Дискретная математика

Гр. ИВТ-25Д
Хаиртденов Т.К
СФТИ НИЯУ МИФИ
г.Снежинск
2016

Справочные данные

- Кафедра АИВС (Автоматизированных информационных и вычислительных систем)
- Преподаватель Мякушко Эдуард Валерьевич
- Заведующий кафедрой Крушный Валерий Васильевич

Введение

- **Дискре́тная матема́тика** — часть математики, изучающая дискретные математические структуры, такие, как графы и утверждения в логике.
- **Дискретная математика** – область математики, занимающаяся изучением дискретных структур (конечного характера), возникающие как в пределах математики, так и в ее приложениях.

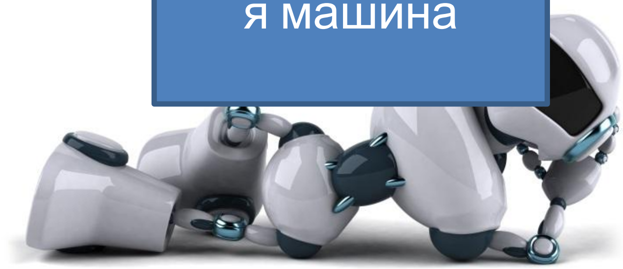
Введение

- Дискретная математика – математический аппарат, заложенный в основу работы всех основных цифровых устройств.
- Студент изучающий информатику и вычислительные устройства, не может не знать дискретной математики.

Информационно - измерительная система Человек

Информационно - измерительная система Техническая

Измерительные устройства (датчики) → Цифровая вычислительная машина → Исполнительные устройства



Восприятие внешнего мира информационно – измерительными системами

- Объекты который присутствуют вокруг нас (внешний мир), будем воспринимать используя математический объект – множество.
- **Мно́жество** — одно из ключевых понятий математики, в частности, теории множеств и логики.
- **Множество –** соединение в некое «M» определенных, хорошо различимых предметов «m» нашего созерцания или нашего мышления (которое будет называться «Элементами множества «M»»)

Мое личное определение, что есть множество.

- Множество – это совокупность различных объектов, объединенное в единое целое.

Восприятие внешнего мира роботом

Множество А

Множество В

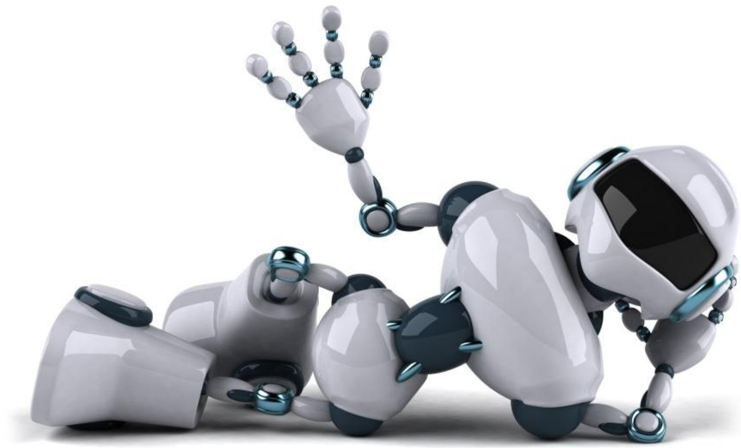
Множество С

Робот воспринимает внешний мир, опираясь на множества, а в множествах выделяя наличие или отсутствие элементов множества.

0 – отсутствие элемента в множестве,

1 – наличие элементов в множестве

000111100101010101000101010010101010101010010101010101010101010101
000111100101010101000101010010101010101010010101010101010101010
000111100101010101000101010010101010101010010101010101010101010
000111100101010101000101010010101010101010010101010101010101010
000111100101010101000101010010101010101010010101010101010101010
000111100101010101000101010010101010101010010101010101010101010
000111100101010101000101010010101010101010010101010101010101010

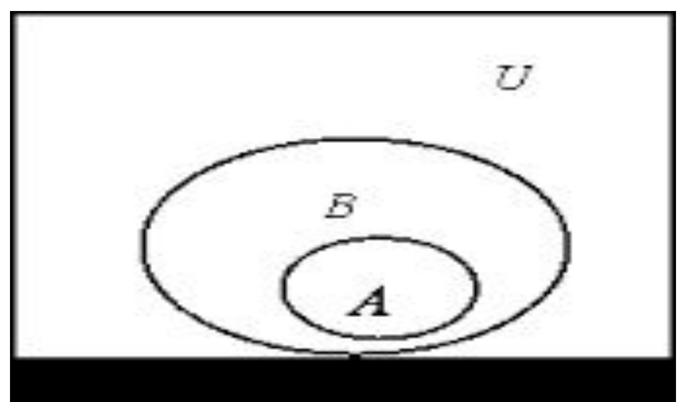


Формальное представление множеств

- $A = \{a, b, c, d\}$
- $a \in A, b \in A, c \in A, d \in A$ – принадлежность элементов множеству
- $f \notin A, g \notin A, h \notin A$ – не принадлежность элементов множеству
- $|A|$= количество элементов множества (мощность множества)
- $|A| = 4$

Пустое множество. Универсум.

- |A| = 0, множество A – пустое множество, т.к у него отсутствуют элементы. Обозначение Ø.
- Универсум – универсальное множество. Обозначается U, показывает границы в которых находятся все остальные множества.



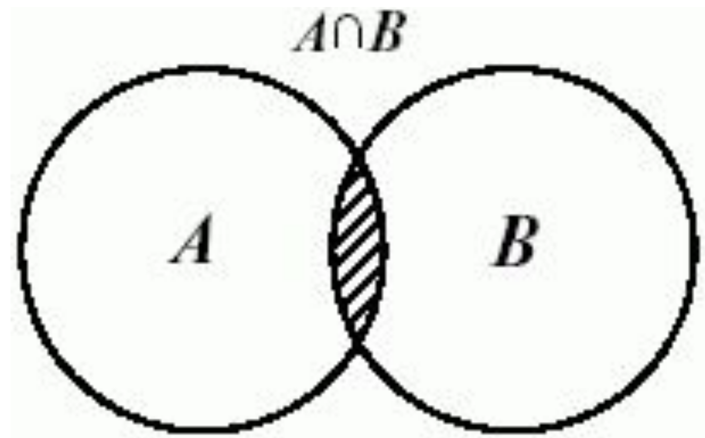
Множество. Вектор.

A= {a,b,c,d},элементы множества можно перемещать. Важно наличие элемента, а не его положение. A = {b,c,a,d}

A= (a,b,c,d),A – вектор, элементы вектора находятся каждый в своем месте, поэтому они называются координатами. Координаты нельзя перемещать со своего места.

Операции над множествами.

- Взаимодействие множеств можем показать через операции над ними.
- Пересечение множеств A⋂B = общие элементы

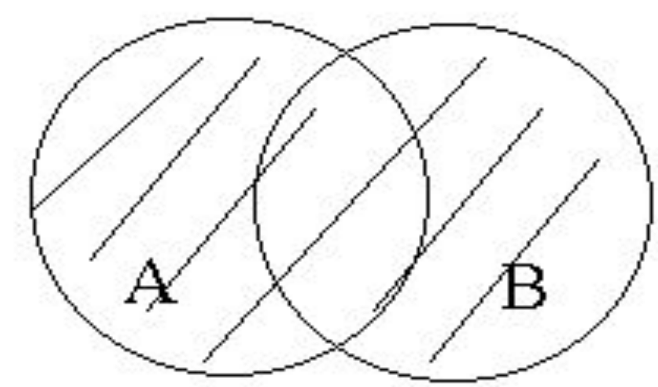


Пример пересечения множеств.

- $|U| = 10$, $|A| = 8$, $|B| = 5$, $|A \cap B| = 3$
- $U = \{a,b,c,d,e,r,t,y,u,q\}$
- $A = \{a,b,c,t,r,e,y,q\}$
- $B = \{a,b,c,u,d\}$
- $A \cap B = \{a,b,c\}$

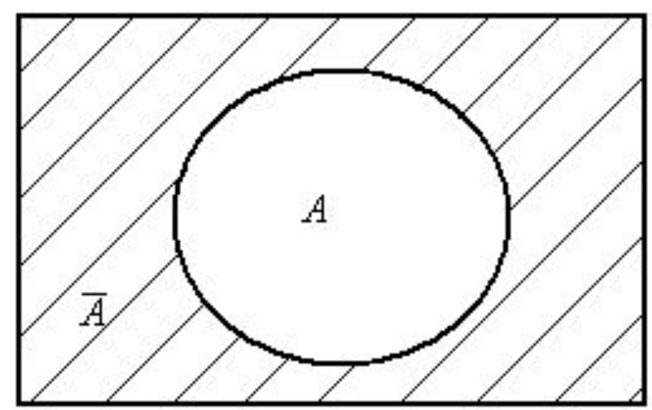
Объединение множеств.

- $|U| = 10$, $|A| = 8$, $|B| = 5$ $|A \cup B| = 10$
- $U = \{a,b,c,d,e,r,t,y,u,q\}$
- $A = \{a,b,c,t,r,e,y,q\}$
- $B = \{a,b,c,u,d\}$
- $A \cup B = \{a,b,c,t,r,e,y,q,d,u\}$



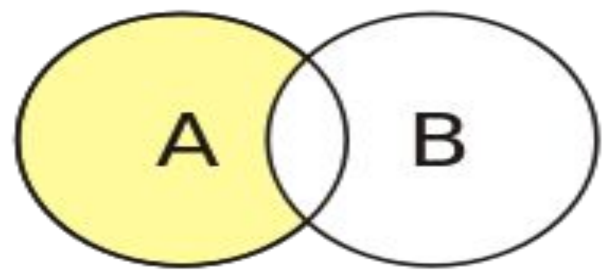
Дополнение.

- Дополнение – это элементы которые не достают до универсума
- |U| = 10, |A| = 8
- U = {a,b,c,d,e,r,t,y,u,q}
- A = {a,b,c,t,r,e,y,q}
- ¬A = {d,u}



Разность множеств.

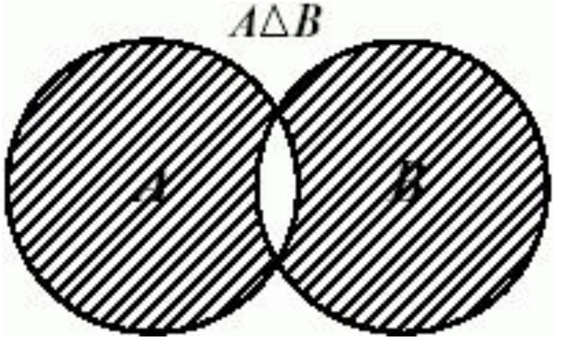
- $|U| = 10$, $|A| = 8$, $|B| = 5$
- $U = \{a,b,c,d,e,r,t,y,u,q\}$
- $A = \{a,b,c,t,r,e,y,q\}$
- $B = \{a,b,c,u,d\}$
- $A \setminus B = \{t,r,e,y,q\}$
- $B \setminus A = \{u,d\}$



A\B

Симметрическая разность.

