

Параллельное проектирование



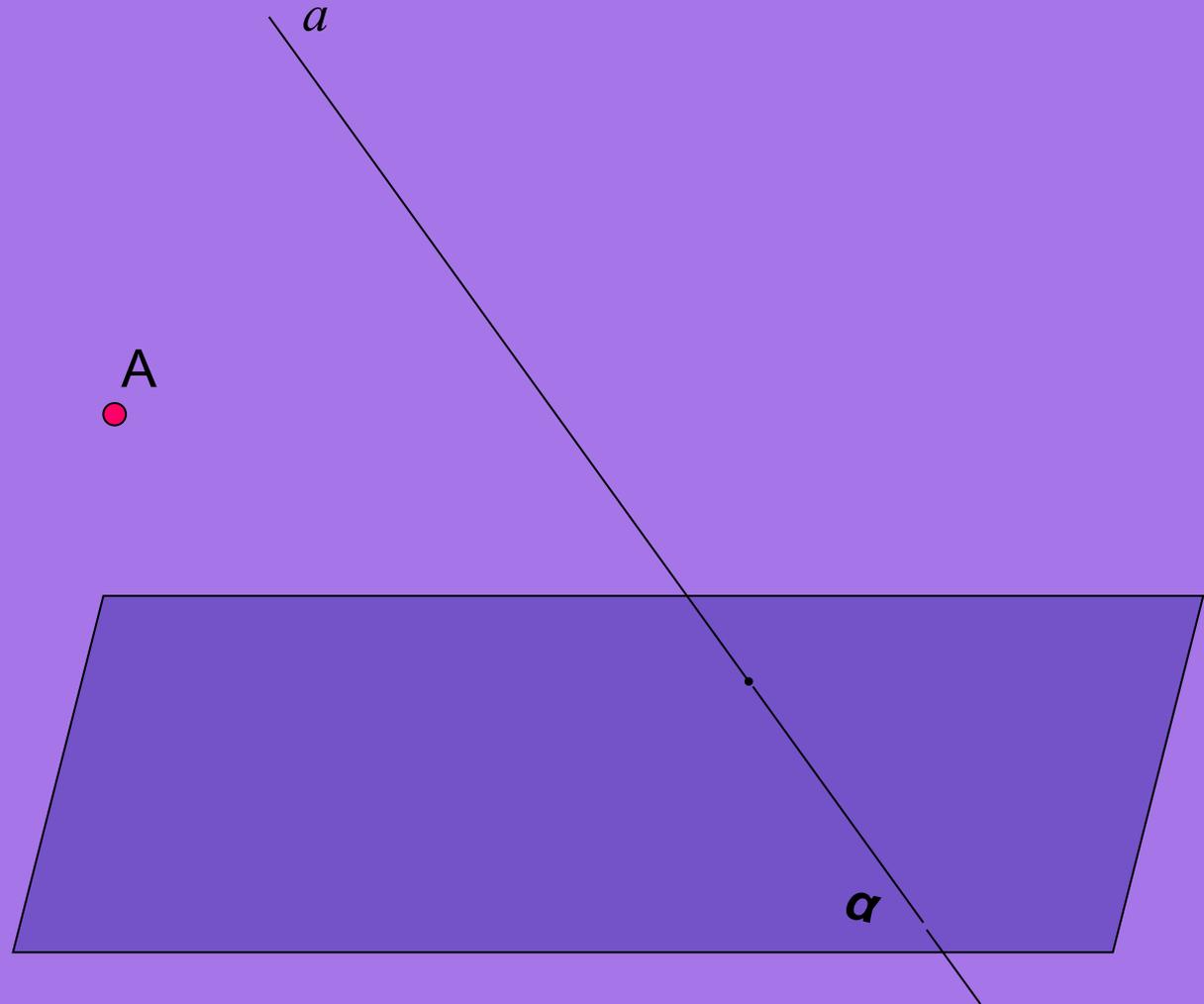
Стереометрия – это геометрия в пространстве. Нам необходимо уметь изображать геометрические фигуры, причем все чертежи мы по-прежнему выполняем на плоскости (на странице тетради, на доске и т. д.). Каким образом пространственную фигуру (например, куб) можно «уложить» в плоскость?

Для этого применяется *метод параллельного проектирования*. Выясним его суть на примере простейшей геометрической фигуры – точки.

Итак, у нас есть геометрическая фигура в пространстве – точка А.

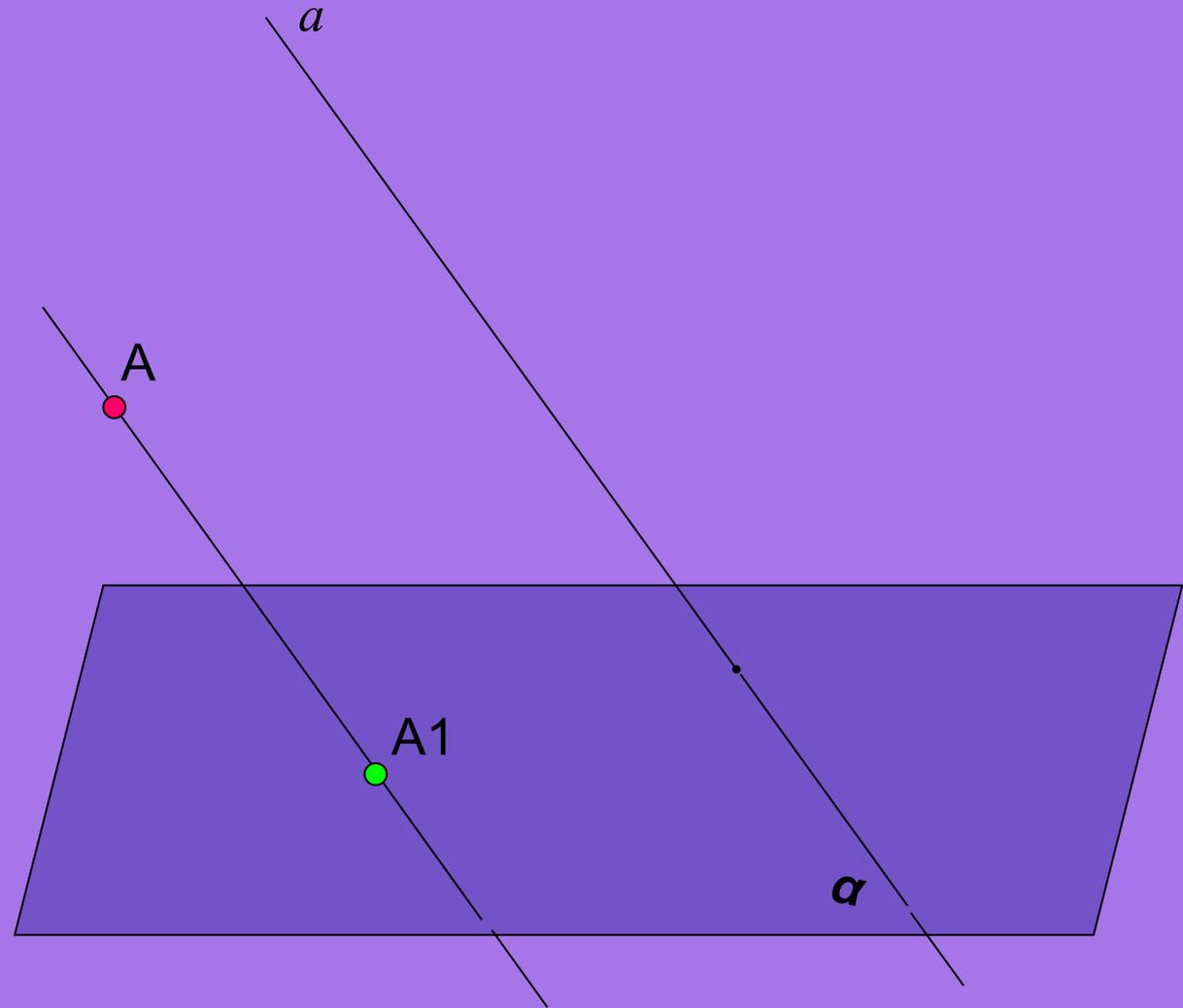


Выберем в пространстве произвольную плоскость α (*плоскость проекций*)
и любую прямую $a \cap \alpha$ (она задает *направление*
параллельного проектирования).

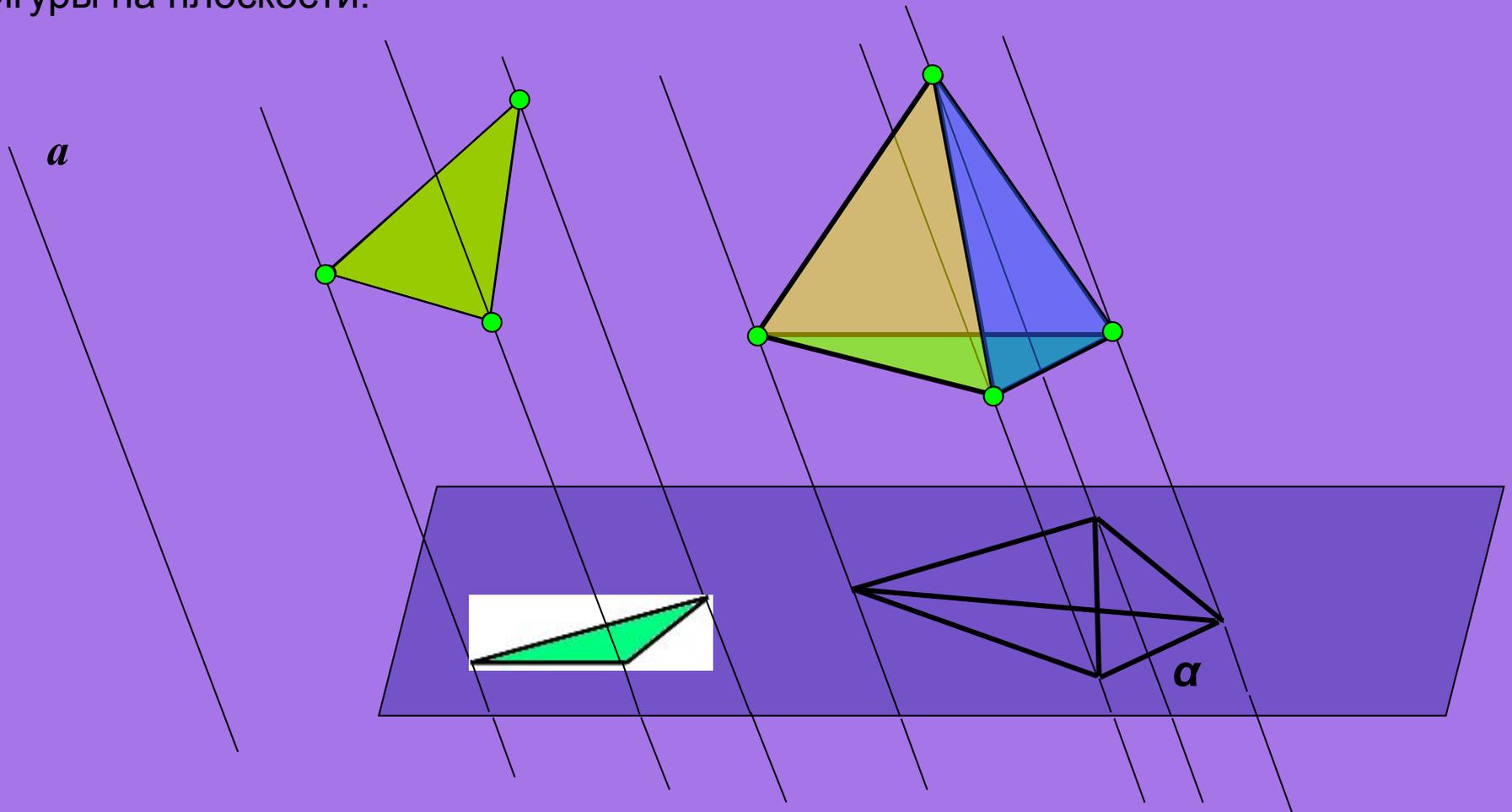


Проведем через точку A прямую, параллельную прямой a .

