(i, j) \rightarrow \min; \quad - \text{целевая функция - минимизация затрат} \\
 \max_i \max_j r_2(i, j) y(i, j) \leq T; \quad - \text{ограничение на время выполнения плана } T \\
 \sum_{i=1}^n y(i, j) = 1; \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad - \text{каждая работа должна быть выполнена} \\
 \sum_{j=1}^n j(i, j) = 1; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad - \text{каждый рабочий должен иметь работу} \\
 y(i, j) = 1, 0; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad - \text{булевы переменные}
 \end{array} \right.$$

# Решение задачи 1

- Решение задачи 1 сводится к решению «классической» задачи о назначениях, если исходную матрицу  $M$  преобразовать в  $M'$  следующим образом:

$$\forall (i, j) \in U : r_2(i, j) > T \Rightarrow r_1(i, j) = \infty.$$

- Иными словами считаем, что если время выполнения  $i$ -м рабочим  $j$ -й работы больше  $T$ , то  $i$ -й рабочий не может делать  $j$ -ю работу.
- После этого матрица  $M'$ , содержащая лишь  $r_1(i, j)$ , используется для решения «классической» задачи о назначениях.

## ПРИМЕР 1

Решить задачу с вектором критериев на бихроматическом графе, заданном  $(n \times n)$  матрицей  $M$ , если  $n = 4$ , в верхней части каждой ячейки  $(i, j)$  матрицы  $M$  приведены величины  $r_1(i, j)$ , а в нижней –  $r_2(i, j)$ . Верхняя граница времени выполнения всех работ  $T = 12$ .

# ПРИМЕР 1 (продолжение)

$$M = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 5 & 12 & 6 & 7 \\ 2 & 8 & 5 & 14 & 9 \\ 3 & 12 & 3 & 4 & 11 \\ 4 & 4 & 19 & 16 & 9 \\ 5 & 8 & 10 & 5 & 6 \\ 6 & 8 & 9 & 12 & 10 \\ 7 & 3 & 9 & 8 & 12 \\ 8 & 20 & 12 & 15 & 7 \end{array} \rightarrow M' = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 5 & 12 & \infty & 7 \\ 2 & 12 & \infty & \infty & 11 \\ 3 & 8 & 10 & 5 & 6 \\ 4 & \infty & 9 & \infty & 12 \end{array}$$

$r_1(1,4)$   
 $r_2(1,4)$

5	12	$\infty$	7
12	$\infty$	$\infty$	11
8	10	5	6
$\infty$	9	$\infty$	12

- решение.

$$R = 5 + 11 + 5 + 9 = 30$$

# РЕШИТЬ САМОСТОЯТЕЛЬНО

24	30	14	10
12	6	22	26
18	20	15	28
18	16	21	18
11	17	16	27
24	19	19	10
9	12	5	28
20	24	30	8

$$\begin{cases} T \leq 20; \\ C \rightarrow \min. \end{cases}$$

# Персональные задания к контрольной работе

№ 1

28	30	14	10
12	16	22	26
18	20	15	28
18	16	21	18
10	17	18	27
24	19	19	12
19	12	5	28
20	24	30	18

$$\begin{cases} T \leq 18; \\ C \rightarrow \min. \end{cases}$$

№ 2

24	30	14	10
12	6	22	26
18	20	15	28
18	16	21	18
11	17	16	27
24	19	19	10
9	12	5	28
20	24	30	8

$$\begin{cases} T \leq 23; \\ C \rightarrow \min. \end{cases}$$

# Персональные задания к контрольной работе

№ 3

28	30	14	10
11	16	12	26
18	20	15	28
15	16	21	18
10	17	18	27
24	19	19	12
19	12	5	28
20	24	30	18

$$\begin{cases} T \leq 19; \\ C \rightarrow \min. \end{cases}$$

№ 4

24	30	14	10
12	6	22	26
18	20	15	28
18	16	21	18
11	17	16	27
24	19	19	10
9	12	5	28
20	24	30	8