- $|U| = 10$, $|A| = 8$, $|B| = 5$
- $A \cup B = \{a,b,c,t,r,e,y,q,d,u\}$
- $A \cap B = \{a,b,c\}$
- $A \Delta B = \{t,r,e,y,q,d,u\}$



Самостоятельная работа.

Множество подмножеств.(Булеан)

- $A = \{x,y,z\}$
- $\beta(A)$ – множество подмножеств
- $\beta(A) = \{\varnothing,\{x\},\{y\},\{z\},\{xy\},\{xz\},\{yz\},\{x,y,z\}\}$
- $|\ \beta(A)\ | = 8 = 2^n$,где n – число элементов множества.
- Множество подмножеств - это объекты, окружающие информационно - измерительную систему(роботы)
- Робот воспринимает эти объекты через двоичные вектора

Взаимно – однозначные соответствия Булеана и множества двоичных векторов

- $\beta(A) = \varnothing \leftrightarrow (0,0,0)$
- $\{x\} \leftrightarrow (1,0,0)$
- $\{y\} \leftrightarrow (0,1,0)$
- $\{z\} \leftrightarrow (0,0,1)$
- $\{xy\} \leftrightarrow (1,1,0)$
- $\{xz\} \leftrightarrow (1,0,1)$
- $\{yz\} \leftrightarrow (0,1,1)$
- $\{x,y,z\} \leftrightarrow (1,1,1)$

Таким образом единица показывает наличие элемента,
А ноль его отсутвие в подмножестве который является
элементом Булеана

Пример

- A = {a,b,c,d}
- β(A) = Ø↔(0,0,0,0,)
- {a,b,c,d} ↔(1,1,1,1)
- {a,b} ↔(1,1,0,0)
- {a,c} ↔(1,0,1,0)
- {a,d} ↔(1,0,0,1)
- {b,c} ↔(0,1,1,0)
- {b,d} ↔(0,1,0,1)
- {c,b} ↔(0,1,1,0)
- {a} ↔(1,0,0,0)
- {b} ↔(0,1,0,0)
- {c} ↔(0,0,1,0)
- {d} ↔(0,0,0,1)
- {a,b,c} ↔(1,1,1,0)
- {a,b,d} ↔{1,1,0,1}
- {d,b,c} ↔(0,1,1,1)
- {a,c,d} ↔(1,0,1,1)

Взаимодействие объектов показывается через операции над подмножествами

- $\beta(A) = \varnothing \leftrightarrow (0,0,0)$
- $\{x\} \leftrightarrow (1,0,0)$
- $\{y\} \leftrightarrow (0,1,0)$
- $\{z\} \leftrightarrow (0,0,1)$
- $\{xy\} \leftrightarrow (1,1,0)$
- $\{xz\} \leftrightarrow (1,0,1)$
- $\{yz\} \leftrightarrow (0,1,1)$
- $\{x,y,z\} \leftrightarrow (1,1,1)$
- $\{x\} \cap \{y\} = \varnothing \leftrightarrow (1,0,0)*(0,1,0) = (0,0,0)$
- $\{x,y\} \cup \{z,x\} = \{x,y,z\} \leftrightarrow (1,1,0)+(1,0,1) = (1,1,1)$ (дизъюнкция -max)
- $\neg\{z\} = \{x,y\} \leftrightarrow \neg(0,0,1)=(1,1,0)$(отрицание)
- Операции пересечения, объединения и дополнения являются Булевыми операциями над подмножествами.

Пример №2

- $A = \{a,b,c,d\}$
- $\beta(A) = \varnothing \leftrightarrow (0,0,0,0)$
- $\{a,b,c,d\} \leftrightarrow (1,1,1,1)$
- $\{a,b\} \cap \{c,d\} = \varnothing \leftrightarrow (1,1,0,0)*(0,0,1,1)=(0,0,0,0)$
- $\{a,c\} \cup \{b,d\} = \{a,b,c,d\}\ \varnothing \leftrightarrow (1,0,1,0)*(0,0,1,1)=(0,0,0,0)$
- $\neg\{d\} = \{a,b,c\} \leftrightarrow \neg(0,0,0,1)=(1,1,1,0)$

Опреации над множествами (подмножествами) обладают определенными свойствами

№	Множества	Переменные логических функций
1	Коммутативность A∩B = B∩A ; AUB = BUA	$X_1*X_2=X_2.X_1$; $X_1+X_2 = X_2+X_1$
2	Ассоциативность (A∩B)∩C=A∩(B∩C); (AUB)UC=AU(BUC);	$(X_1*X_2)*X_3=X_1(X_2*X_3)$ $(X_1+X_2)+X_3=X_1+(X_2+X_3)$
3	Дистрибутивность (A∩B)UC=(AUC) ∩(BUC);(AUB) ∩C=(A∩C)U(B∩C)	$(X_1*X_2)+X_3=(X_1+X_3)*(X_2+X_3)$; $(X_1+X_2)*X_3=(X_1*X_3)+(X_2*X_3)$;
4	Закон Де Моргана ⌐(A∩B)=⌐AU⌐B; ⌐(AUB)=⌐A∩⌐B	$\neg(X_1*X_2)=\neg X_1+\neg X_2$ $\neg(X_1+X_2)=\neg X_1*\neg X_2$
5	Объединение множества AUA=A	$X_1+X_1=X_1$
6	Пересечение множества A∩A=A	$X_1*X_1=X_1$
7	Объединение с дополнением множества AU⌐A=U	$X_1+\neg X_1=1$
8	Пересечение с дополнением A∩⌐A=∅	$X_1*\neg X_1=0$
9	Объединение с универсумом AUU=U	$X_1+1=1$
10	Пересечение с универсумом A∩U=A	$X_1*1=X_1$

Взаимно – однозначные соответствия для построения цифровых технических систем

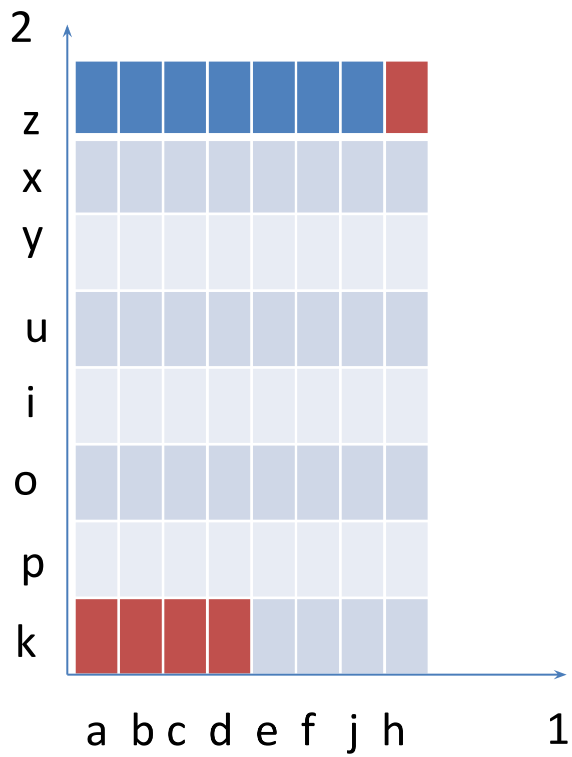
- (β(A), ∪, ∩, -)
- ↕ ↕ ↕ ↕
- (B^n, +, *, ⌐)
- ↕ ↕ ↕ ↕
- (P(n), +, *, ⌐)
- где β(A) – множество подмножеств; B^n - множество двоичных векторов длины n; P(n) - множество переменных логических функций где n - количество переменных.

Операции над переменными логических функций.

X_1 X_2	Const 0	X_1*X_2	$\neg(X_1*X_2)$	X_1+X_2	$\neg(X_1+X_2)$	$X_1\to X_2$	$\neg(X_1\to X_2)$
00	0	0	1	0	1	1	0
01	0	0	1	1	0	1	0
10	0	0	1	1	0	0	1
11	0	1	0	1	0	1	0

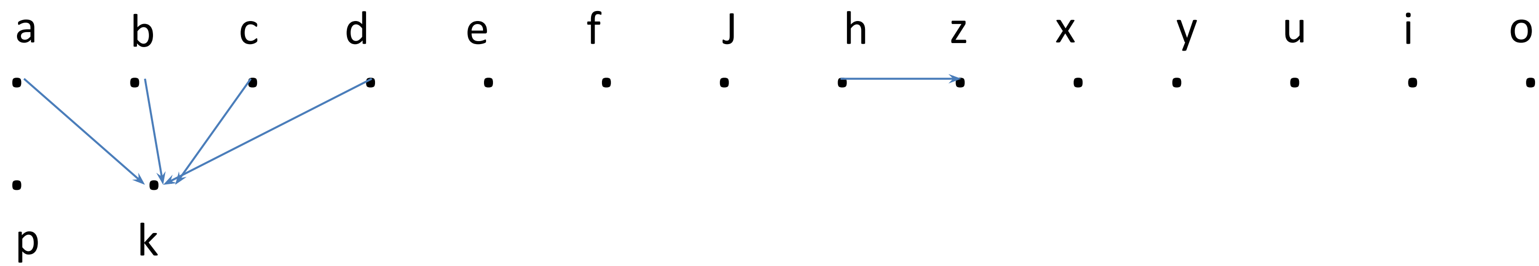
$X_2\to X_1$	$\neg(X_2\to X_1)$	$X_1\equiv X_2$	$\neg(X_1\equiv X_2)$	X_1	$\neg X_1$	X_2	$\neg X_2$	Const 1
1	0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1