Точка $A1$ пересечения этой прямой с плоскостью и есть **проекция** точки A на плоскость α . Точку A ещё называют **прообразом**, а точку $A1$ – **образом**. Если $A \in \alpha$, то $A1$ совпадает с A .

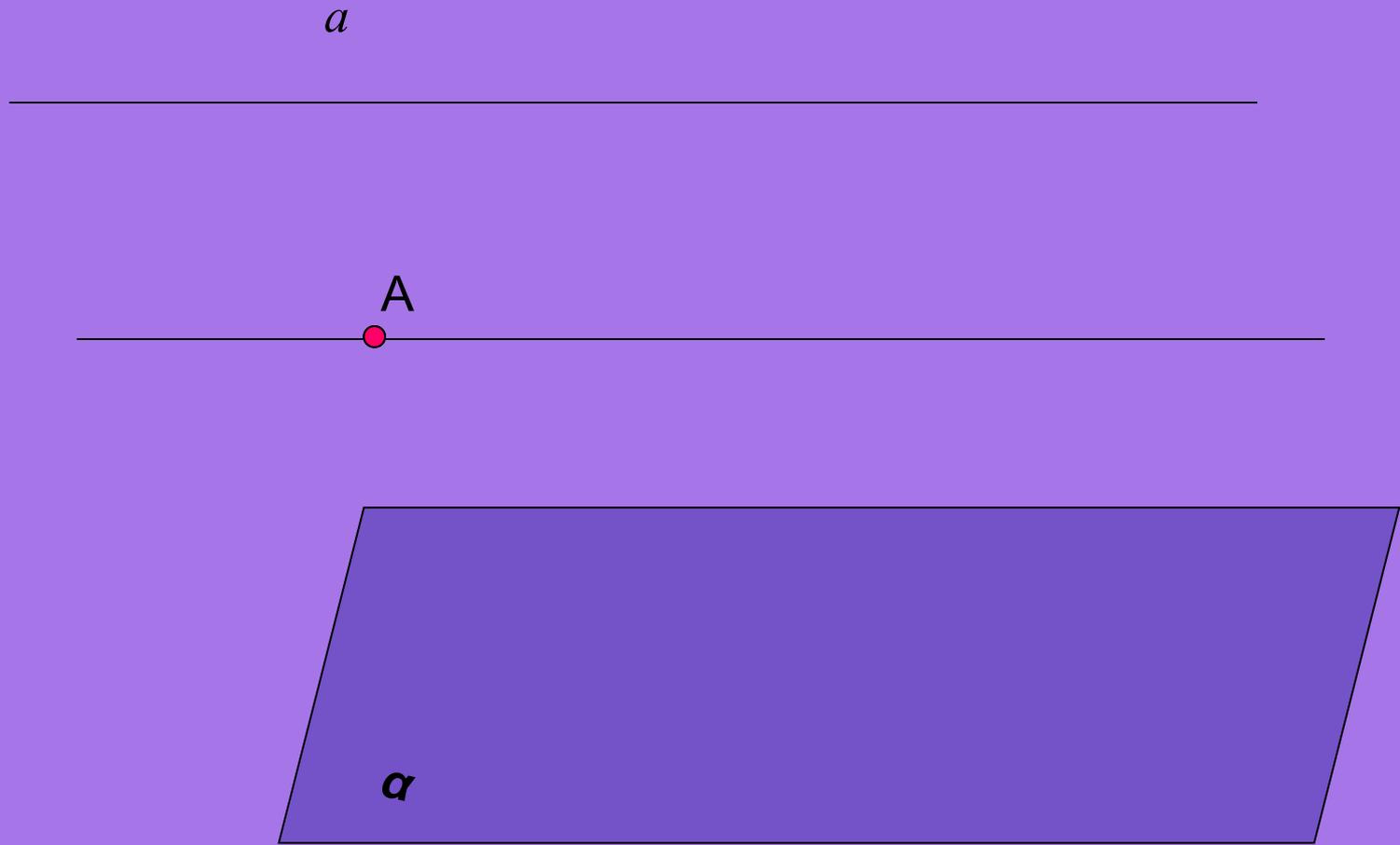


Рассматривая любую геометрическую фигуру как множество точек, можно построить в заданной плоскости проекцию данной фигуры. Таким образом можно получить изображение (или «проекцию») любой плоской или пространственной фигуры на плоскости.

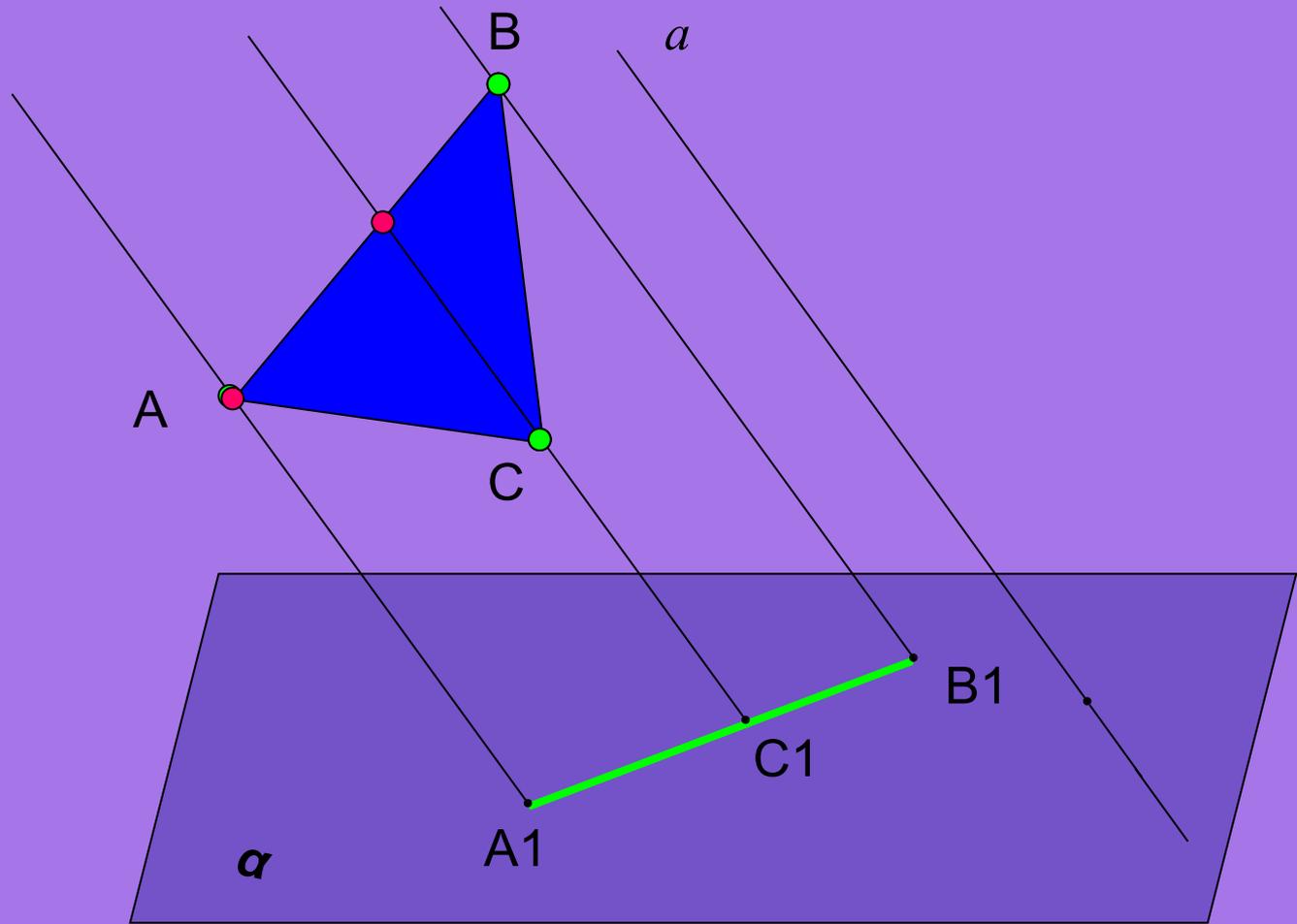


Наглядным примером параллельного проектирования является отбрасываемая любым объектом (прообраз) в пространстве тень (образ) от солнечных лучей (направление параллельного проектирования) на Земле (плоскость проекций).

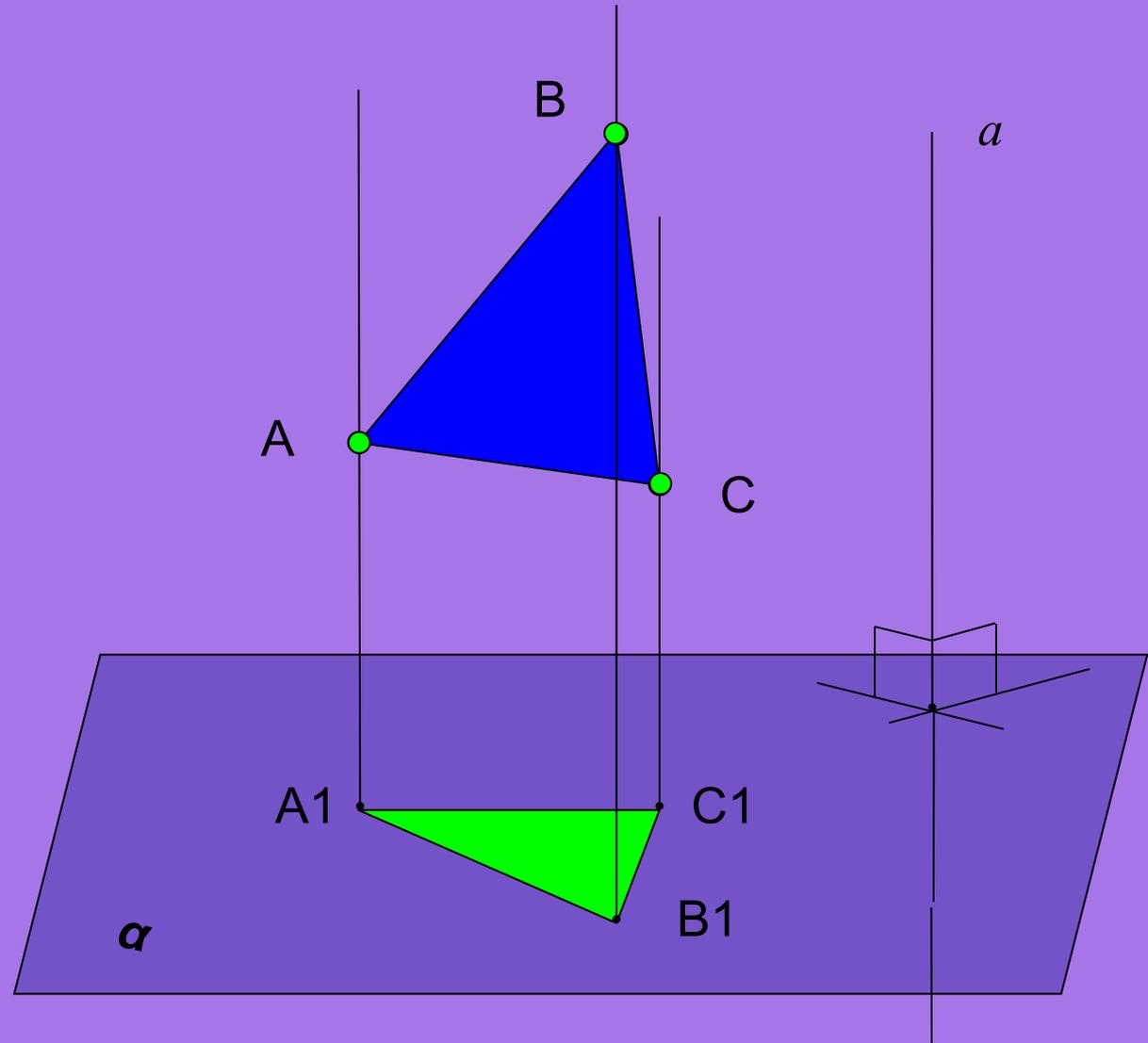
При параллельном проектировании не выбирают направление параллельного проектирования параллельно плоскости проекции