$$\begin{cases} T \leq 24; \\ C \rightarrow \min. \end{cases}$$

# Персональные задания к контрольной работе

№ 5

38	30	24	10
12	16	22	26
18	20	35	18
18	16	11	18
10	17	18	27
24	19	19	12
19	12	15	28
12	24	30	18

$$\begin{cases} T \leq 18; \\ C \rightarrow \min. \end{cases}$$

№ 6

24	30	14	10
22	26	22	23
18	20	15	28
18	16	21	28
11	17	16	27
24	19	19	10
9	12	5	28
20	24	23	28

$$\begin{cases} T \leq 23; \\ C \rightarrow \min. \end{cases}$$

# Персональные задания к контрольной работе

№ 7

28	30	14	10
12	16	22	26
18	20	15	28
18	16	27	18
10	17	18	27
24	29	19	12
19	12	5	28
28	24	30	18

$$\begin{cases} T \leq 24; \\ C \rightarrow \min. \end{cases}$$

№ 8

24	30	14	10
12	6	22	26
18	20	15	28
18	16	21	18
11	17	16	27
24	19	19	10
9	12	5	28
20	24	30	8

$$\begin{cases} T \leq 25; \\ C \rightarrow \min. \end{cases}$$

# Персональные задания к контрольной работе

№ 9

28	30	14	10
32	16	22	26
18	20	15	28
18	16	31	18
10	17	18	27
24	19	29	12
19	12	5	28
20	24	30	18

$$\begin{cases} T \leq 26; \\ C \rightarrow \min. \end{cases}$$

№ 10

24	30	14	11
12	6	22	26
18	20	15	28
28	26	21	28
11	17	16	27
24	19	29	10
9	12	5	28
29	24	30	18

$$\begin{cases} T \leq 27; \\ C \rightarrow \min. \end{cases}$$

# Персональные задания к контрольной работе

№ 11

28	30	14	10
32	16	22	26
18	20	15	28
18	16	21	18
10	17	18	27
24	19	29	12
19	12	5	28
20	24	30	18

$$\begin{cases} T \leq 28; \\ C \rightarrow \min. \end{cases}$$

№ 12

24	30	14	10
12	6	22	26
18	20	15	28
18	36	21	18
11	17	16	27
24	19	19	10
9	12	5	28
31	24	30	28

$$\begin{cases} T \leq 29; \\ C \rightarrow \min. \end{cases}$$

# Персональные задания к контрольной работе

№ 13

28	30	14	10
32	16	22	26
18	20	15	28
18	36	21	18
10	17	18	27
24	19	19	12
19	12	5	28
20	34	30	18

$$\begin{cases} T \leq 30; \\ C \rightarrow \min. \end{cases}$$

№ 14

24	30	14	10
12	26	22	36
18	20	15	28
18	37	21	18
11	17	16	27
24	39	19	40
9	12	5	28
20	24	30	38

$$\begin{cases} T \leq 32; \\ C \rightarrow \min. \end{cases}$$

# Персональные задания к контрольной работе

№ 15

28	30	14	10
12	16	22	26
18	20	15	28
18	16	21	18
10	17	18	27
24	19	19	12
19	12	5	28
20	24	10	18

$$\begin{cases} T \leq 18; \\ C \rightarrow \min. \end{cases}$$

№ 16

24	30	14	10
12	6	22	26
18	20	15	28
18	16	21	18
11	17	16	27
24	19	19	10
9	12	5	28
20	24	30	8

$$\begin{cases} T \leq 23; \\ C \rightarrow \min. \end{cases}$$

# Персональные задания к контрольной работе

№ 17

28	30	14	10
22	16	22	26
18	20	15	28
18	26	21	18
10	17	18	27
24	19	19	12
19	12	5	28
20	24	10	18