Отношения

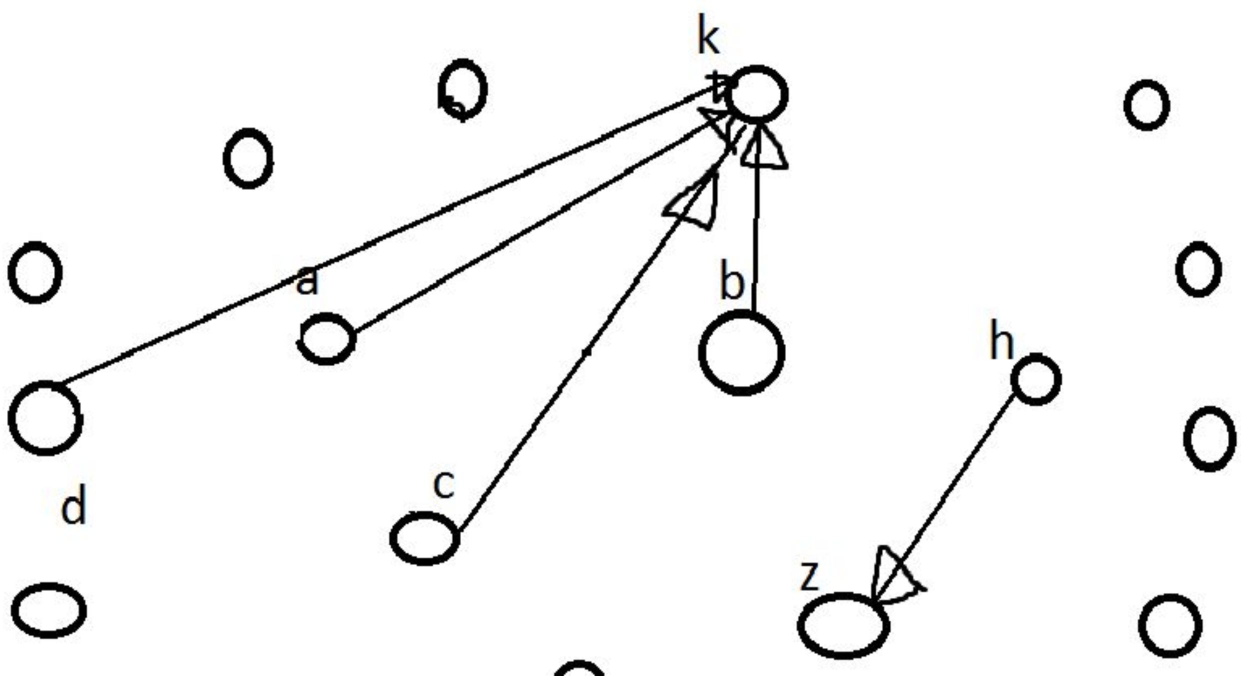


A={a,b,c,d,e,f,j,h}
B={z,x,y,u,I,o,p,k}
A×B - произведение множеств(Декартовое произведение)
|A×B|= 64
A×B = {(a,k),(b,k),(c,k),(d,k)…(e,z),(f,z),(j,z),(h,z)}
Relation – отношение, это множество показывающее отношение между элементами множеств входящих в прямое произведение. Обозначается R, находится внутри границ A×B являющегося универсумом. Пример: |R|= 5; R = {(a,k),(b,k),(c,k),(d,k),(h,z)}. |R|= |A×B| - полное отношение; |R|= 0 – пустое отношение.

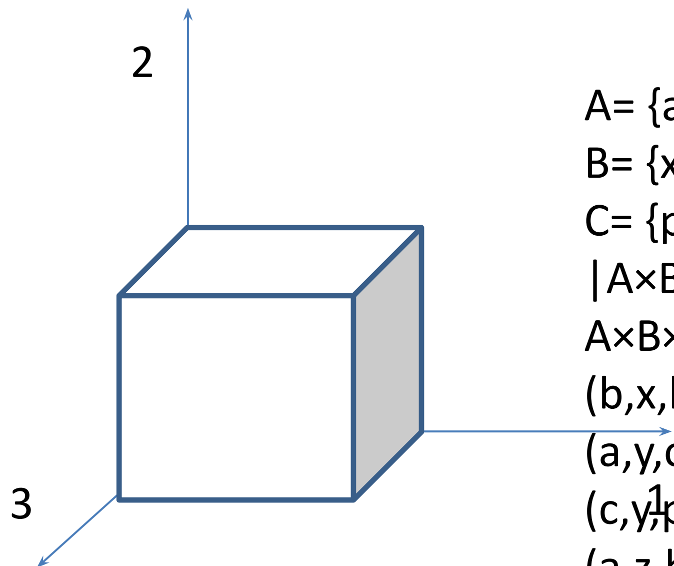
Графическое изображение отношений (граф)



Граф – топологический объект, расположение вершин графа не фиксировано, а фиксировано лишь связь между вершинами (элементами множеств)являющимися отношением



Отношение на прямом произведении A×B×C



A= {a,b,c}, расположено на оси 1
B= {x,y,z}, расположено на оси 2
C= {p,o,h}, расположено на оси 3
|A×B×C|= 27
A×B×C={(a,x,p),(a,x,o),(a,x,h),(b,x,p),(b,x,o),(b,x,h),(c,x,p),(c,x,o),(c,x,h),(a,y,p),(a,y,o),(a,y,h),(b,y,p),(b,y,o),(b,y,h),(c,y,p),(c,y,o),(c,y,h),(a,z,p),(a,z,o),(a,z,h),(b,z,p),(b,z,o),(b,z,h),(c,z,p),(c,z,o),(c,z,h)}

Примеры отношения на прямом произведении $A \times B \times C$

- $R \subseteq A \times B \times C$
- $|R|=8$, $R =\{(a,x,p),(a,x,o),(a,x,h),(b,x,p),(b,x,o),$
- $(b,x,h),(c,x,p),(c,x,o)\}$

Операции над отношениями

- $R_1 \subseteq A \times B$, $|A| = 5$, $|B| = 5$, $A = \{a,b,c,d,e\}$, $B = \{f,i,j,h,k\}$
- $R_2 \subseteq A \times B$, $|R_1| = 12$, $|R_2|$

R_1	f	i	j	h	k
a	0	0	1	1	1
b	1	0	1	0	1
c	1	1	0	0	0
d	0	0	1	1	0
e	1	0	0	0	0

R_2	f	i	j	h	k
a	0	1	0	0	1
b	1	0	1	1	1
c	1	0	1	0	0
d	0	0	1	0	1
e	1	0	1	0	1

$R_1 \cap R_2$	f	i	j	h	k
a	0	0	0	0	1
b	1	0	1	0	1
c	1	0	0	0	0
d	0	0	1	0	0
e	1	0	0	0	0

Обратное отношение.

- R^{-1} – обозначение обратного отношения.
- $R = \{(a,b),(c,d),(e,f),(i,j)\}$
- $R^{-1} = \{(b,a),(d,c),(f,e),(j,i)\}$
- Т.о отношение осуществляется в «обратную» сторону

Композиция отношений.

- $R_1 \subseteq A \times B$
- $R_3 \subseteq B \times C$
- $R_1 \subseteq A \times B$
- $R_1 \circ R_3$ - обозначение операции.
- $R_1 \circ R_3 \subseteq A \times C$, таким образом операция композиция позволяет перейти в другой универсум («расширить» действие отношений).

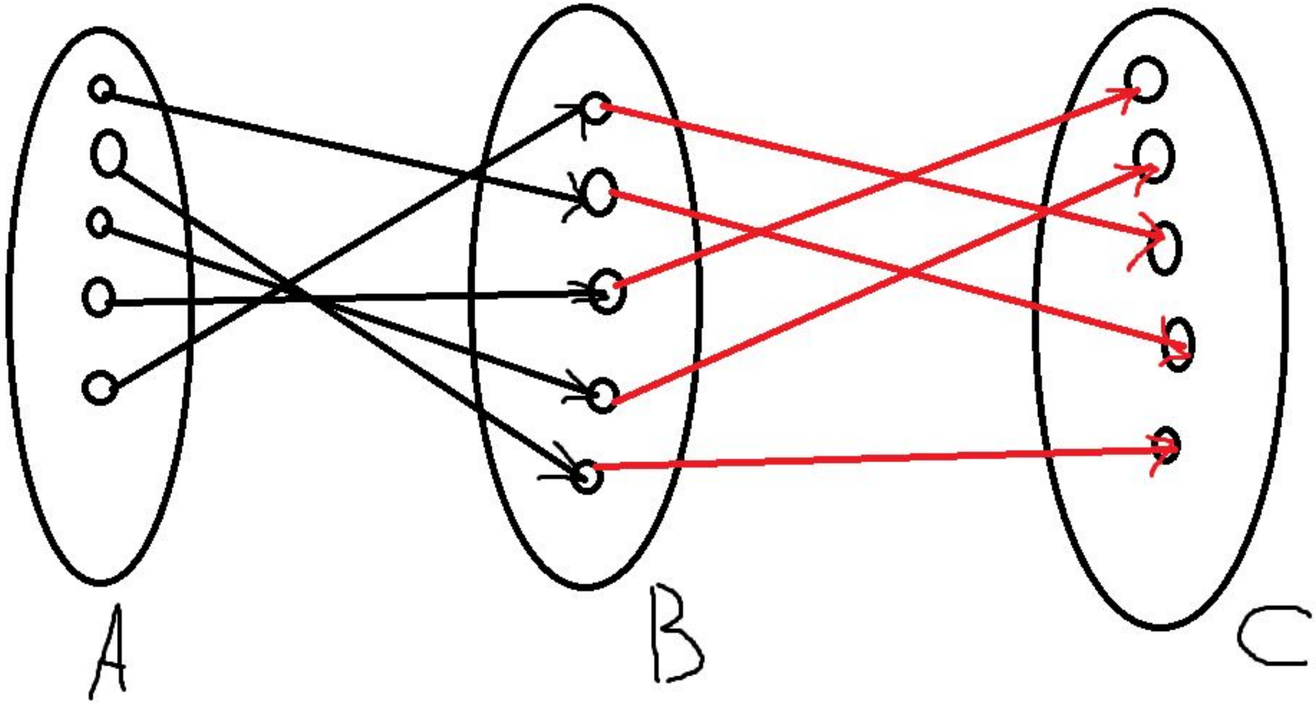
$|C| = 5$, $C = \{q,w,e,r,t\}$, $|R_3| = 14$

R_1	f	i	j	h	k
a	0	0	1	1	1
b	1	0	1	0	1
c	1	1	0	0	0
d	0	0	1	1	0
e	1	0	0	0	0

R_3	q	w	e	r	t
f	1	0	0	0	1
i	1	1	1	0	0
j	0	1	0	1	1
h	1	0	1	0	1
k	1	0	1	1	0

$R_1 \circ R_3$	q	w	e	r	t
a	1	1	1	1	1
b	1	1	1	1	1
c	1	1	1	0	1
d	1	1	1	1	1
e	1	0	0	0	1

Графическое изображение операции композиция.



Отношения на прямом произведении Булеана.

- $R \subseteq \beta(A) \times \beta(A)$, где $A = \{x,y,z\}$, R - пересечение

R	Ø	{x}	{y}	{z}	{x,y}	{x,z}	{y,z}	{x,y,z}
Ø	0	0	0	0	0	0	0	0
{x}	0	1	0	0	1	1	0	1
{y}	0	0	1	0	1	0	1	1
{z}	0	0	0	1	0	1	1	1
{x,y}	0	1	1	0	1	1	1	1
{x,z}	0	1	0	1	1	1	1	1
{y,z}	0	0	1	1	1	1	1	1
{x,y,z}	0	1	1	1	1	1	1	1

Контрольная работа №2

- $R_1 \subseteq A \times B$
- $R_2 \subseteq A \times B$
- $R_3 \subseteq B \times C$
- $|A|=|B|=|C|=10; |R_1| = 70, |R_2| = 80$
- $|R_3| = 60$
- Выполнить операции над отношениями
- Сформировать отдельный файл (в свою папку группы)
- Единицы в произвольном порядке

Переменные логических функций. Операции над переменными логических функций.