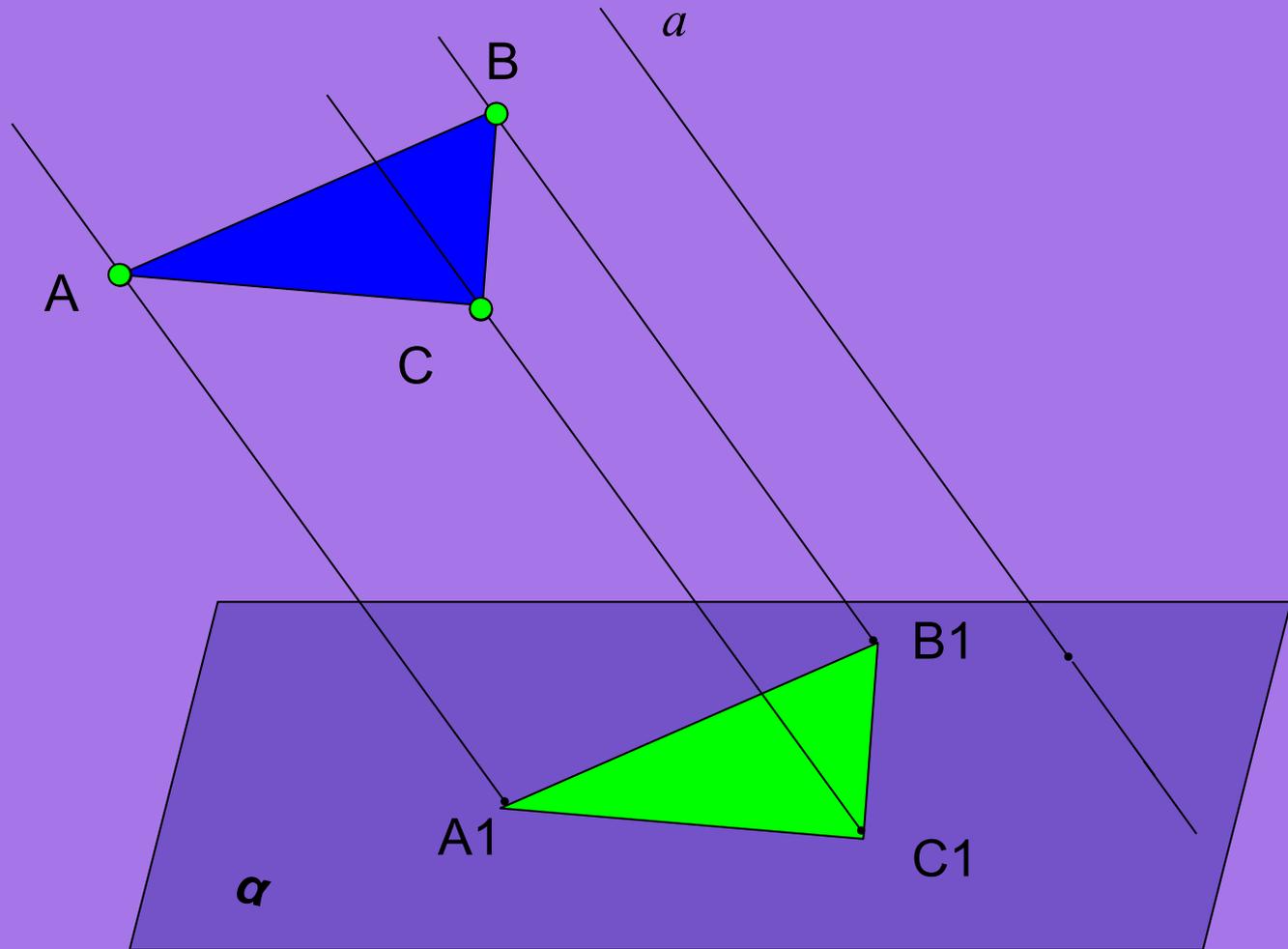
При параллельном проектировании плоских фигур не выбирают направление параллельного проектирования параллельно плоскости, которой принадлежит эта плоская фигура, т.к. получающаяся при этом проекция не отражает свойства данной плоской фигуры.



Если направление параллельного проектирования перпендикулярно плоскости проекций, то такое параллельное проектирование называется **ортогональным (прямоугольным) проектированием**.

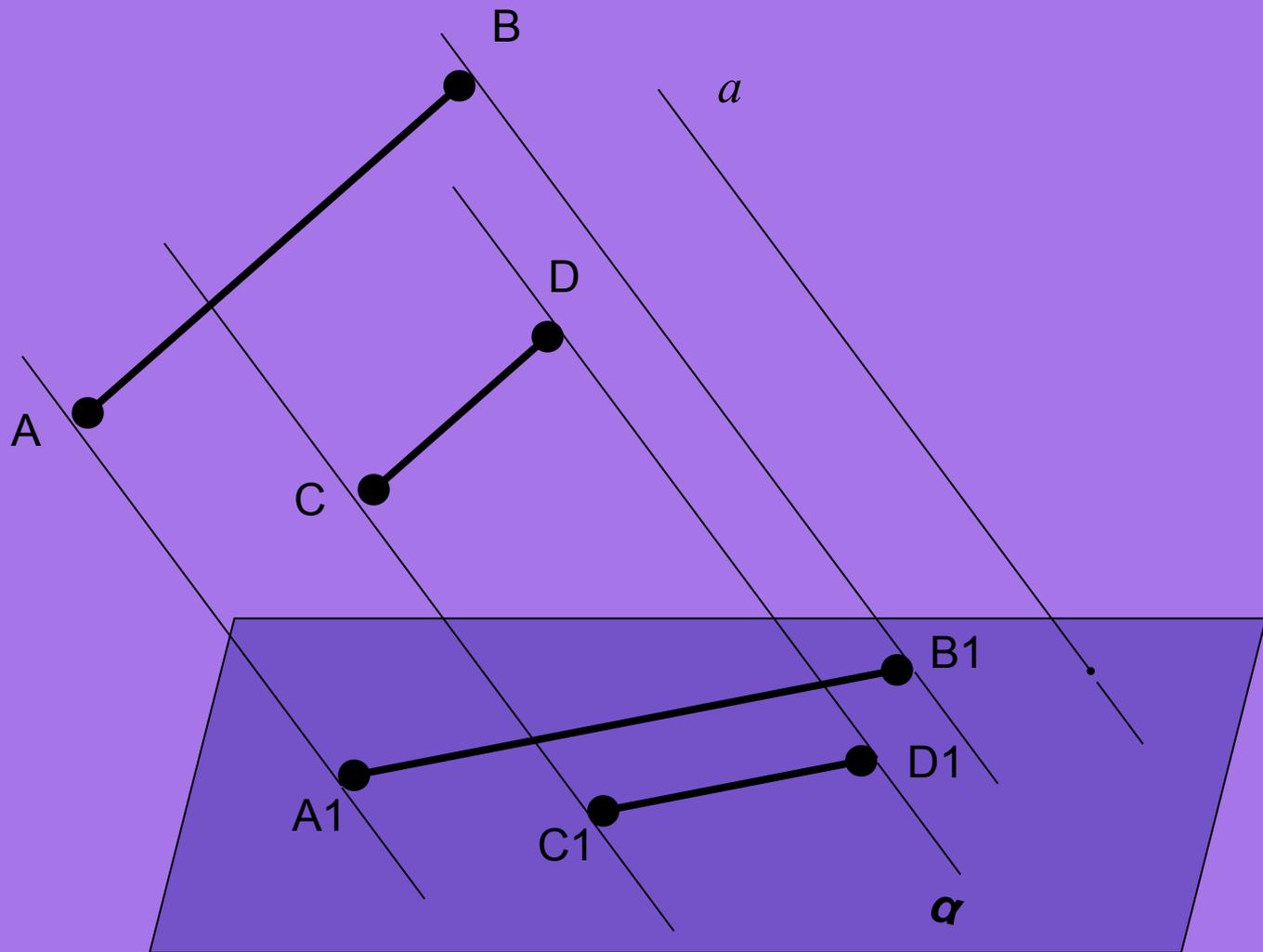


Если плоскость проекций и плоскость, в которой лежит данная фигура параллельны ($\alpha \parallel (ABC)$), то получающееся при этом изображение равно прообразу.



Параллельное проектирование обладает свойствами:

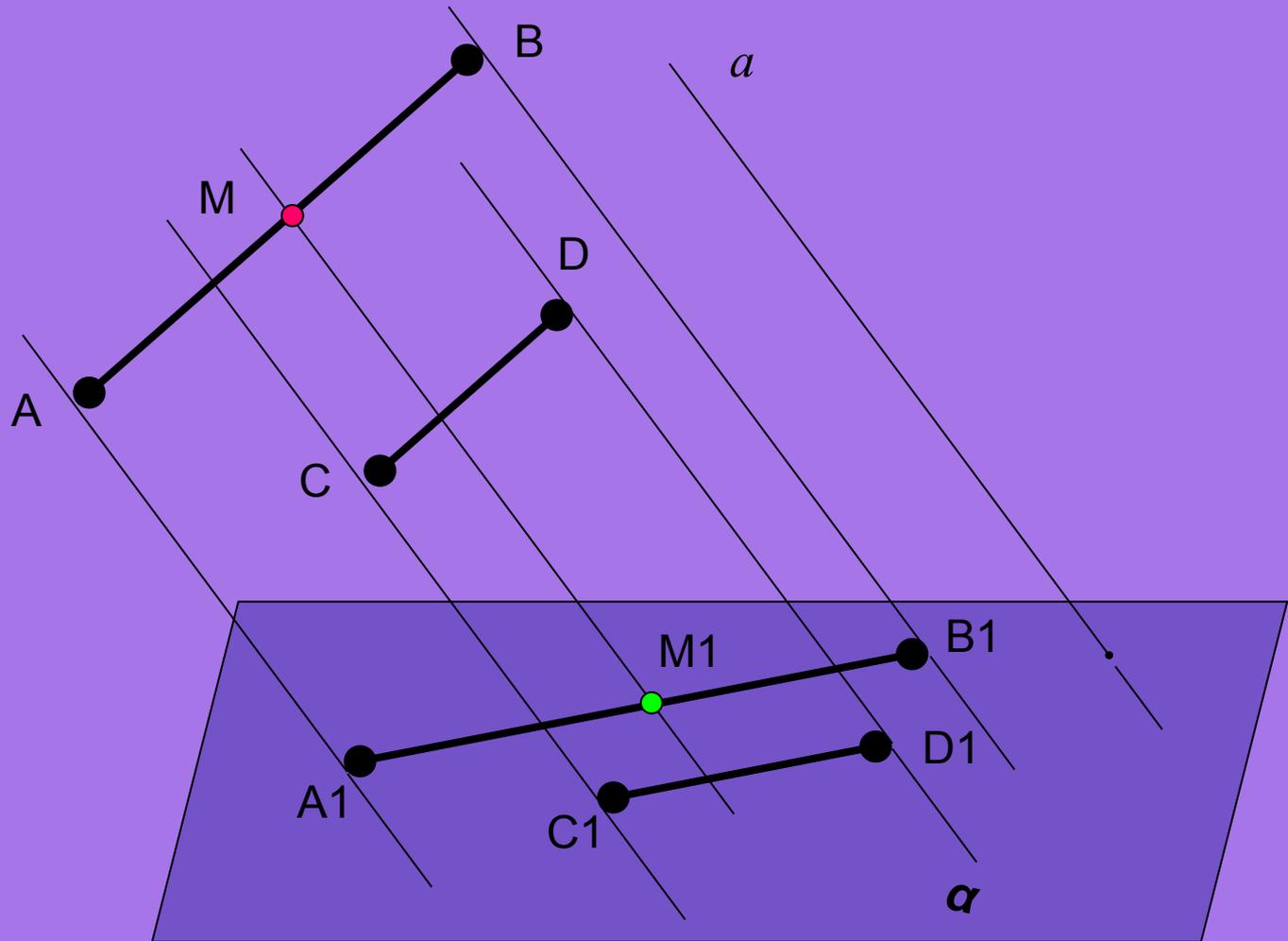
1) параллельность прямых (отрезков, лучей) **сохраняется**;



$$AB \parallel CD \Rightarrow A_1B_1 \parallel C_1D_1$$

Параллельное проектирование обладает свойствами:

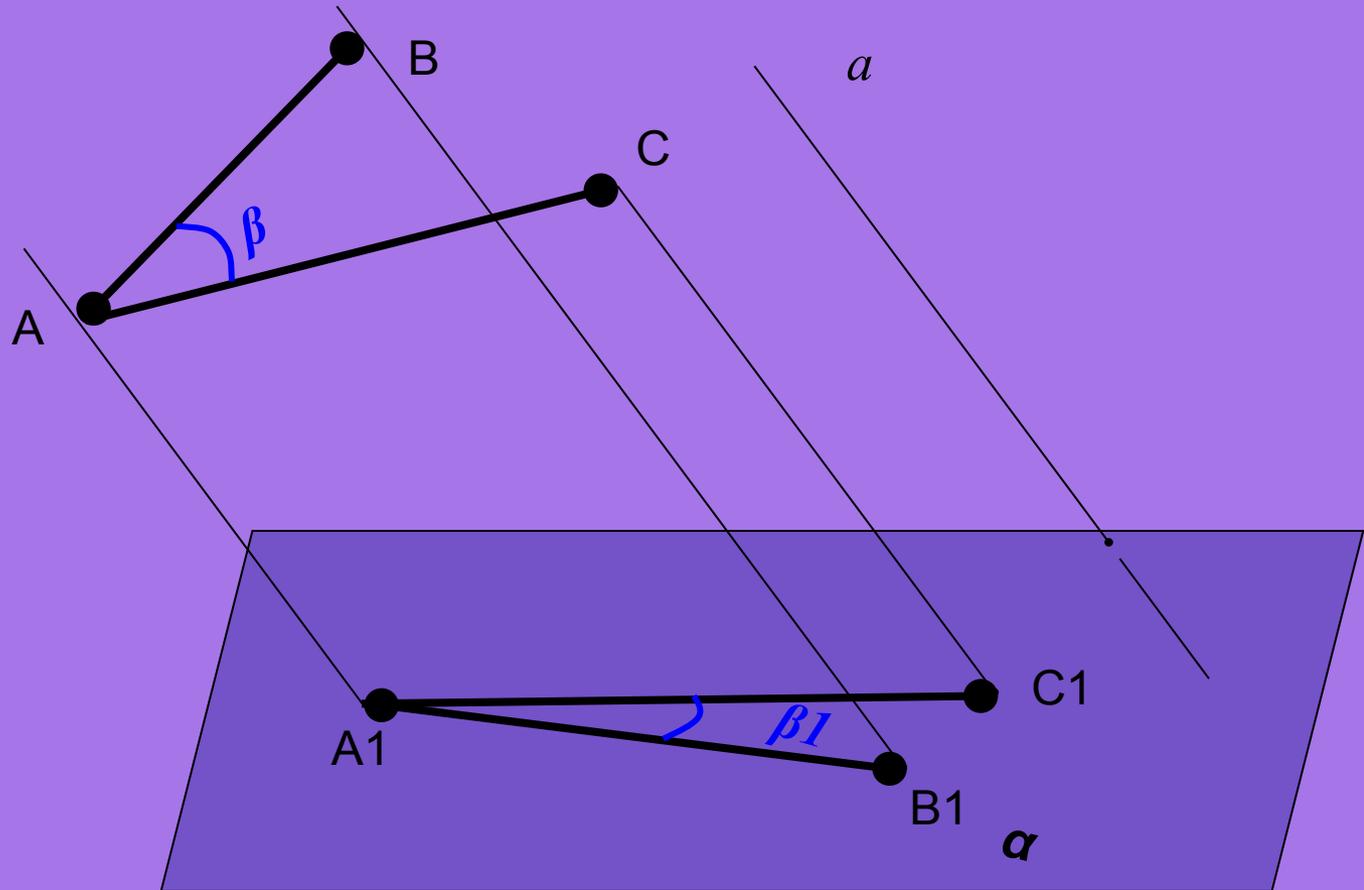
- 1) параллельность прямых (отрезков, лучей) **сохраняется**;
- 2) отношение длин отрезков, лежащих на параллельных или на одной прямой **сохраняется**;



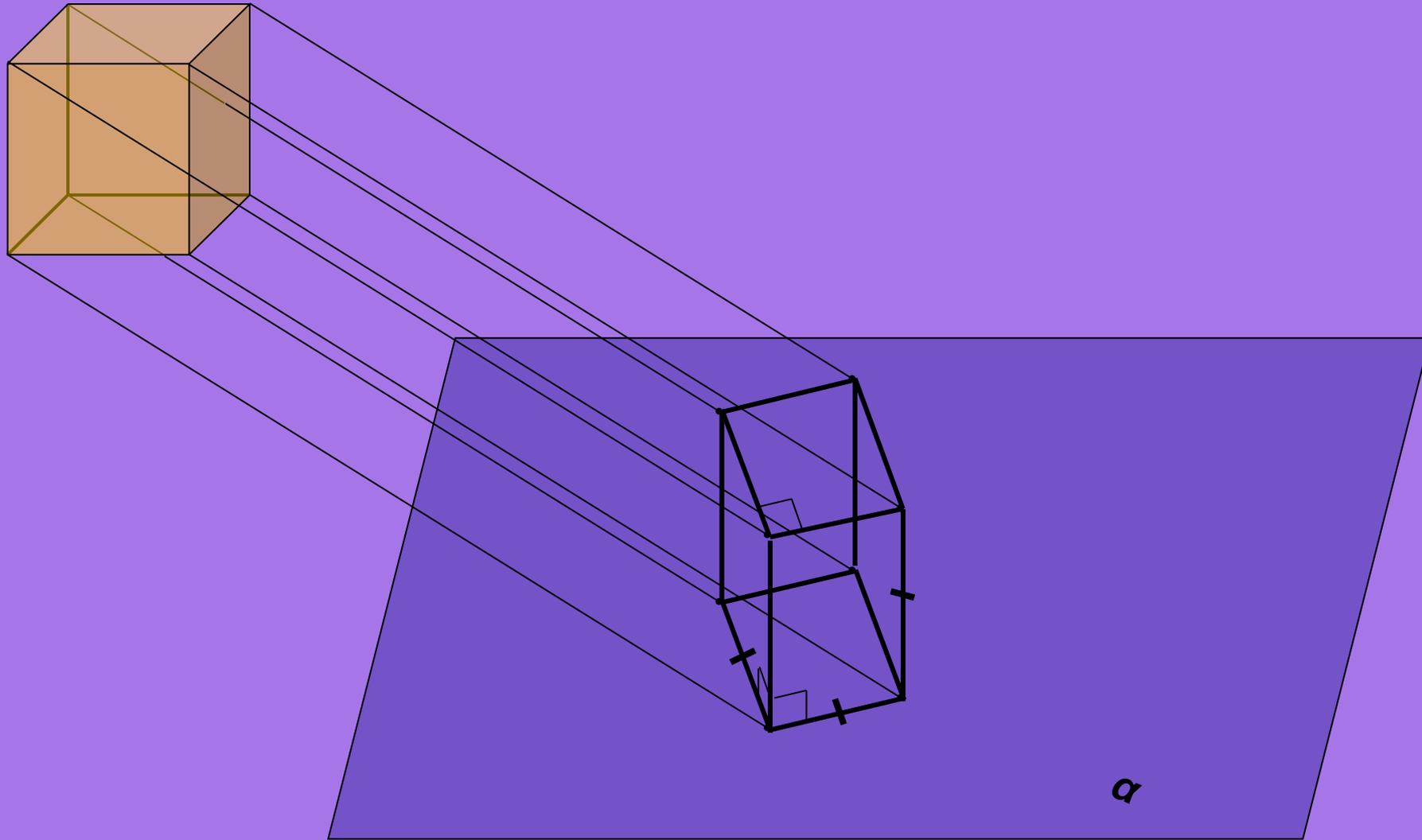
Если, например, $AB=2CD$, то $A_1B_1=2C_1D_1$ или $\frac{AM}{MB} = \frac{A'M'}{M'B'}$

Параллельное проектирование обладает свойствами:

- 1) параллельность прямых (отрезков, лучей) **сохраняется**;
- 2) отношение длин отрезков, лежащих на параллельных или на одной прямой **сохраняется**;
- 3) Линейные размеры плоских фигур (длины отрезков, величины углов) **не сохраняются** (исключение ортогональное проектирование).

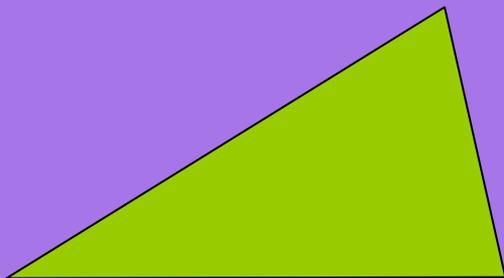


Итак, построим изображение куба:

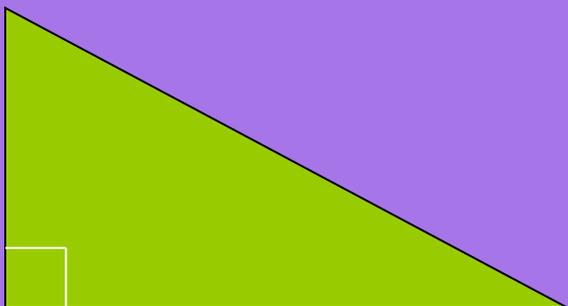


Далее разберем примеры изображения некоторых плоских фигур...