$$\begin{cases} T \leq 18; \\ C \rightarrow \min. \end{cases}$$

№ 18

24	30	14	10
12	6	22	26
18	20	15	28
28	16	21	28
11	7	16	27
24	29	19	10
9	12	5	28
24	24	30	18

$$\begin{cases} T \leq 23; \\ C \rightarrow \min. \end{cases}$$

# Персональные задания к контрольной работе

№ 19

28	30	14	10
18	16	12	26
18	20	15	28
18	26	21	18
10	17	18	27
24	17	19	12
19	12	5	28
16	24	20	18

$$\begin{cases} T \leq 18; \\ C \rightarrow \min. \end{cases}$$

№ 20

24	30	14	10
12	26	22	26
18	20	15	28
18	16	21	18
11	17	16	27
24	19	29	10
9	12	5	28
20	24	30	38

$$\begin{cases} T \leq 23; \\ C \rightarrow \min. \end{cases}$$

# Персональные задания к контрольной работе

№ 21

28	30	24	10
32	16	22	26
18	20	25	28
18	16	31	18
10	17	18	27
24	19	29	12
19	12	25	28
20	24	30	28

$$\begin{cases} T \leq 26; \\ C \rightarrow \min. \end{cases}$$

№ 22

24	30	14	10
12	36	22	26
18	20	15	28
28	26	21	28
11	17	16	27
24	29	29	10
9	12	35	28
29	24	30	28

$$\begin{cases} T \leq 27; \\ C \rightarrow \min. \end{cases}$$

# Персональные задания к контрольной работе

№ 23

28	30	24	30
32	26	22	26
18	20	25	28
28	36	21	18
10	17	28	27
24	19	29	32
19	12	5	28
20	34	30	28

$$\begin{cases} T \leq 30; \\ C \rightarrow \min. \end{cases}$$

№ 24

24	30	34	35
32	26	22	36
28	20	15	28
38	37	21	18
21	27	26	27
24	39	19	40
9	12	35	28
20	24	30	38

$$\begin{cases} T \leq 32; \\ C \rightarrow \min. \end{cases}$$

## **ЗАДАЧА 2: Минимизация времени выполнения плана при ограничениях на затраты**

Пусть  $C$  – верхняя граница затрат на выполнение плана. Остальные обозначения совпадают с принятыми для задачи 1. Требуется таким образом распределить работу между исполнителями, чтобы:

- а) суммарные затраты не превысили величины  $C$ ;
- б) все исполнители были заняты;
- в) все работы были выполнены;
- г) время выполнения работ должно быть минимально.

# ФОРМАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ 2

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \max_i \max_j r_2(i, j) y(i, j) \rightarrow \min; \quad \text{- целевая функция} \\
 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_1(i, j) y(i, j) \leq C; \quad \text{- ограничени е на суммарные затраты} \\
 \sum_{i=1}^n y(i, j) = 1; \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad \text{- каждая работа должна быть выполнена} \\
 \sum_{j=1}^n y(i, j) = 1; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad \text{- каждый рабочий должен быть занят} \\
 y(i, j) = 1, 0; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n.
 \end{array} \right.$$

## АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 2

Решение задачи 2 сводится к многократному решению «классической» задачи о назначениях, для чего можно воспользоваться следующим алгоритмом:

Шаг 1. Из исходного графа удаляются все ребра.

Шаг 2. Ищется такое упорядочение ребер  $\pi = \{(i, j)_1, (i, j)_2, \dots, (i, j)_q\}$ , для которого справедливо:

$$r_2(i, j)_k \leq r_2(i, j)_{k+1}, \text{ где } k = 1, 2, 3, \dots, q-1; q - \text{число ребер графа.}$$

Шаг 3.  $t = 1$ .

Шаг 4. В граф возвращаются первые  $t$  ребер упорядочения  $\pi$ .