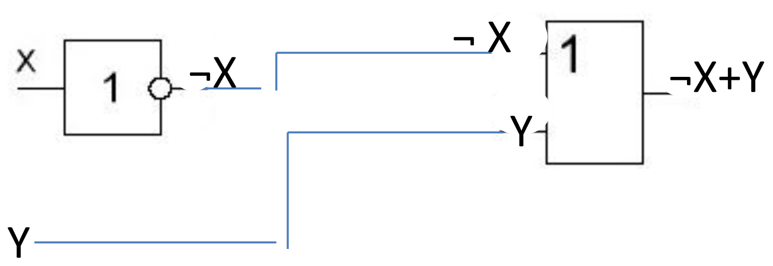
Операция	Отрицание операции
Const 1;K_1	Const 0; K_0
Конъюнкция $X \bullet Y$	Отрицание конъюнкции $\neg(X \bullet Y)$;штрих Шеффера $X \mid Y$
Дизъюнкция $X+Y$	Отрицание дизъюнкции $\neg(X+Y)$; стрелка Пирса $X \downarrow Y$
Импликация $X \rightarrow Y$	Отрицание импликации$\neg(X \rightarrow Y)$
Обратная импликация $Y \rightarrow X$	Отрицание обратной импликации$\neg(Y \rightarrow X)$
Равнозначность(эквивалентность) $X \equiv Y$	Неравнозначность $\neg(X \equiv Y)$;Сложение по модулю 2 $X \oplus Y$
Переменная X	Отрицание переменной $\neg X$
Переменная Y	Отрицание переменной $\neg Y$

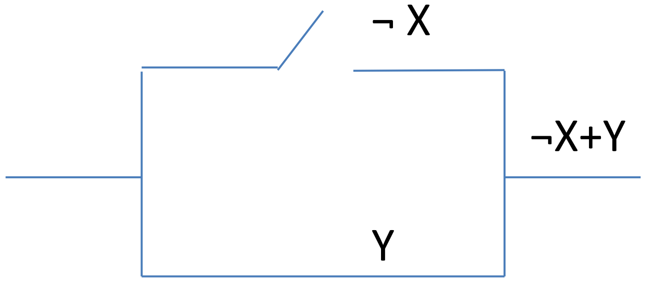
XY	K_1	K_0	X• Y	¬ (X• Y);	X+ Y	¬ (X+ Y)	X → Y	¬ (X → Y)	Y → X	¬ (Y → X)	X≡ Y	X⊕ Y	X	¬X	Y	¬Y
00	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1
01	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0
10	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
11	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Любую операцию над переменными логических функций мы можем представить через Булевый базис(•, +,¬).

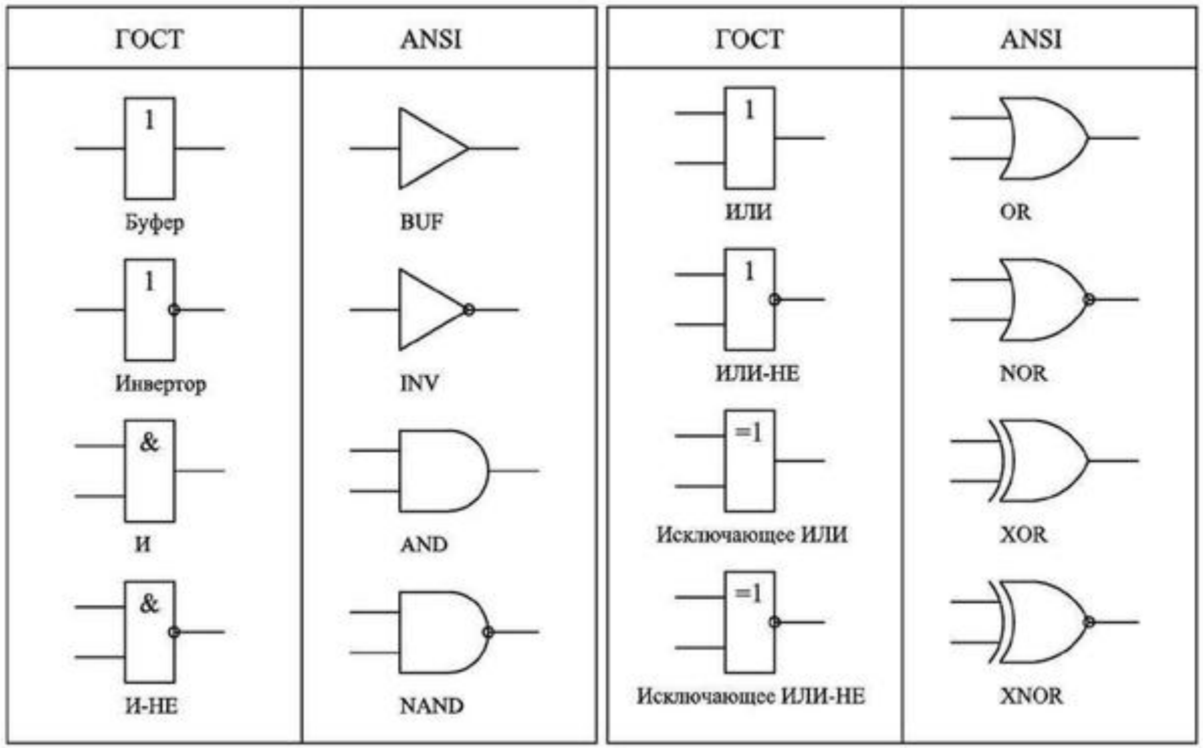
XY	X→Y	¬X+Y
00	1	1
01	1	1
10	0	0
11	1	1

Это позволяет использовать в вычислительных системах минимальное количество логических элементов.

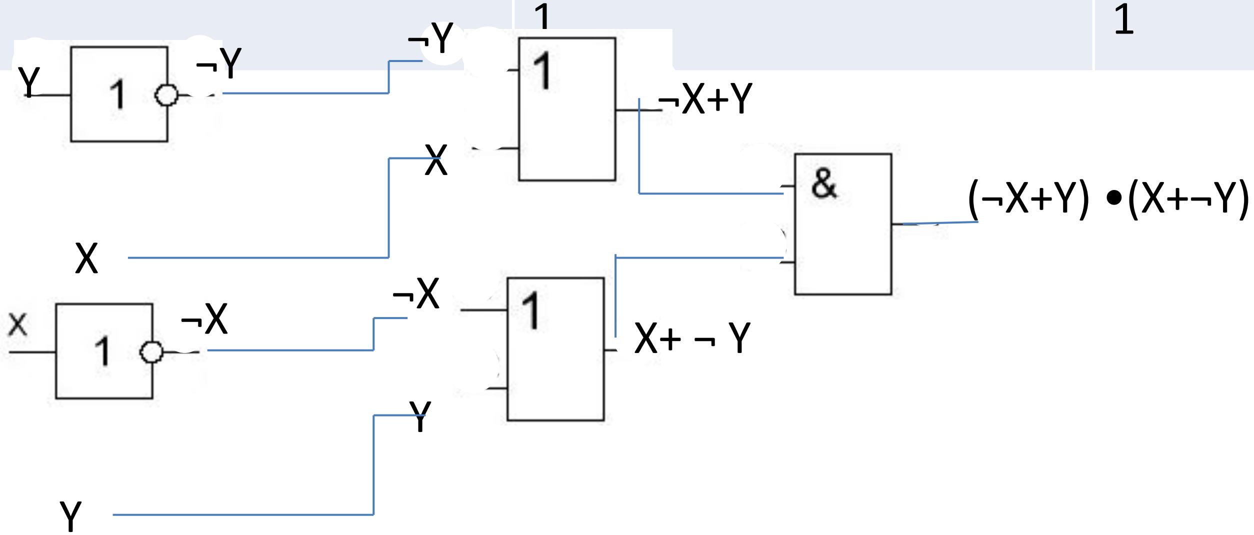




Схемное изображение логических элементов.



XY	X≡Y	(¬X+Y) •(X+¬Y)
00	1	1
01	0	0
10	0	0
11	1	1



Операция эквивалентность реализованная в Булевом базисе с помощью релейно-контактной схемы.

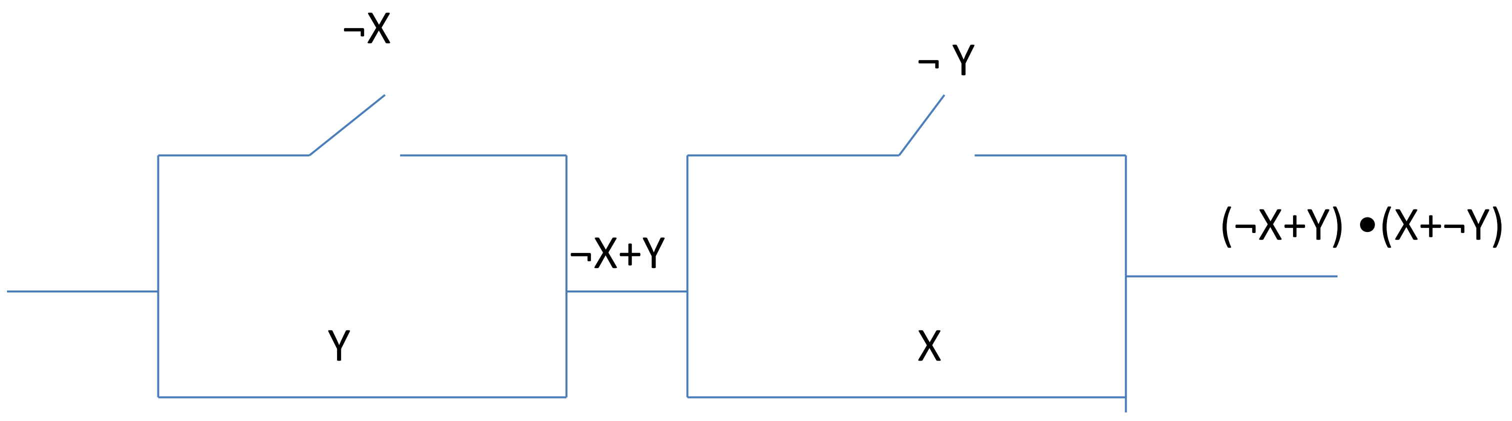


Таблица истинности (переключательная таблица)

- С помощью таблиц истинности получаем результат логической функции для любого числа переменных.
- Пример: $F(x,y,z)=x\bullet(y\rightarrow\neg z)+(x\equiv\neg y)$

Решение функций с помощью таблицы истинности.