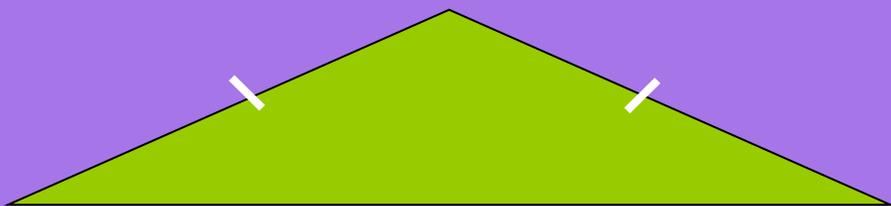
Фигура в пространстве



Произвольный треугольник

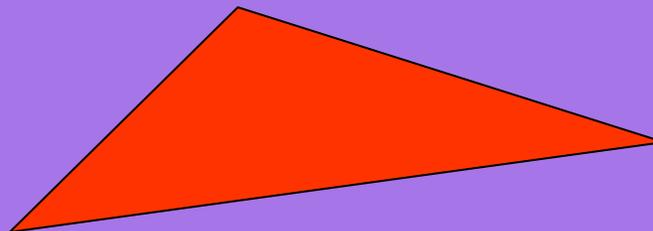


Прямоугольный треугольник

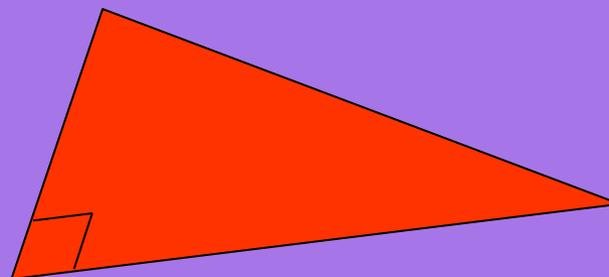


Равнобедренный треугольник

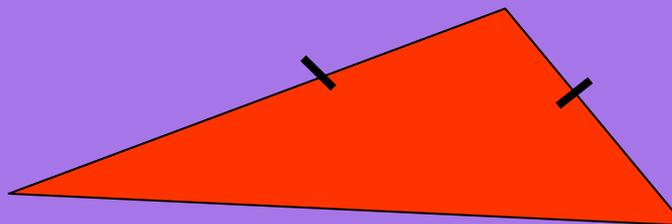
Её изображение на плоскости



Произвольный треугольник

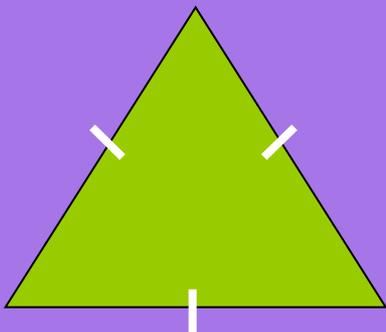


Произвольный треугольник



Произвольный треугольник

Фигура в пространстве



Равносторонний треугольник

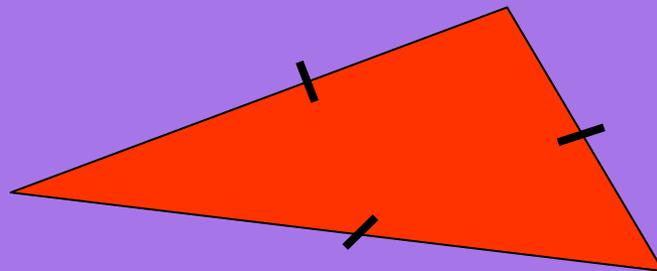


Параллелограмм



Прямоугольник

Её изображение на плоскости



Произвольный треугольник

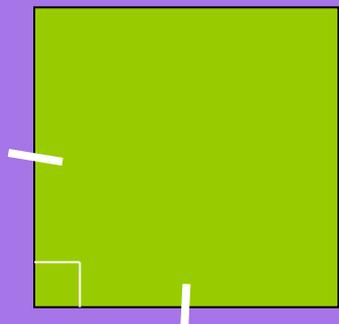


Произвольный параллелограмм

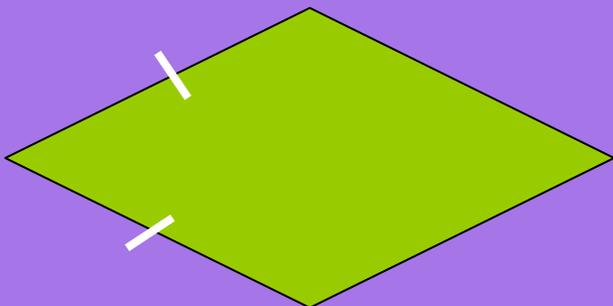


Произвольный параллелограмм

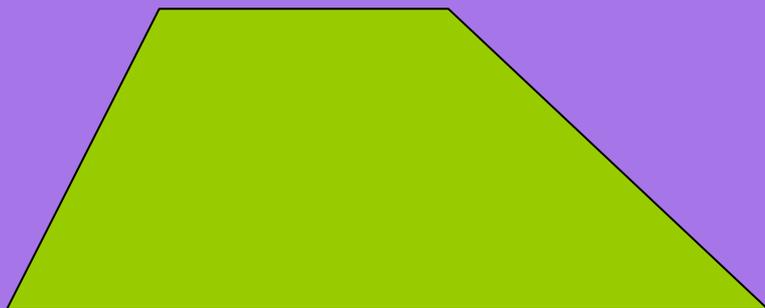
Фигура в пространстве



Квадрат

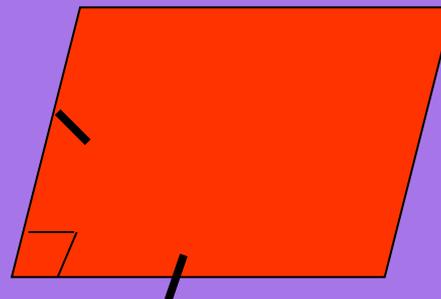


Ромб

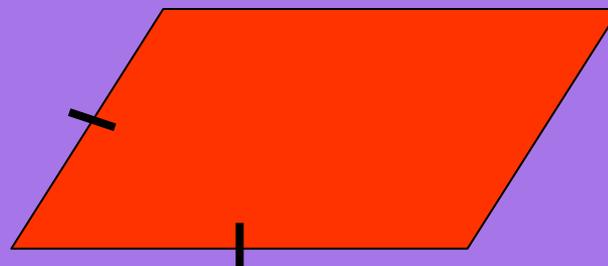


Трапеция

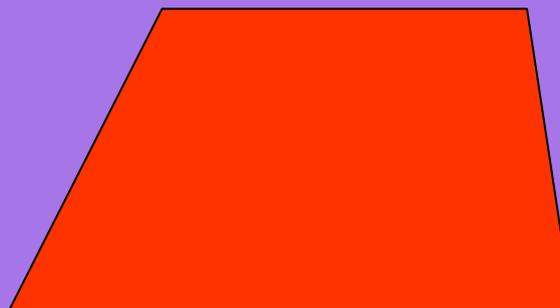
Её изображение на плоскости



Произвольный параллелограмм

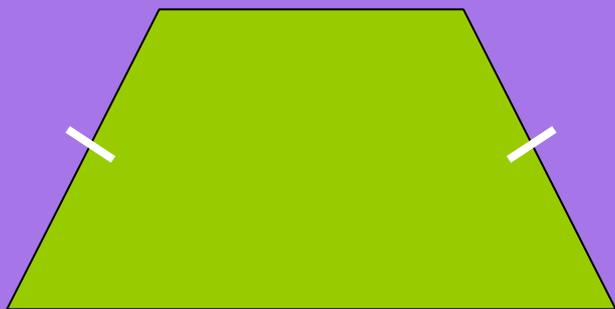


Произвольный параллелограмм

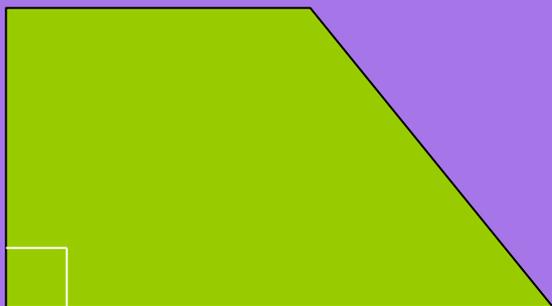


Произвольная трапеция

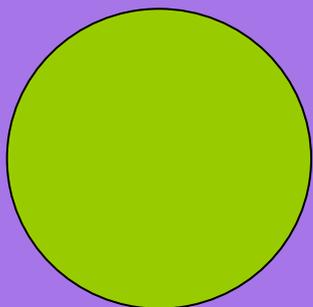
Фигура в пространстве



Равнобокая трапеция

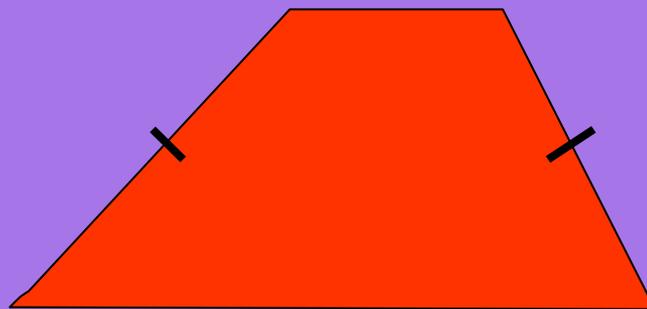


Прямоугольная трапеция

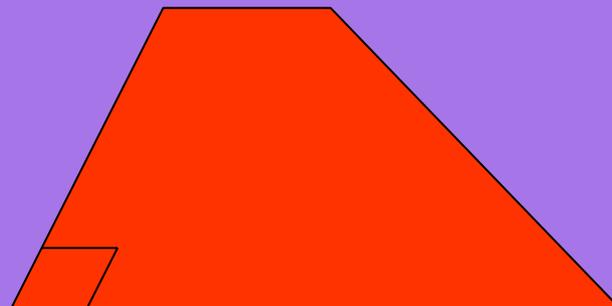


Круг (окружность)

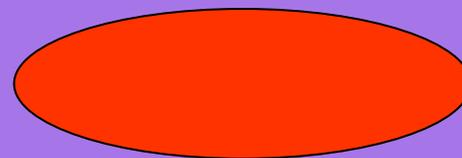
Её изображение на плоскости



Произвольная трапеция

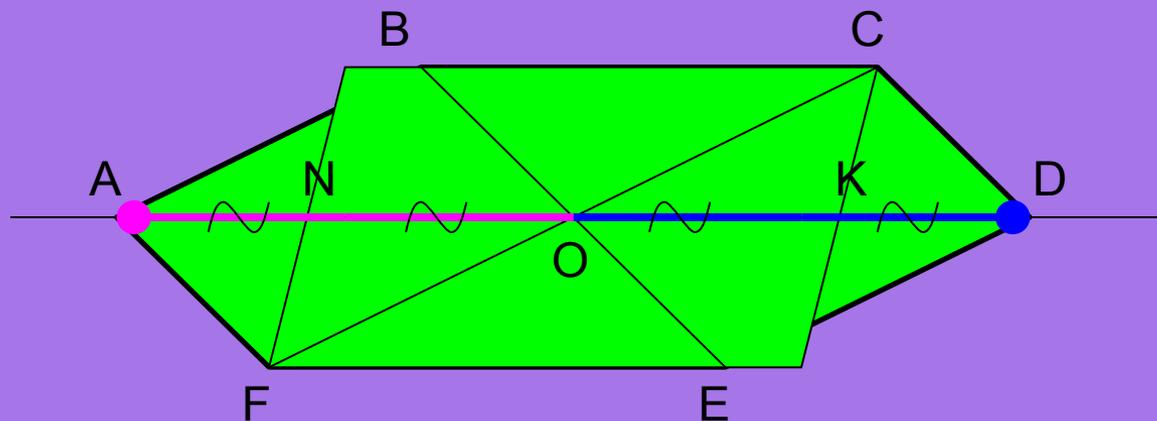
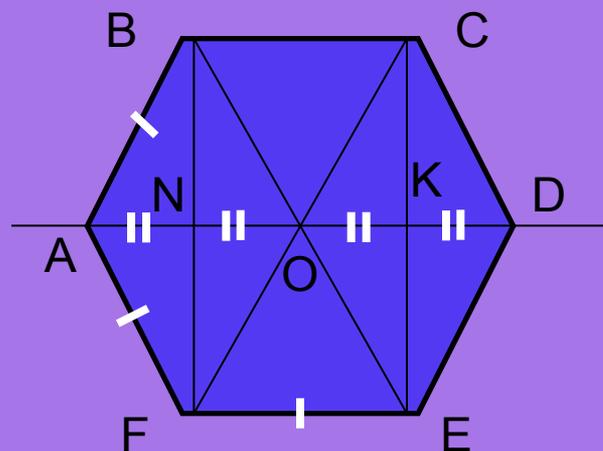


Произвольная трапеция



Овал (эллипс)

Как построить изображение правильного шестиугольника.

