МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Учитель математики
МБОУ СОШ №9 г. Уфы
В.М.Хабибуллина

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

- *сведения уравнения к квадратному*
- *разложения на множители*
- *решение однородных уравнений*

МЕТОД СВЕДЕНИЯ УРАВНЕНИЯ К КВАДРАТНОМУ

$$3\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0$$

$$2\sin^2 x + 3\cos x = 0$$

МЕТОД СВЕДЕНИЯ УРАВНЕНИЯ К КВАДРАТНОМУ

$$3\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0$$

$$\sin x = t$$

$$3t^2 - 5t - 2 = 0$$

$$D = 25 + 24 = 49$$

$$t = -\frac{1}{3}$$

$$t = 2$$

$$\sin x = -\frac{1}{3}$$

$$x = (-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3} + \pi n, n \in Z$$

$\sin x = 2 \rightarrow$ **НЕ ИМЕЕТ РЕШЕНИЯ**

ответ: $x = (-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3} + \pi n, n \in Z$

МЕТОД СВЕДЕНИЯ УРАВНЕНИЯ К КВАДРАТНОМУ

$$2\sin^2 x + 3\cos x = 0$$

$$2(1-\cos^2 x) + 3\cos x = 0$$

$$2 - 2\cos^2 x + 3\cos x = 0$$

$$-2\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0$$

$$\cos x = t$$

$$2t^2 - 3t - 2 = 0$$

$$D = 9 + 16 = 25$$

$$t = -\frac{1}{2}$$

$$t = 2$$

МЕТОД СВЕДЕНИЯ УРАВНЕНИЯ К КВАДРАТНОМУ

$\cos x = 2 \rightarrow$ **НЕ ИМЕЕТ РЕШЕНИЯ**

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

$$x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n, n \in Z$$

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$$

ответ: $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

МЕТОД РАЗЛОЖЕНИЯ НА МНОЖИТЕЛИ

$$2cos^2 x + \sqrt{3}\cos x = 0$$

$$\cos x\left(2\cos x + \sqrt{3}\right) = 0$$

$$\cos x = 0$$

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$2cosx + \sqrt{3} = 0$$

$$2cosx + \sqrt{3} = 0$$

$$x_2 = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2\pi k$$

$$x_2 = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$$

МЕТОД РАЗЛОЖЕНИЯ НА МНОЖИТЕЛИ

ответ: $$x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$x_2 = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

Уравнение вида

$$a\sin x + b\cos x = 0$$

называют *однородным* тригонометрическим уравнением *первой* степени.

Алгоритм решения однородного тригонометрического уравнения первой степени:

Деление обеих частей уравнения на ***cosx****,*

cosx ≠ 0.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

Уравнение вида

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

называют *однородным* тригонометрическим уравнением *второй* степени.

Алгоритм решения однородного тригонометрического уравнения второй степени:

1. Посмотреть, есть ли в уравнении член $\boldsymbol{a\sin^2 x}$.
2. Если член $\boldsymbol{a\sin^2 x}$ в уравнении содержится (т.е. $\boldsymbol{a \neq 0}$), то уравнение решается делением обеих частей уравнения на $\boldsymbol{\cos^2 x}$ и последующим введение новой переменной.
3. Если член $\boldsymbol{a\sin^2 x}$ в уравнении не содержится (т.е. $\boldsymbol{a = 0}$), то уравнение решается методом разложения на множители: за скобки выносят $\boldsymbol{\cos x}$.

ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

$5\sin x + 6\cos x = 0$

$3\sin^2 x + \sin x\cos x = 2\cos^2 x$

ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

$$5\sin x + 6\cos x = 0$$

$$5\frac{\sin x}{\cos x} + 6\frac{\cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}$$

$$5tgx + 6 = 0$$

$$tgx = -\frac{6}{5} \qquad x = -arctg\,\tfrac{6}{5} + \pi n, n \in Z$$

ответ: $x = -arctg\frac{6}{5} + \pi n, n \in Z$

ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

$$3\sin^2 x + \sin x \cos x = 2\cos^2 x$$

$$3\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos x} - 2\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$$3tg^2 x + tgx - 2 = 0$$

$$tgx = t$$

$$3t^2 + t - 2 = 0$$

$$D = 1 + 24 = 25$$

$$t = -1$$

$$t = \frac{2}{3}$$

$$tgx = -1$$

$$x_1 = -arctg1 + \pi n$$

$$x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$$

$$tgx = \frac{2}{3}$$

$$x_2 = arctg\frac{2}{3} + \pi k, k \in Z$$

ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ответ:

$$x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$$

$$x_2 = arctg\frac{2}{3} + \pi k, k \in Z$$

УРАВНЕНИЯ ВИДА: *A cos x + B sin x = C,* *A, B, C ≠ 0*

МЕТОДЫ:

1) Универсальная подстановка

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \qquad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};$$

$x \neq \pi + 2\pi n;$
Проверка обязательна!

2) Метод вспомогательного аргумента

a cosx +b sinx заменим на *C sin(x+ϕ),* где $C = \sqrt{a^2 + b^2};$

$$\sin\phi = \frac{a}{C}; \qquad \cos\phi = \frac{b}{C};$$

ϕ - вспомогательный аргумент.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1

На «3»

1) $3\sin x + 5\cos x = 0$

2) $5\sin^2 x - 3\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$

На «4»

1) $3\cos^2 x + 2\sin x\cos x = 0$

2) $5\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x = 1$

На «5»

1) $2\sin x - 5\cos x = 3$

2) $1 - 4\sin 2x + 6\cos^2 x = 0$

Вариант 2

На «3»

1) $\cos x + 3\sin x = 0$

2) $6\sin^2 x - 5\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$

На «4»

1) $2\sin^2 x - \sin x\cos x = 0$

2) $4\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 4\cos^2 x = 1$

На «5»

1) $2\sin x - 3\cos x = 2$

2) $2\sin^2 x - 2\sin 2x + 1 = 0$

ОТВЕТЫ

Вариант 1

1) $-arctg\frac{5}{3}+\pi k, k\in Z$

2) $\frac{\pi}{4}+\pi k, -arctg0,4+\pi n, k,n\in Z$

1) $\frac{\pi}{2}+\pi k, -arctg1,5+\pi n, k,n\in Z$

2) $-\frac{\pi}{4}+\pi k, arctg0,5+\pi n, k,n\in Z$

1) $2arctg(-1\pm\sqrt{5})+2\pi k, k\in Z$

2) $\frac{\pi}{4}+\pi k, arctg7+\pi n, k,n\in Z$

Вариант 2

1) $-arctg\frac{1}{3}+\pi k, k\in Z$

2) $arctg\frac{1}{3}+\pi k, arctg\frac{1}{2}+\pi n, k,n\in Z$

1) $\pi k, arctg\frac{1}{2}+\pi n, k,n\in Z$

2) $-\frac{\pi}{4}+\pi k, arctg\frac{5}{3}+\pi n, k,n\in Z$

1) $-2arctg5+2\pi k, \frac{\pi}{2}+2\pi n, k,n\in Z$

2) $\frac{\pi}{4}+\pi k, arctg\frac{1}{3}+\pi n, k,n\in Z$