- $F(x,y,z)=x\bullet(y\longrightarrow\neg z)+(x\equiv\neg y)$

xyz	¬z	y→¬z	¬y	x≡¬y	x•(y→¬z)	x•(y→¬z)+(x≡¬y)
000	1	1	1	0	0	0
001	0	1	1	0	0	0
010	1	1	0	1	0	1
011	0	0	0	1	0	1
100	1	1	1	1	1	1
101	0	1	1	1	1	1
110	1	1	0	0	1	1
111	0	0	0	0	0	0

Решение представленное в таблице можно представить в Булевом базисе в виде СДНФ(совершенные дизъюнктивной нормальной формы

Решение функций с помощью таблицы истинности.

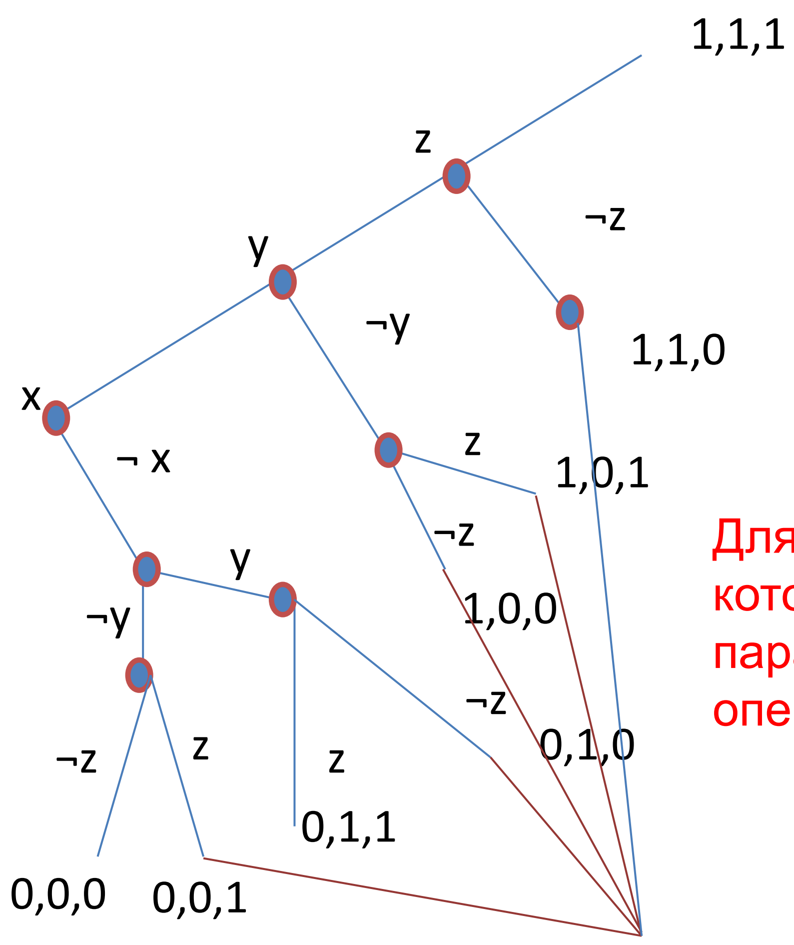
- F(x,y,z)=x•(y⟶¬z)+(x≡¬y)

xyz	x•(y⟶¬z)+(x≡¬y)
000	0
001	0
010	1
011	1
100	1
101	1
110	1
111	0

СДНФ включает в себя те наборы переменных на которых получен результат 1.
5 наборов т.к. 5 единиц

¬ xy ¬ z+xyz+x ¬ y ¬ z+x ¬ yz+xy ¬ z

Схемная реализация вычисления логической функции от 3х переменных с помощью рэлейно – контактной схемы (веник).



Для решения СДНФ необходимы наборы, на которых получили единицу включить параллельно. Параллельное соединение – операция конъюнкция.

¬ xy ¬ z+xyz+x ¬ y ¬ z+x ¬ yz+xy ¬ z

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	((z•y)))≡ ((⌐c)+(⌐y))
0	0	0	1	0	1	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1	1	1
0	0	0	1	0	1	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1	1	1
0	0	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	0	1	0	0	0	0

x,y,z,c	(⌐(x+c))⟶((z•y)))≡((⌐c)+(⌐y))
0000	0
0001	1
0010	0
0011	1
0100	0
0101	0
0110	1
0111	0
1000	1
1001	1
1010	1
1011	1
1100	1
1101	0
1110	1

x,y / z,c	00	01	11	10
00	0	0	1	0
10	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	0	1	1	1

x,y / z,c	00	01	11	10
00	0	0	1	0
10	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	0	1	1	1

Сднф: xy ¬z¬c +¬x¬y¬z¬c
Данное сднф можно минимизировать.
Правило: заключаем единицы в квадратной таблице в контур (единицы располагаются рядом, вертикально или горизонтально). S_k= площадь контура (количество единиц, заключенных в контур) S_k где m-количество переменных, i-целое число от (0..m)/ В нашем примере 2^{4-1}= 2^3=8;

z,c \ x,y	00	01	11	10
00	0	0	1	0
10	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	0	1	1	1

В зеленый контур входят:¬xy¬z¬c + ¬x¬y¬z¬c

количество сохраняемых переменных в контуре $n=\log_2 S_k=1$

¬xy¬z¬c + ¬x¬y¬z¬c = ¬xy¬z¬c + ¬x¬z¬c

В синий контур входят:¬x¬y¬z¬c + ¬x¬y¬zc + ¬x¬yzc + ¬x¬yz¬c

количество сохраняемых переменных в контуре $n=\log_2 S_k=2$

¬x¬y¬z¬c + ¬x¬y¬zc + ¬x¬yzc + ¬x¬yz¬c = ¬x¬y

В фиолетовый контур входят: ¬x¬y¬zc + ¬x¬yzc

количество сохраняемых переменных в контуре $n=\log_2 S_k=1$

¬x¬y¬zc + ¬x¬yzc = ¬x¬yc

В желтый контур входят:¬x¬yz¬c + ¬xyz¬c

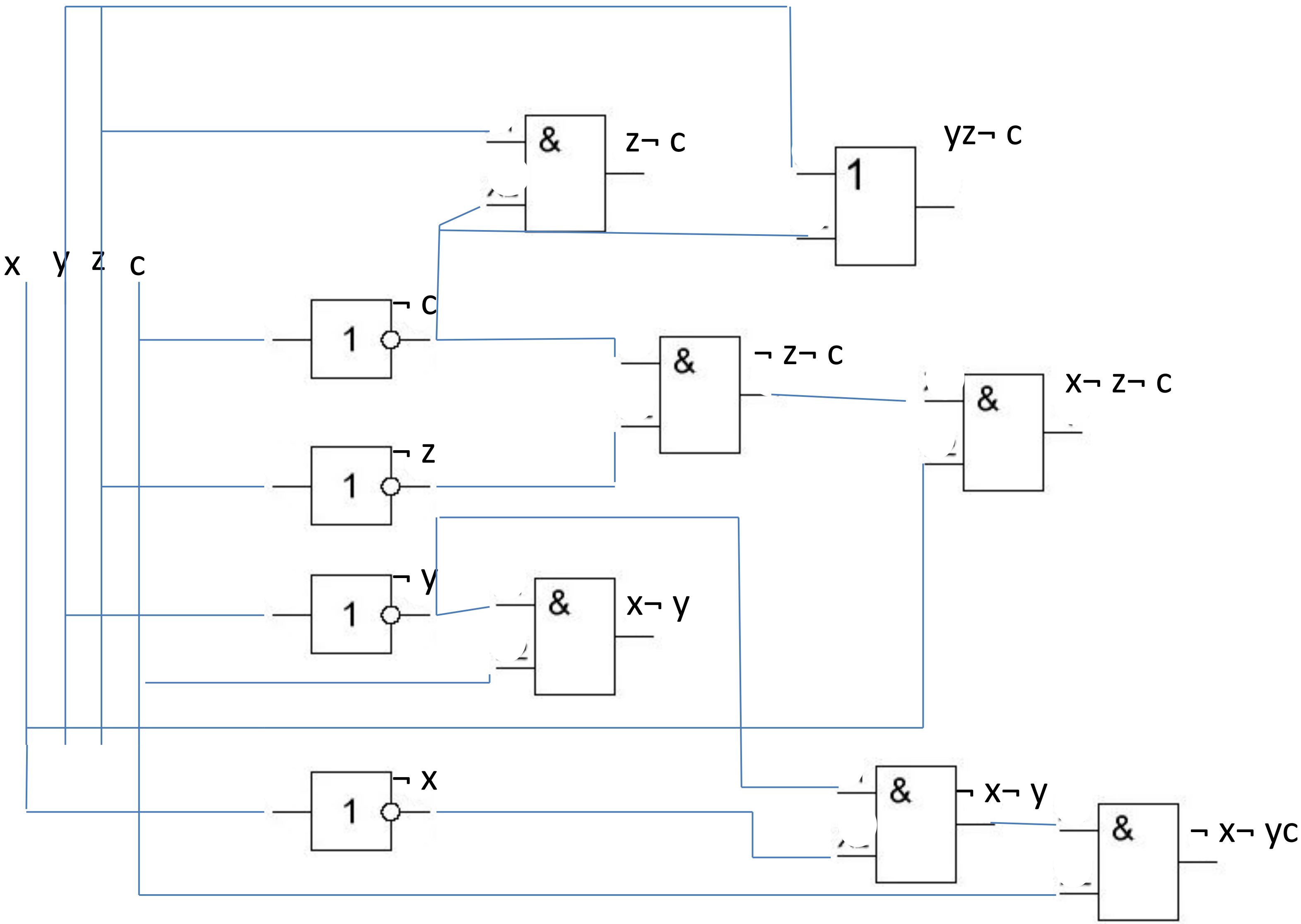
количество сохраняемых переменных в контуре $n=\log_2 S_k=2$