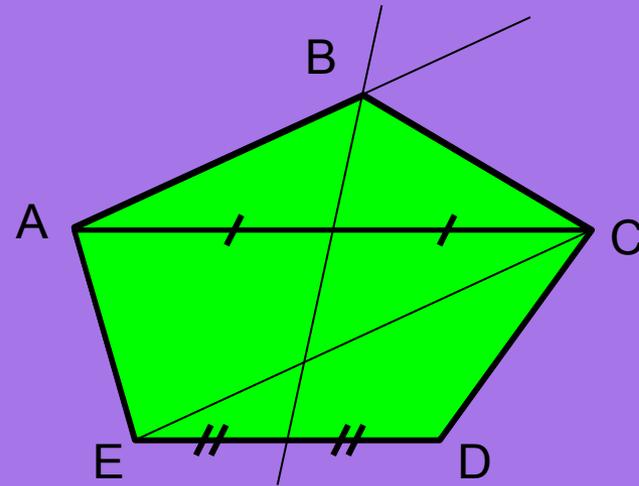
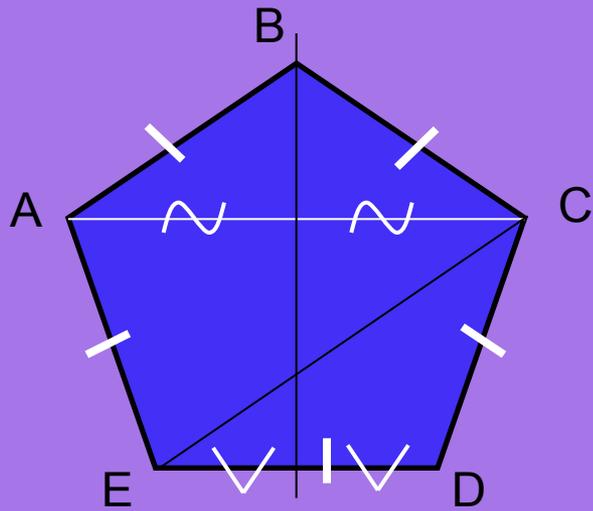


Разобьем правильный шестиугольник на три части: прямоугольник FBCE и два равнобедренных треугольника $\triangle FAB$ и $\triangle CDE$. Построим вначале изображение прямоугольника FBCE – произвольный параллелограмм FBCE. Осталось найти местоположение двух оставшихся вершин – точек A и D.

Вспомнив свойства правильного шестиугольника, заметим, что: 1) эти вершины лежат на прямой, проходящей через центр прямоугольника и параллельной сторонам BC и FE; 2) $OK = KD$ и $ON = NA$.

Значит, 1) находим на изображении точку O и проводим через неё прямую, параллельную BC и FE, получив при этом точки N и K;

2) откладываем от точек N и K от центра O на прямой такие же отрезки – в итоге получаем две оставшиеся вершины правильного шестиугольника A и D.



Как построить изображение *правильного пятиугольника*.

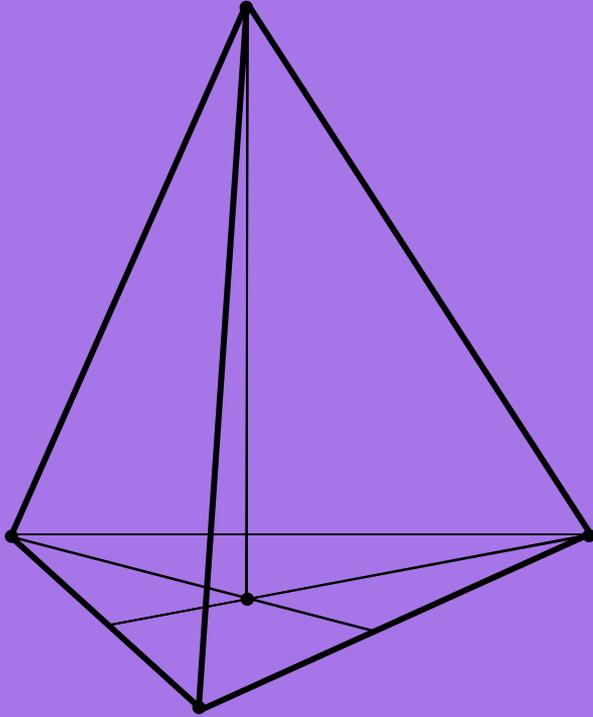
Разобьем фигуру на две части – равнобокую трапецию и равнобедренный треугольник, а затем пользуясь свойствами этих фигур и, конечно же, свойствами параллельного проектирования строим пятиугольник.

- Чертеж - хорошее средство для получения и запоминания информации поскольку $\sim 80\%$ информации человек получает с помощью зрения. В современном техническом чертеже передается информация, необходимая для производства, поэтому чертеж является одним из основных производственных документов.

Практическая часть.

Построение изображений: в тетради по математике выполнить построение 12 задач карандашом(можно от руки).

Алгоритм изображения пирамиды.



1. Изображение пирамиды начинают всегда с изображения ее основания:

Вершины основания пирамиды выбираем так, чтобы получить наиболее наглядное изображение;

Далее вершины соединяются тонкой вспомогательной линией;

2. Построение высоты пирамиды:

Исходя из свойств пирамиды и свойств многоугольника, лежащего в основании строится основание высоты;

Высота изображается вертикальным отрезком, параллельным краю листа бумаги.

3. Построение боковых ребер:

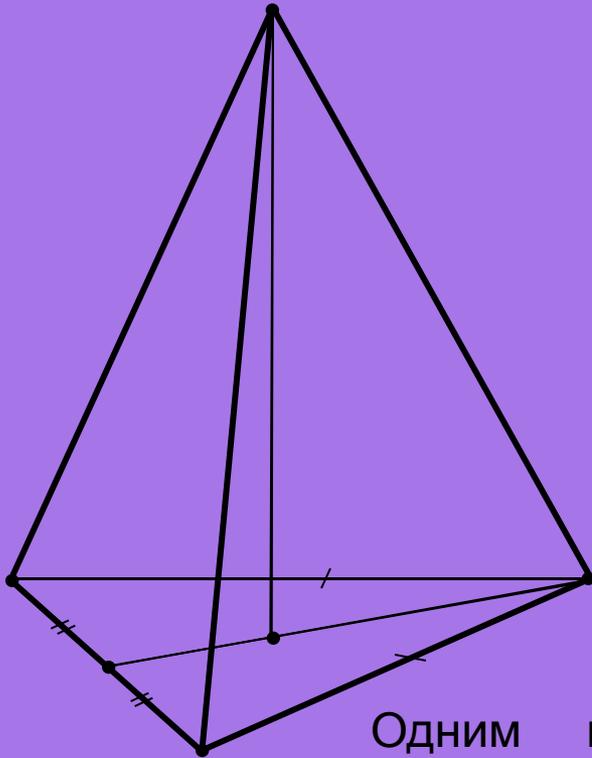
Вершина пирамиды соединяется отрезками с вершинами основания.

4. Невидимые отрезки отмечаем штриховой линией.

5. Выделяем контур.

Задача №1

Построить изображение пирамиды в основании которой лежит равнобедренный треугольник.



Здесь и в дальнейшем строить изображение пирамиды будем согласно приведенному алгоритму.

1. Строим основание пирамиды.

Равнобедренный треугольник изображается произвольным треугольником.

2. Строим высоту пирамиды.

По свойству пирамиды основание высоты – центр описанной около треугольника окружности, то есть точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам.

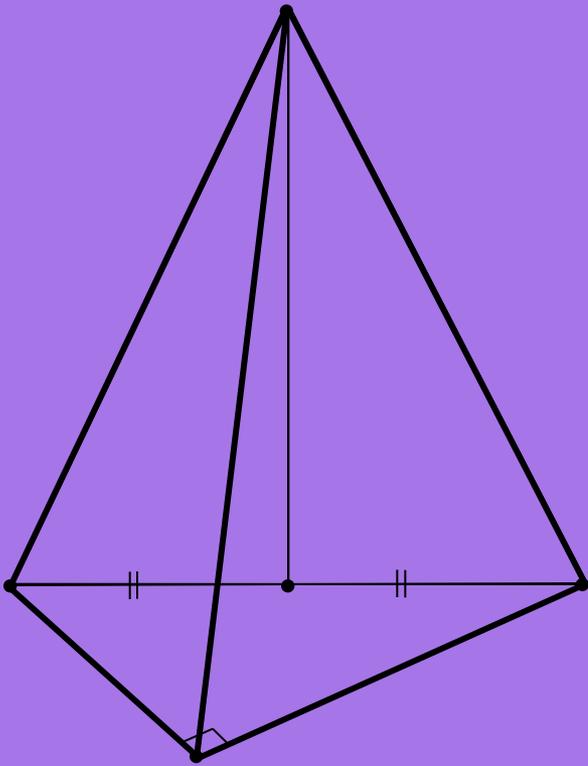
Одним из таких перпендикуляров будет медиана, проведенная к основанию треугольника.

На проекционном чертеже основание высоты занимает произвольное местоположение на проведенной медиане.

3. Строим боковые ребра, обозначаем невидимые линии, выделяем контур.

Задача №2

Построить изображение пирамиды в основании которой лежит прямоугольный треугольник.



1. Строим основание пирамиды.

Прямоугольный треугольник изображается произвольным треугольником.

2. Строим высоту пирамиды.

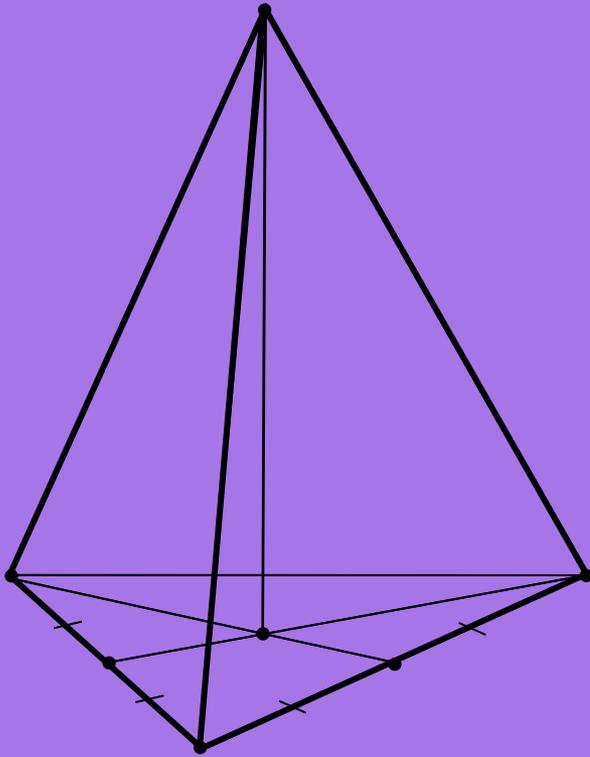
По свойству пирамиды основание высоты – центр описанной около треугольника окружности, то есть точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам.

В основании прямоугольный треугольник, поэтому основание высоты – середина гипотенузы.

3. Строим боковые ребра, обозначаем невидимые линии, выделяем контур.

Задача №3

Построить изображение пирамиды в основании которой лежит правильный треугольник.



1. Строим основание пирамиды.

Правильный треугольник изображается произвольным треугольником.

2. Строим высоту пирамиды.

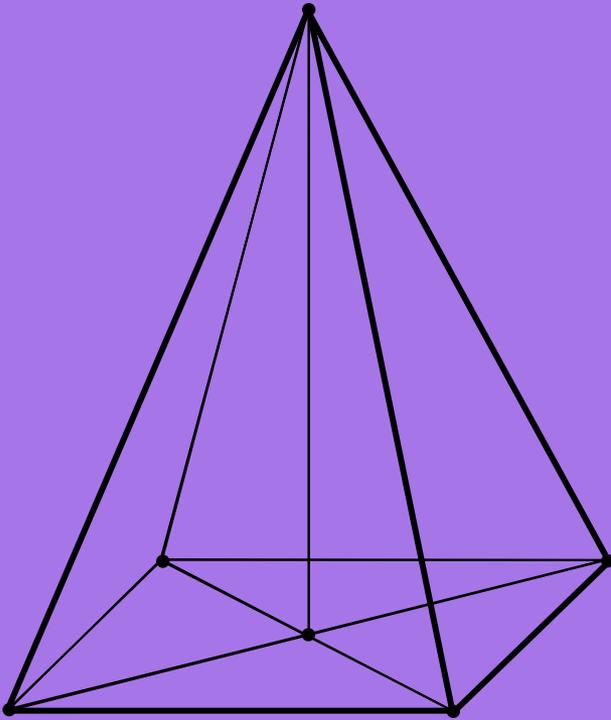
По свойству пирамиды основание высоты – центр описанной около треугольника окружности, то есть точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам.