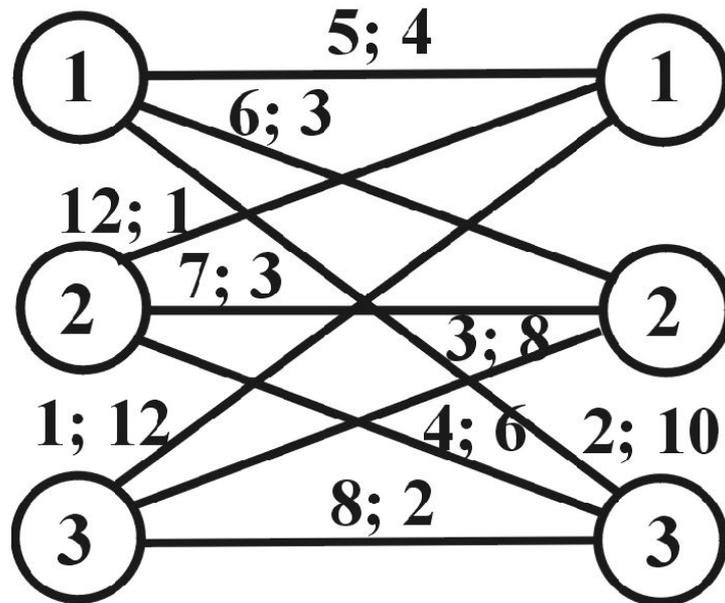
Шаг 5. На полученном графе ищется решение «классической» задачи о назначениях.

## АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 2 (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

- Шаг 6. Если значение целевой функции больше, чем  $C$ , то перейти к Шагу 7, нет – к Шагу 10.
- Шаг 7.  $t = t + 1$ .
- Шаг 8. Если  $t < q + 1$ , то перейти к Шагу 4, если же  $t > q$ , - то к Шагу 9.
- Шаг 9. Печать «Нет решения», перейти к Шагу 11.
- Шаг 10. Время выполнения плана равно  $r_2(i, j)_t$ .
- Шаг 11. Конец алгоритма.

## ПРИМЕР 2

Решить задачу 2 для графа  $G(X, U)$  при  $C = 26$ . Исходные данные представлены на рисунке и в таблице ниже.



	1	2	3
1	5 4	6 3	2 10
2	12 1	7 3	4 6
3	1 12	3 8	8 2

## ПРИМЕР 2 (продолжение)

- Перестановка  $\pi$ , полученная на шаге 2, имеет вид:  $\pi = \{(2,1); (3,3); (1,2); (2,2); (1,1); (2,3); (3,2); (1,3); (3,1)\}$ .

$t = 1$

$\infty$	$\infty$	$\infty$
12	$\infty$	$\infty$
$\infty$	$\infty$	$\infty$

$$R = \infty > C$$

$t = 2$

$\infty$	$\infty$	$\infty$
12	$\infty$	$\infty$
$\infty$	$\infty$	8

$$R = \infty > C$$

$t = 3$

$\infty$	6	$\infty$
12	$\infty$	$\infty$
$\infty$	$\infty$	8

$$R = 26 > C$$

$t = 4$

$\infty$	6	$\infty$
12	7	$\infty$
$\infty$	$\infty$	8

$$R = 26 > C$$

$t = 5$

$\infty$	6	$\infty$
12	7	$\infty$
$\infty$	$\infty$	8

$$R = 20 = C$$

# РЕШИТЬ САМОСТОЯТЕЛЬНО

24	30	14	10
12	6	22	26
18	20	15	28
18	16	21	18
11	17	16	27
24	19	19	10
9	12	5	28
20	24	30	8

$$\begin{cases} T \rightarrow \min; \\ C \leq 76. \end{cases}$$

# Задания к контрольной работе

цель - минимизация времени выполнения плана при ограничении на величину затрат «С».

№	С(макс)	№	С(макс)	№	С(макс)	№	С(макс)
1	84	8	51	15	53	22	92
2	76	9	55	16	49	23	70
3	47	10	52	17	50	24	83
4	52	11	72	18	40		
5	67	12	48	19	86		
6	48	13	70	20	50		
7	50	14	76	21	71		