СДНФ:

xy¬z¬c ∪ x¬y¬z¬c ∪ ¬x¬y¬zc ∪ x¬y¬zc ∪ ¬x¬yzc ∪ x¬yzc ∪ ¬xyz¬c ∪ xyz¬c ∪ x¬yz¬c

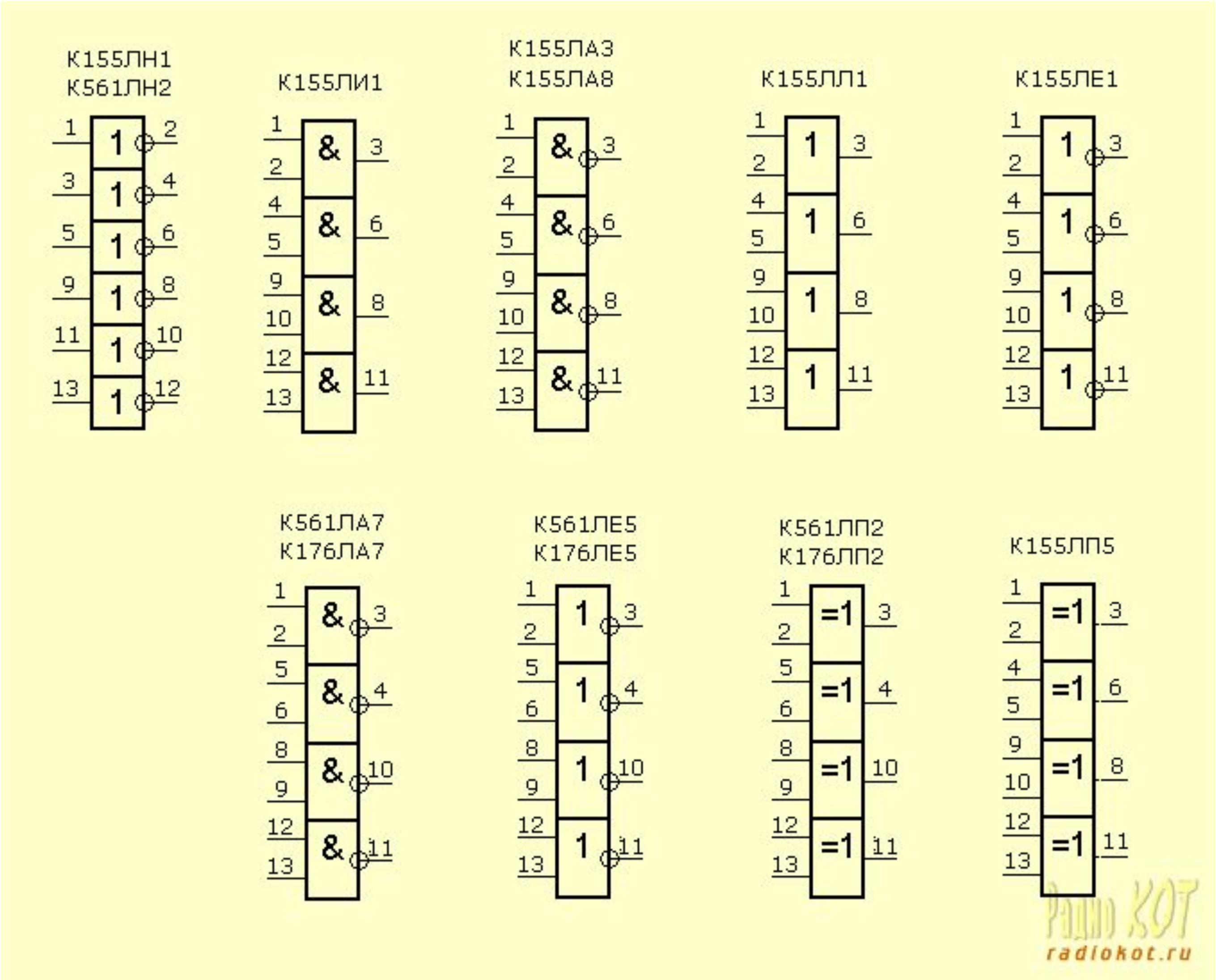
Минимизированная СДНФ: x¬z¬c + x¬y + ¬x¬yc + xz¬c + yz¬c

Решим минимизированную с помощью логических элементов



x y z c
&
z¬ c
1
yz¬ c
1
¬ c
&
¬ z¬ c
&
x¬ z¬ c
1
¬ z
1
¬ y
&
x¬ y
1
¬ x
&
¬ x¬ y
&
¬ x¬ yc

Логические элементы с большим количеством входов.

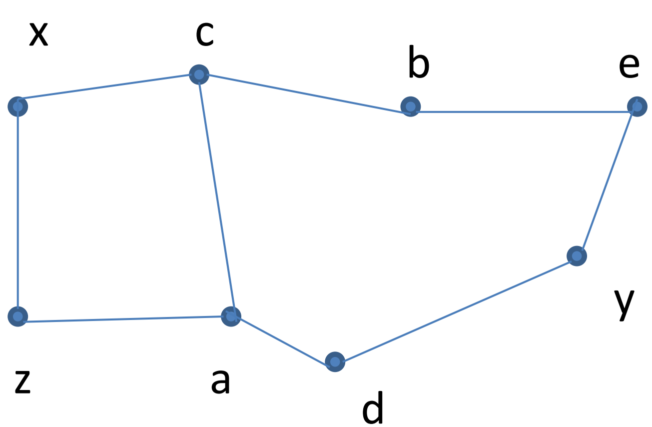


Графы.

- Граф состоит из множества вершин и множества ребер (ребра соединяют вершины или одну вершину).
- Если ребра имеют ориентацию (вход и выход),значит граф ориентированный, если не имеют, значит граф не ориентированный.
- Граф – есть топологический объект – расположение вершин не фиксировано (располагаются где угодно), фиксируются лишь соединения вершин ребрами.

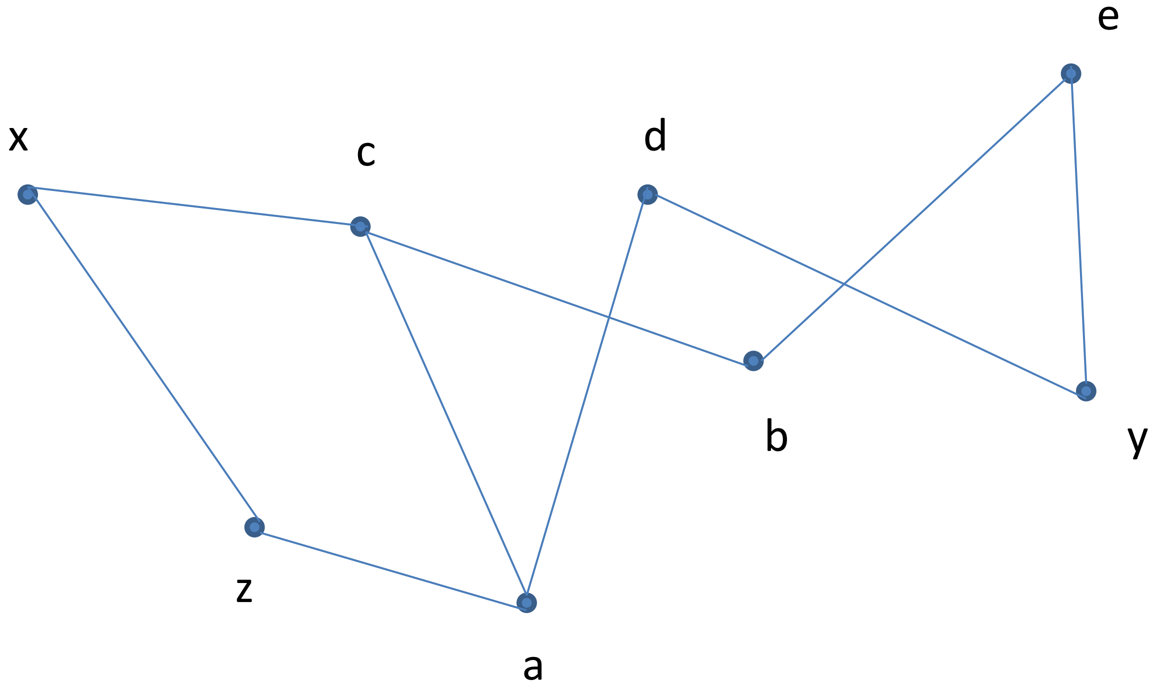
Неориентированный граф.

A={x,y,z,c,a,b,d,e} – множество вершин.



B={{x,z},{x,c},{c,b},{b,e},{e,y},{y,d},{d,a},{a,z},{c,a}} – множество ребер.

При изменении вершин топология графа не изменяется.



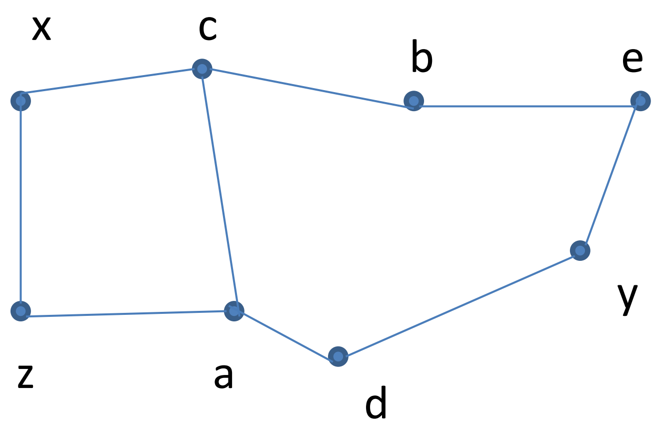
B={x,z},{x,c},{c,b},{b,e},{e,y},{y,d},{d,a},{a,z},{c,a}

Задание графа с помощью отношения смежности.

- Отношение смежности отношение между вершинами графа. Если вершины графа соединены ребром, они связаны отношением смежности.
- R - отношение смежности.
- $R \subseteq A \times B$

Зададим неориентированный граф через отношение смежности.

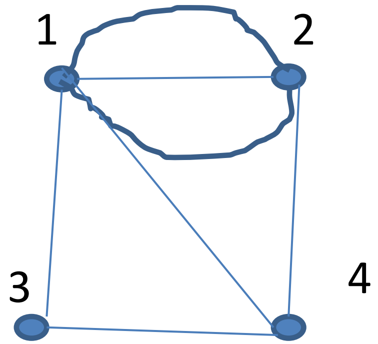
R	x	y	z	a	b	c	d	e
x	0	0	1	0	0	1	0	0
y	0	0	0	0	0	0	1	1
z	1	0	0	1	0	0	0	0
a	0	0	1	0	0	1	1	0
b	0	0	0	0	0	1	0	0
c	1	0	0	1	1	0	0	0
d	0	1	0	1	0	0	0	1
e	0	1	0	0	1	0	0	0



B={{x,z},{x,c},{c,b},{b,e},{e,y},{y,d},{d,a},{a,z},{c,a}} – множество ребер.

Если в главной диагонали будут одни единицы, вершины будут иметь ребра в виде петли.

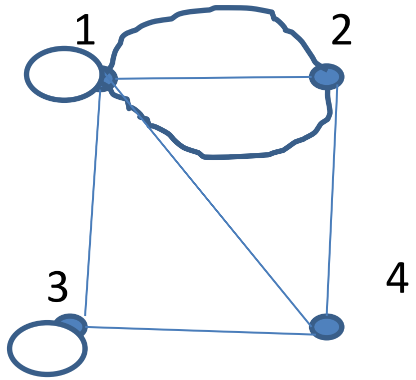
Неориентированный мульти-граф, отношении смежности.



R	1	2	3	4
1	0	3	1	1
2	3	0	0	1
3	1	0	0	1
4	1	1	1	0

Мультиграф допускает кратные ребра, но не допускает петель. Песевдограф допускает и кратные ребра, и петли.