В основании правильный треугольник, поэтому основание высоты – точка пересечения его медиан.

3. Строим боковые ребра, обозначаем невидимые линии, выделяем контур.

Задача №4

Построить изображение пирамиды в основании которой лежит прямоугольник.



1. Строим основание пирамиды.

Прямоугольник изображается произвольным параллелограммом.

2. Строим высоту пирамиды.

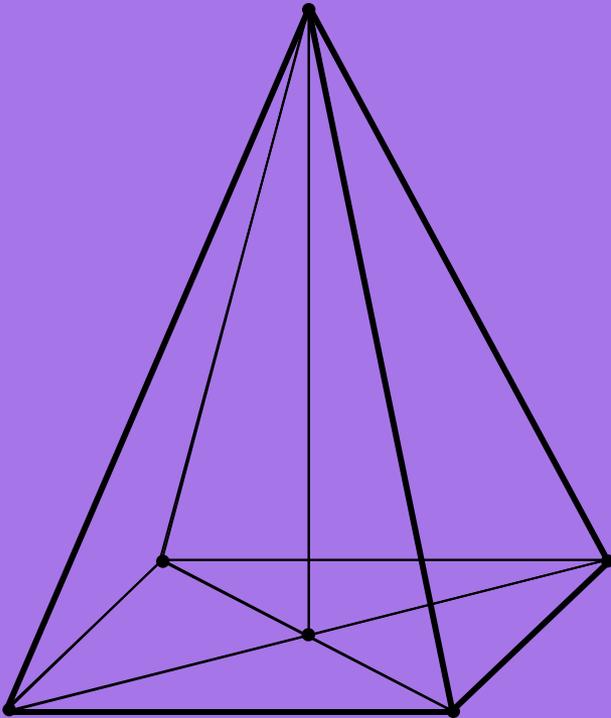
По свойству пирамиды основание высоты – центр описанной около четырехугольника окружности, то есть точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам.

В основании прямоугольник, поэтому основание высоты – точка пересечения его диагоналей.

3. Строим боковые ребра, обозначаем невидимые линии, выделяем контур.

Задача №5

Построить изображение пирамиды в основании которой лежит квадрат.



1. Строим основание пирамиды.

Квадрат изображается произвольным параллелограммом.

2. Строим высоту пирамиды.

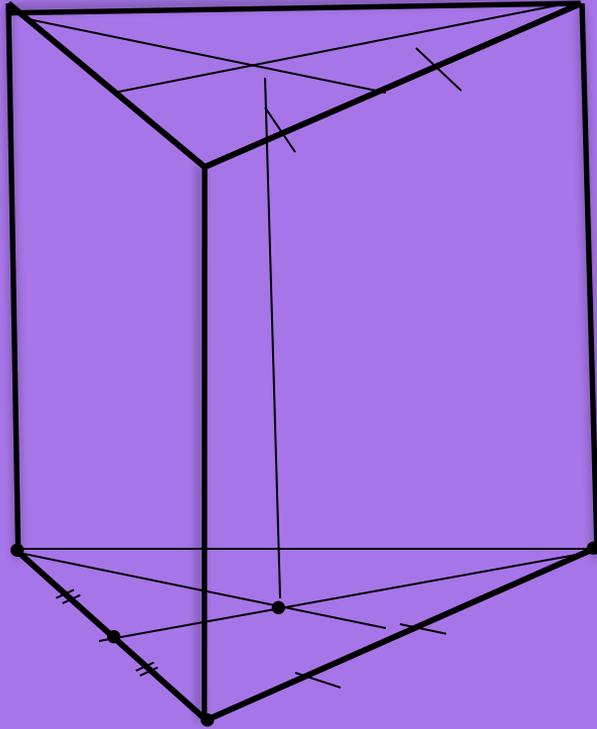
По свойству пирамиды основание высоты – центр описанной около четырехугольника окружности, то есть точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам.

В основании квадрат, поэтому основание высоты – точка пересечения его диагоналей.

3. Строим боковые ребра, обозначаем невидимые линии, выделяем контур.

*Построение
изображений призмы*

Алгоритм изображения призмы.



1. Изображение призмы начинают всегда с изображения ее основания:

Вершины основания призмы выбираем так, чтобы получить наиболее наглядное изображение;

Далее вершины соединяются тонкой вспомогательной линией;

2. Построение высоты призмы:

Исходя из свойств пирамиды и свойств многоугольника, лежащего в основании строится основание высоты;

Высота изображается вертикальным отрезком, параллельным краю листа бумаги.

3. Построение боковых ребер:

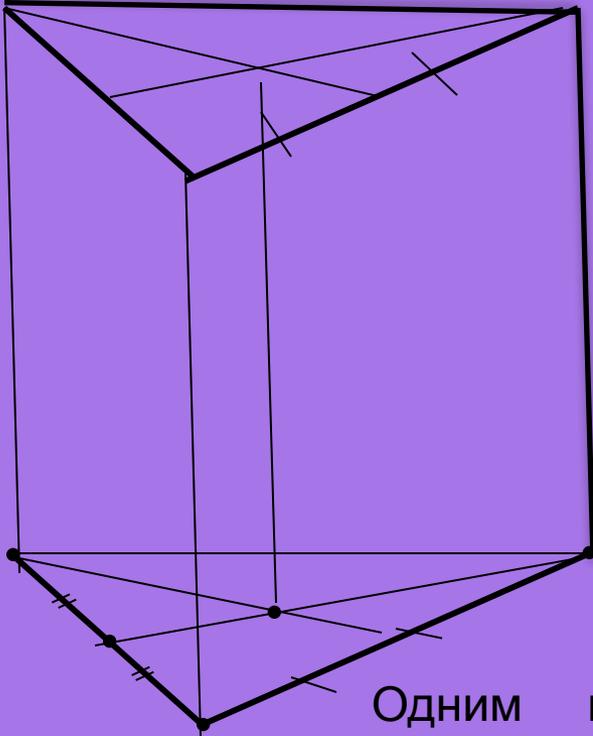
Вершина пирамиды соединяется отрезками с вершинами основания.

4. Невидимые отрезки отмечаем штриховой линией.

5. Выделяем контур.

Задача №7

Построить изображение призмы в основании которой лежит равнобедренный треугольник.



Здесь и в дальнейшем строить изображение призмы будем согласно приведенному алгоритму.

1. Строим основание призмы

Равнобедренный треугольник изображается произвольным треугольником.

2. Строим высоту призмы.

По свойству пирамиды основание высоты – центр описанной около треугольника окружности, то есть точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам.

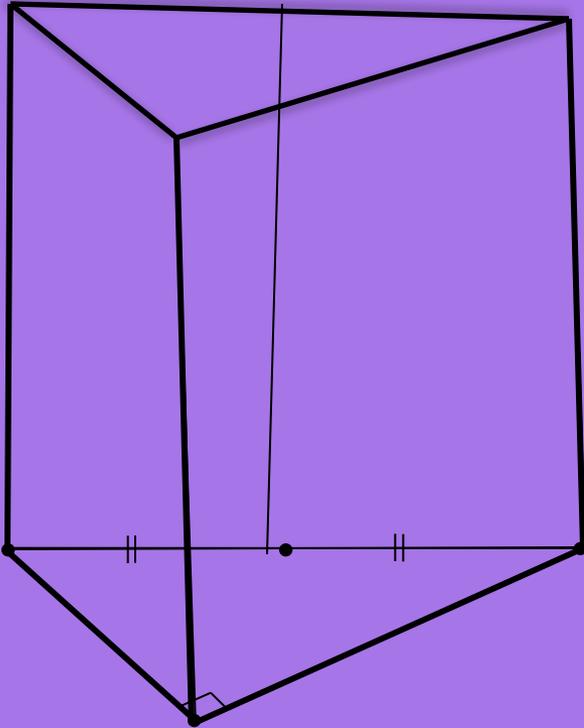
Одним из таких перпендикуляров будет медиана, проведенная к основанию треугольника.

На проекционном чертеже основание высоты занимает произвольное местоположение на проведенной медиане.

3. Строим боковые ребра, обозначаем невидимые линии, выделяем контур.

Задача №8

Построить изображение призмы в основании которой лежит прямоугольный треугольник.



1. Строим основание пирамиды.

Прямоугольный треугольник изображается произвольным треугольником.

2. Строим высоту пирамиды.

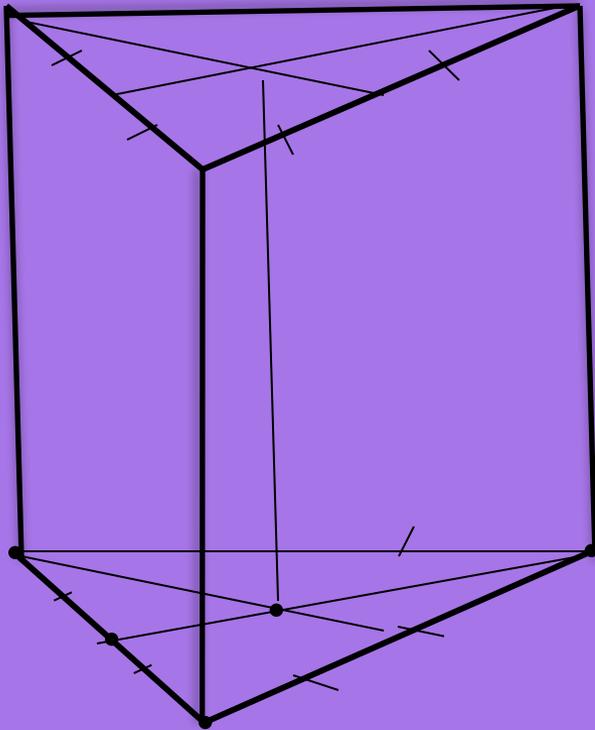
По свойству пирамиды основание высоты – центр описанной около треугольника окружности, то есть точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам.

В основании прямоугольный треугольник, поэтому основание высоты – середина гипотенузы.

3. Строим боковые ребра, обозначаем невидимые линии, выделяем контур.

Задача №9

Построить изображение призмы в основании которой лежит правильный треугольник.



1. Строим основание пирамиды.

Правильный треугольник изображается произвольным треугольником.

2. Строим высоту пирамиды.

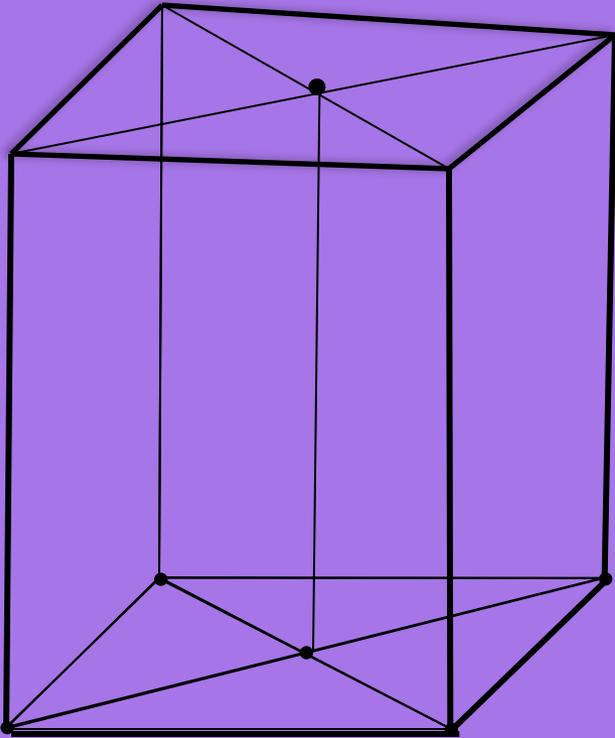
По свойству пирамиды основание высоты – центр описанной около треугольника окружности, то есть точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам.

