Дифференциальные уравнения

Линейные однородные и неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

- Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеют вид: $y'' + py' + qy = \Phi(x)$
- Решение этих уравнений основано на следующей теории.

Th: *Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения выражается суммой его частного решения и общего решения соответствующего линейного однородного уравнения.*

$$y = y^* + Y$$

- Рассмотрим способ нахождения частного решения неоднородного уравнения, ограничиваясь решением таких неоднородных уравнений второго порядка, *у* которых правая часть является многочленом, т.е. P(x), или показательной функцией Ae^{kx}.
- Для отыскания частного решения *y** будим применять метод неопределенных коэффициентов, причем *у* следует искать в таком же виде, какой имеет *P(x)* или Ae^{kx}.

I. Подбор частного решения y, когда правая часть – многочлен.*

а) если $P(x)$ – многочлен и $q \neq 0$, то y^* следует искать в виде многочлена такой же степени

\# $P(x) = 2x + 3$ или x, то $y^* : Ax + B$

$P(x) = x^2$ или (x^2+1) или $(x^2 + x — 1)$, то $y^* : Ax^2 + Bx + C$

- При этом коэффициенты многочлена находятся из системы линейных алгебраических уравнений, которые получатся при подстановке в дифференциальное уравнение предполагаемого многочлена и его производных.

$y'' - 2y' - 3y = 2x$ нач. усл.: $y(0) = 0$

$y'(0) = 1$

$y^* = Ax + B$

$y^{*\prime} = A; \; y^{*\prime\prime} = 0$

$-2A - 2Ax - 3B = 2x$

$$\begin{cases} -2A = 2 \\ -2A - 3B = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} A = -1 \\ -3B = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -1 \\ B = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$y^* = -x + \frac{2}{3}$$

$k^2 - 2k - 3 = 0$

$D = 4 + 12 = 16$

$$k_1 = \frac{2+4}{2} = 3$$

$k_2 = -1$

$Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - x + \frac{2}{3}$$

$y' = -C_1 e\text{-}x + 3C_2 e^{3x} - 1$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + \dfrac{2}{3} = 0 \\ -C_1 + 3C_2 - 1 = 1 \end{cases}; \begin{cases} C_1 = -\dfrac{2}{3} - C_2 \\ 4C_2 = 2\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 = \dfrac{1}{3} \\ C_1 = -\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3} \end{cases} \begin{cases} C_2 = \dfrac{1}{3} \\ C_1 = -1 \end{cases}$$

$$\boxed{y = -e^{-x} + \frac{1}{3}e^{3x} - x + \frac{2}{3}}$$

б) $q = 0$ (при этом характеристическое уравнение имеет один нулевой корень), то в многочлене, для частного решения y^*, вводится множитель x.

- Это значит, что вместо A берется Ax, вместо $Ax + B$ — $Ax^2 + Bx$ вместо

  $Ax^2 + Bx + C$ — $Ax^3 + Bx^2 + Cx$ т.

в) если $p = 0$ и $q = 0$, то в многочлен y^* вводятся множитель x^2.

\# $y'' - 2y' = 24x$ $\quad$ $k^2 - 2k = 0$

$q = 0$ $\quad$ $k(k - 2) = 0$

$y^* = Ax^2 + Bx$ $\quad$ $k = 0, k = 2$

$y^{*\prime} = 2Ax + B$ $\quad$ $Y = C_1 + C_2 e^{2x}$

$y^{*\prime\prime} = 2A$

$2A - 4Ax - 2B = 24x$

$$\begin{cases} -4A = 24 \\ 2A - 2B = 0 \end{cases} \begin{cases} A = -6 \\ A = B \end{cases} \begin{cases} A = -6 \\ B = -6 \end{cases}$$

$y^* = -6x^2 - 6x$

$\underline{y = -6x^2 - 6x + C_1 + C_2 e^{2x}}$

II. *Подбор частного решения y^* когда правая часть – показательная функция.*

а) если в правой части задана показательная функция ae^{bx}, то частное решение y^* следует искать в виде Ae^{bx}.

б) если характеристическое уравнение, соответствующее однородному уравнению, имеет корень $x = b$, то частное решение следует искать в виде $y^* = Axe^{bx}$.

в) если правая часть – сумма функций различного вида, то частное решение составляется в виде суммы функций соответствующих каждому слагаемому.

\# $x^2 + e^{-x} = \Phi(x)$

$y^* = Ax^2 + Bx + C + Me^{-x}$

Каждое слагаемое проще определяется отдельно!

$y'' - 3y' - 4y = 9e^{2x}$

$k^2 - 3k - 4 = 0$

$D = 9 + 16 + 25$

$$k_1 = \frac{3+5}{2} = 4$$

$k_2 = -1$

$Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}$

$y^* = Ae^{2x}$

$y^{*\prime} = 2Ae^{2x}$

$y^{*\prime\prime} = 4Ae^{2x}$

$4Ae^{2x} - 6Ae^{2x} - 4Ae^{2x} = 9e^{2x}$

$-6A = 9$

$$A = -\frac{9}{6} = -1\frac{1}{2}$$

$$\boxed{y = -1\frac{1}{2}e^{2x} + C_1e^{-x} + C_2e^{4x}}$$