Неориентированный псевдо-граф, отношении смежности.

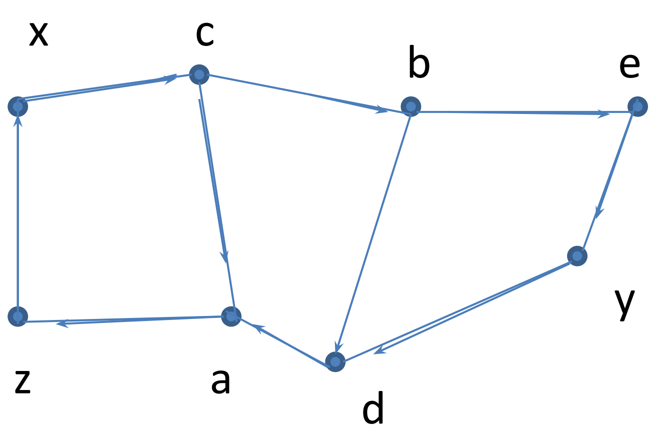


R	1	2	3	4
1	1	3	1	1
2	3	0	0	1
3	1	0	1	1
4	1	1	1	0

Мультиграф допускает кратные ребра, но не допускает петель. Песевдограф допускает и кратные ребра, и петли.

Ориентированный граф.

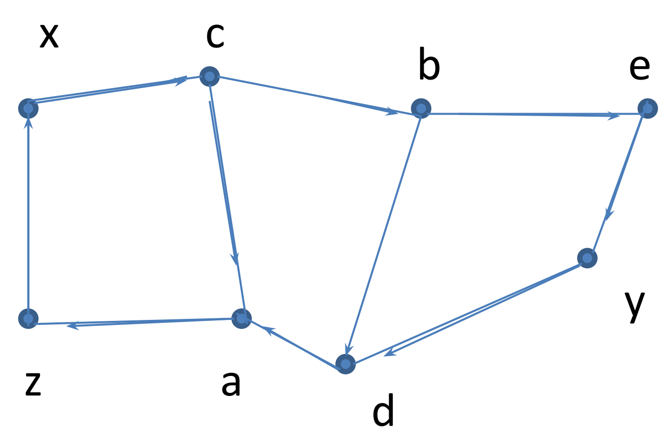
A={x,y,z,c,a,b,d,e} – множество вершин.



B={(z,x),(x,c),(c,b),(b,e),(e,y),(y,d),(d,a),(a,z),(c,a)(b,d)} – множество ребер.

Зададим ориентированный граф через отношение смежности.

R	x	y	z	a	b	c	d	e
x	0	0	0	0	0	1	0	0
y	0	0	0	0	0	0	1	0
z	1	0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	1	0	0	0	0	0
b	0	0	0	0	0	0	1	1
c	0	0	0	1	1	0	0	0
d	0	0	0	1	0	0	0	0
e	0	1	0	0	0	0	0	0

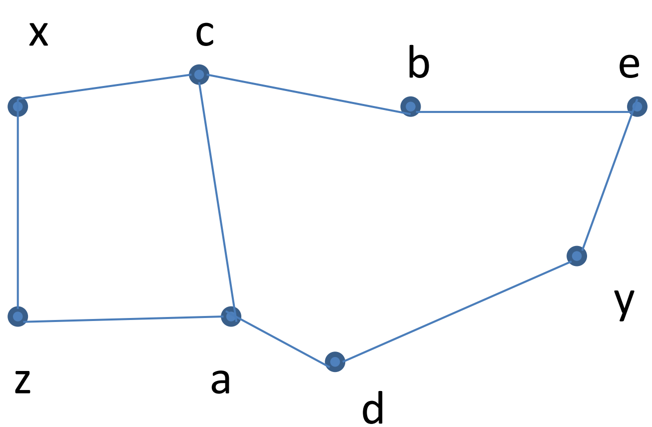


B={(x,z),(x,c),(c,b),(b,e),(e,y),(y,d),(d,a),(a,z),(c,a),(b,d)} – множество ребер.

Если в главной диагонали будут одни единицы, вершины будут иметь ребра в виде петли.

Неориентированный граф. Можем задать через отношение инцидентности.

A={x,y,z,c,a,b,d,e} – множество вершин.



B={{x,z},{x,c},{c,b},{b,e},{e,y},{y,d},{d,a},{a,z},{c,a} } – множество ребер.

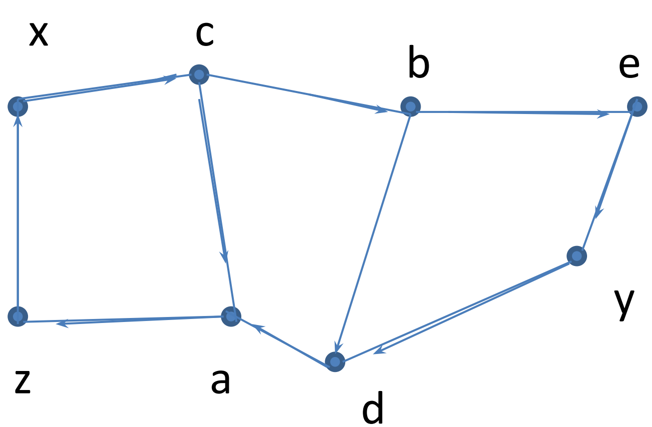
Зададим граф с помощью отношения инцидентности.

- R - отношение инцидентности.
- R⊆A×B(отношение инцидентности -отношение между вершинами и ребрами)

R	x	y	z	a	b	c	d	e
{xz}	1	0	1	0	0	0	0	0
{zc}	0	0	1	0	0	1	0	0
{cb}	0	0	0	0	1	1	0	0
{be}	0	0	0	0	1	0	0	1
{ey}	0	1	0	0	0	0	0	1
{yd}	0	1	0	0	0	0	1	0
{da}	0	0	0	1	0	0	1	0
{az}	0	0	1	1	0	0	0	0
{ca}	0	0	0	1	0	1	0	0

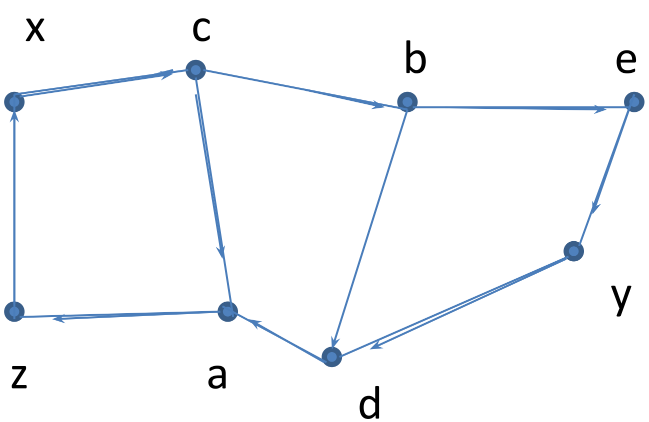
Ориентированный граф

A={x,y,z,c,a,b,d,e} – множество вершин.



B={(z,x),(x,c),(c,b),(b,e),(e,y),(y,d),(d,a),(a,z),(c,a)(b,d)} – множество ребер.

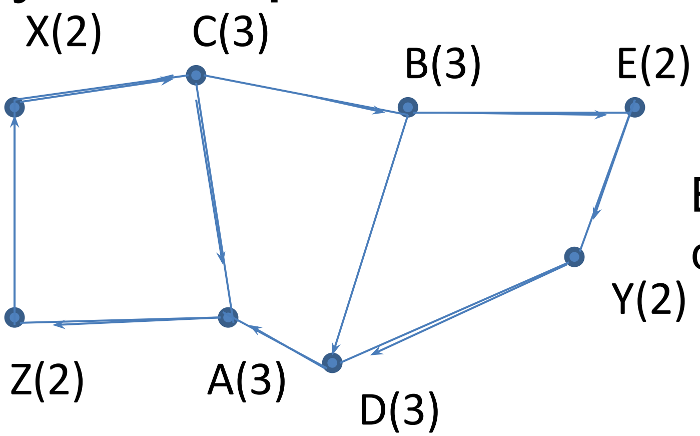
Зададим орграф через отношение инцидентности.



R	x	y	z	a	b	c	d	e
(xz)	1	0	-1	0	0	0	0	0
(zc)	0	0	1	0	0	-1	0	0
(cb)	0	0	0	0	1	-1	0	0
(be)	0	0	0	0	1	0	0	-1
(ey)	0	1	0	0	0	0	0	-1
(yd)	0	1	0	0	0	0	-1	0
(da)	0	0	0	1	0	0	-1	0
(az)	0	0	1	-1	0	0	0	0
(ca)	0	0	0	1	0	-1	0	0
(bd)	0	0	0	0	1	0	-1	0

Числа характеризующие граф.

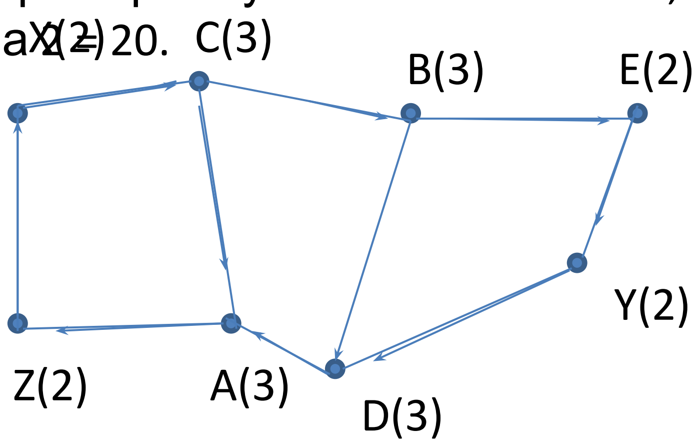
- Степенью вершины называется количество ребер, выходящих из этой вершины. Если это количество четно, то вершина называется четной, в противном случае вершина называется нечетной.



В скобках возле вершины расставлены ее степени.

Теорема о степенях вершин в теории графов.

- Сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному количеству всех ребер.
- Доказательство. **Степень вершины** — это количество концов ребер, сходящихся в этой вершине. Поэтому сумма степеней всех вершин графа равна количеству всех концов ребер, которые есть в графе. Но у каждого ребра ровно два конца, значит общее количество ребер в два раза меньше количества концов всех ребер, откуда и получаем утверждение теоремы.
- Проверим на примере. Сумма степеней = 20, количество ребер умноженное на 2 = 20.