В основании правильный треугольник, поэтому основание высоты – точка пересечения его медиан.

3. Строим боковые ребра, обозначаем невидимые линии, выделяем контур.

Задача №10

Построить изображение призмы в основании которой лежит прямоугольник.



1. Строим основание пирамиды.

Прямоугольник изображается произвольным параллелограммом.

2. Строим высоту пирамиды.

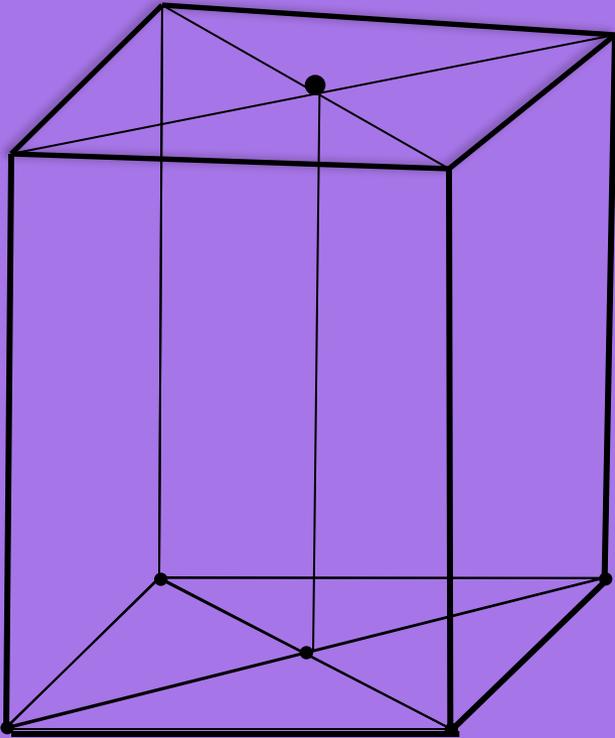
По свойству пирамиды основание высоты – центр описанной около четырехугольника окружности, то есть точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам.

В основании прямоугольник, поэтому основание высоты – точка пересечения его диагоналей.

3. Строим боковые ребра, обозначаем невидимые линии, выделяем контур.

Задача №11

Построить изображение призмы в основании которой лежит квадрат.



1. Строим основание пирамиды.

Квадрат изображается произвольным параллелограммом.

2. Строим высоту пирамиды.

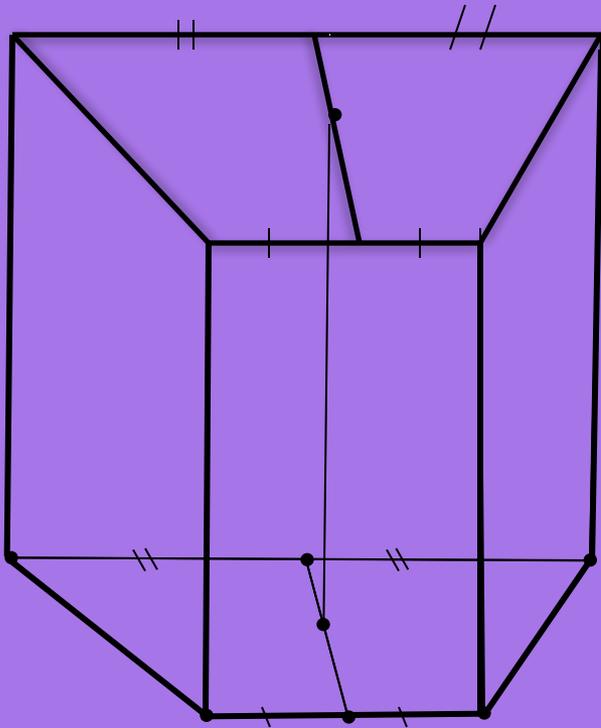
По свойству пирамиды основание высоты – центр описанной около четырехугольника окружности, то есть точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам.

В основании квадрат, поэтому основание высоты – точка пересечения его диагоналей.

3. Строим боковые ребра, обозначаем невидимые линии, выделяем контур.

Задача №12

Построить изображение призмы в основании которой лежит равнобедренная трапеция.



1. Строим основание пирамиды.

Трапеция изображается трапецией.

2. Строим высоту пирамиды.

По свойству пирамиды основание высоты – центр описанной около четырехугольника окружности, то есть точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам.

В основании равнобедренная трапеция, поэтому основание высоты занимает произвольное местоположение на отрезке соединяющем середины оснований.

3. Строим боковые ребра, обозначаем невидимые линии, выделяем контур.

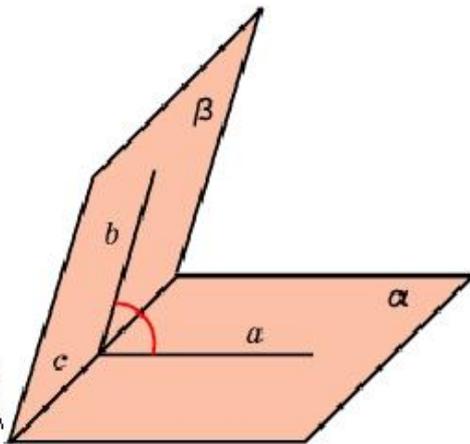
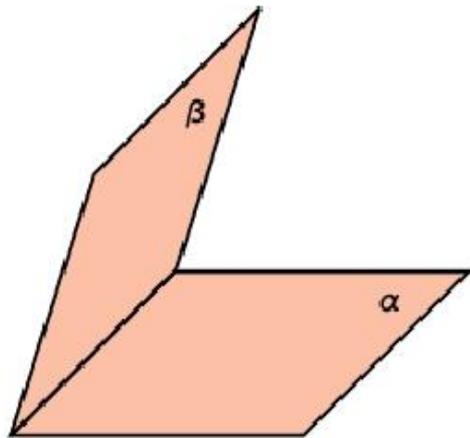
ДВУГРАННЫЙ УГОЛ. УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ

Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей граничной прямой.

Линейным углом двугранного угла называется угол, образованный лучами с вершиной на граничной прямой, стороны которого лежат на гранях двугранного угла и перпендикулярны граничной прямой.

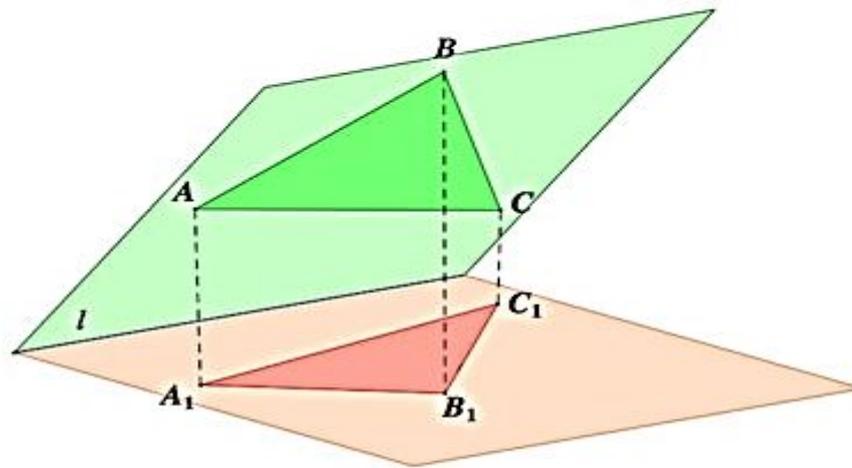
Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла.

Углом между двумя пересекающимися плоскостями называется наименьший из двугранных углов, образованных этими плоскостями.



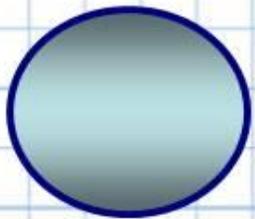
Площадь ортогональной проекции многоугольника

Площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна площади проектируемого многоугольника, умноженной на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекций.



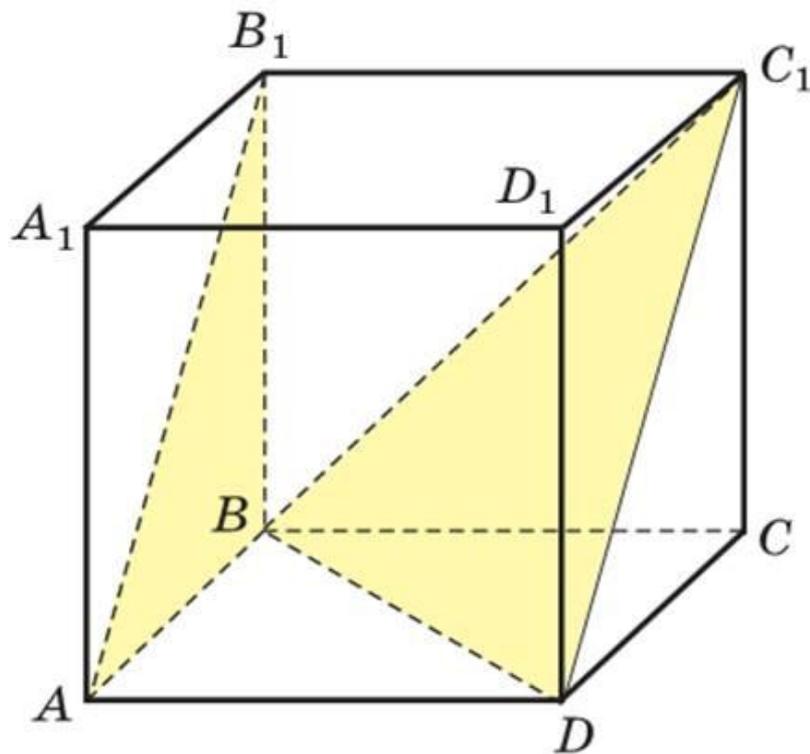
$$S_{A_1B_1C_1} = S_{ABC} \cdot \cos\alpha,$$

где α – угол между плоскостями ABC , $A_1B_1C_1$

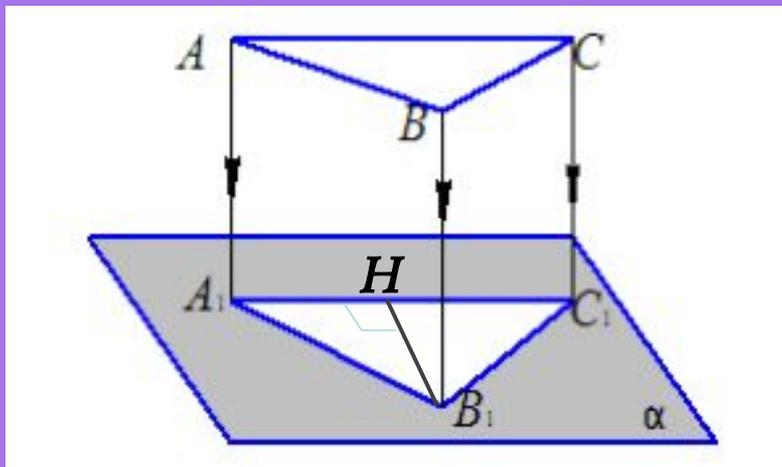


Применение теоремы о площади ортогональной проекции многоугольника

$$\cos \varphi = \frac{S_{\text{пр}}}{S},$$



Задача 16.11



- * Дано: $AB = BC = AC = 12$ см
 $A_1B_1 = B_1C_1 = 10$ см
 $A_1C_1 = 12$ см

* Найти: Угол между ABC и $A_1B_1C_1$

* Решение:

$$S_{ABC} = (12^2 * \sqrt{3})/4 = 36\sqrt{3}$$

$$B_1H = \sqrt{(100 - 36)} = 8$$

$$S_{пр} = \frac{1}{2} * 12 * 8 = 48$$

$$\cos \alpha = \frac{S_{пр}}{S} = \frac{48}{36\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{4\sqrt{3}}{9}\right)$$