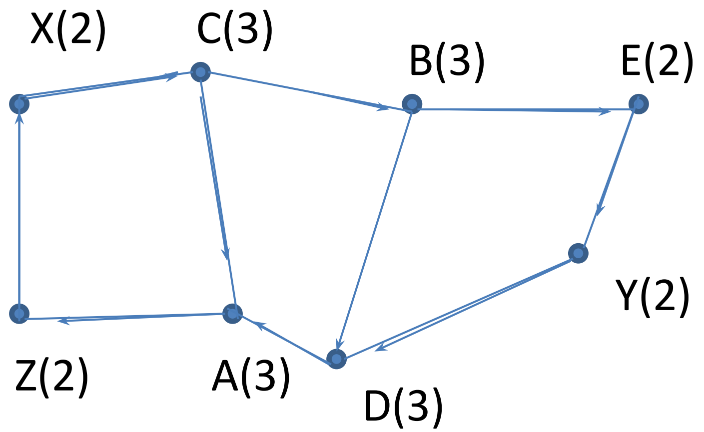


Цикломатическое число.

- **Цикломатическим числом графа -** называется число u=N-n+p, где N- число ребер графа, n – число его вершин, P – число компонент связности. Для связного графа u=N-n+1.
- **Компонента связности графа** — некоторое множество вершин графа такое, что для любых двух вершин из этого множества существует путь из одной в другую, и не существует пути из вершины этого множества в вершину не из этого множества.
- **Путь в графе** — последовательность вершин, в которой каждая вершина соединена со следующей ребром.

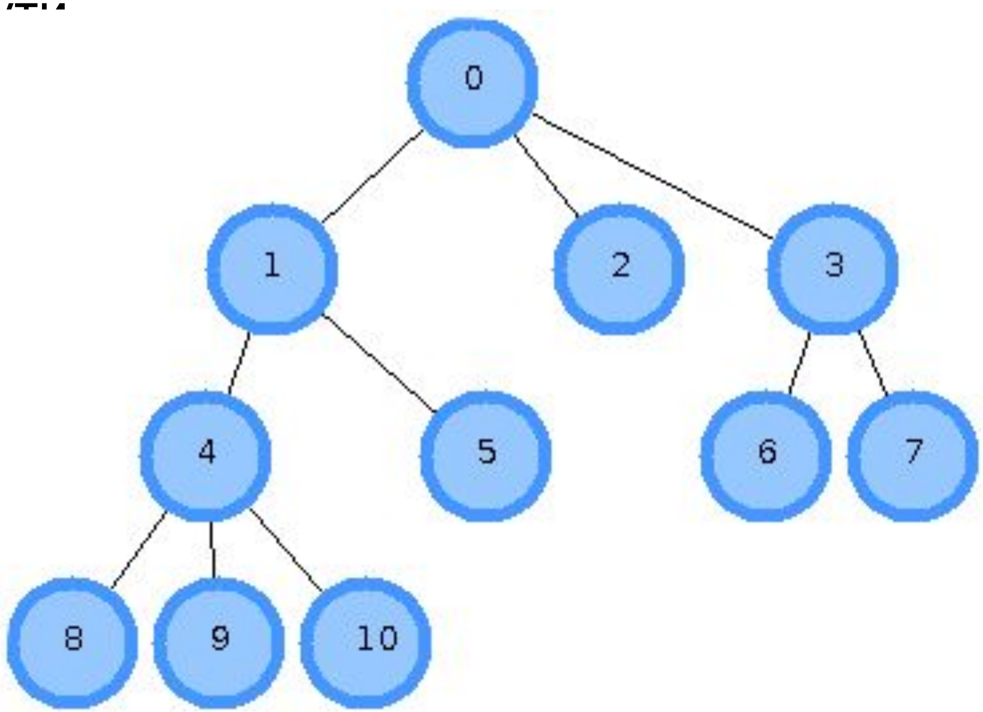
Найдем путь орг. графа

- (x,c,b,e,y,d,a,z,x)
- (x,c,a,z,x)
- (x,c,b,d,a,z,x)



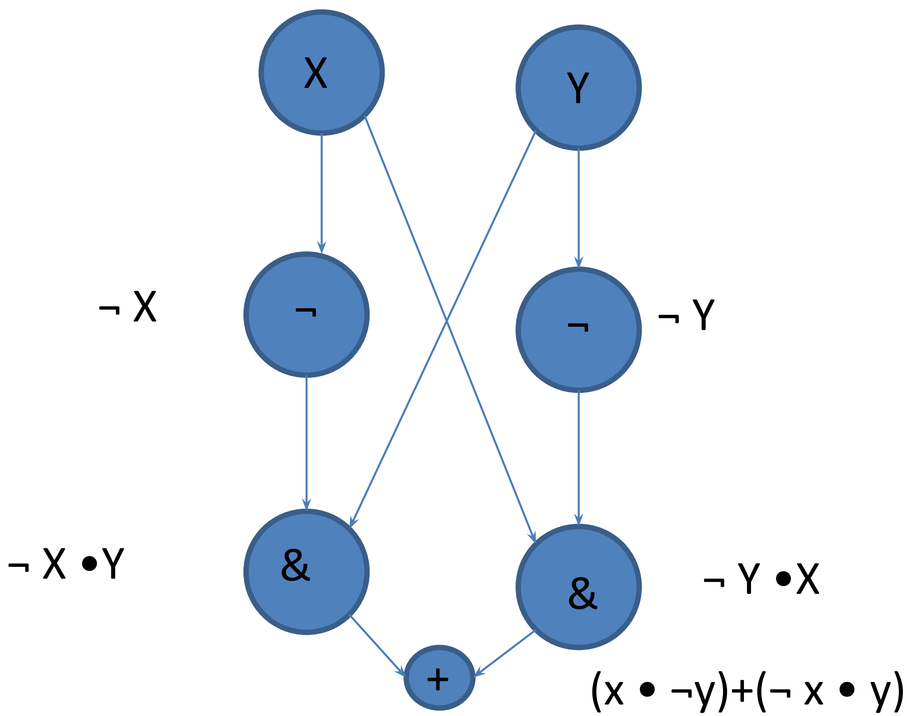
Цикломатическое число позволяет перейти к графу который называется деревом.

- Цикломатическое число связного графа можно определить как число ребер, которое нужно удалить, чтобы граф стал деревом.
- **Дерево** — это связный ациклический граф. Связность означает наличие путей между любой парой вершин, ацикличность — отсутствие циклов и то, что между парами вершин имеется только по одному пу



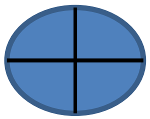
Граф дерево используется для моделирования операций над переменными логических функций

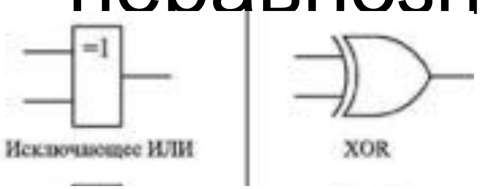
- $F(x,y)=x \oplus y = \neg((\neg X+Y) \bullet (X+\neg Y))$ =
- $= \neg(\neg x + y)+ \neg(x+ \neg y)=(\neg \neg x \bullet \neg y)+(\neg x \bullet \neg \neg y)=$
- $=(x \bullet \neg y)+(\neg x \bullet y)$ – выход графа – дерево.



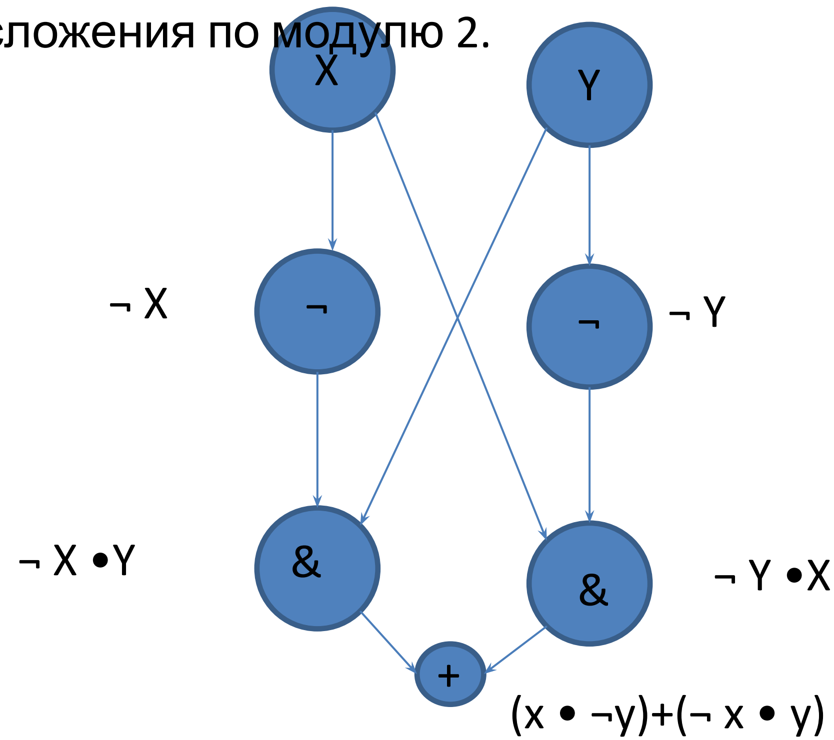
Данный граф представляется как схема размером - 5. Т.к. учитываются те вершины, которые не являются переменными. (У которых отсутствуют полу-степени захода).

Данная схема, граф – дерево представляется как вершина графа в которой выполняется операция сложения по модулю 2 (неравнозначность).

-  - вершина графа неравнозначности.



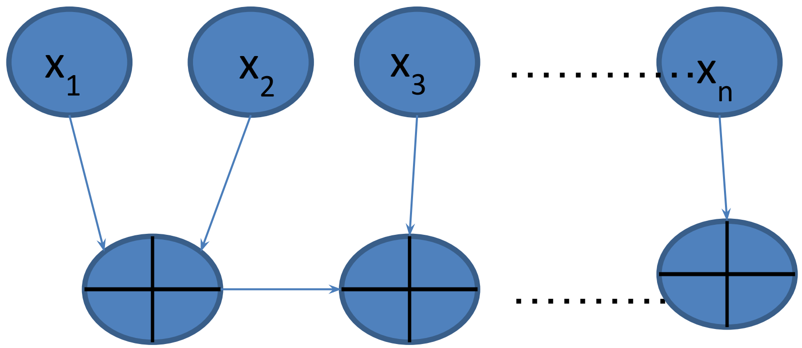
- Логические элементы выполняющие операцию сложения по модулю 2.



Рассмотрим функцию сложения по модулю 2.

- $f: A^n \rightarrow B$
- A – область определения функции
- B - область значений функции
- Если A=B, то f – функция, есть операция где A = {0,1} B = {0,1}
- $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus \dots \oplus x_n$

Представим функцию $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus \dots \oplus x_n$ в виде графа.



Размер схемы = 5(n-1)

Мажоритарная функция.

- Major – главный, функция принимает значение одни на тех и только тех наборах, в которых единиц больше чем нулей(функция г[illegible])

xyz	f(x,y,z)
000	0
001	0
010	0
011	1
100	0
101	1
110	1
111	1