

Дифференциальные уравнения

Линейные однородные и неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами



- Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеют вид: $y'' + py' + qy = \Phi(x)$
- Решение этих уравнений основано на следующей теории.

Th: *Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения выражается суммой его частного решения и общего решения соответствующего линейного однородного уравнения.*

$$y = y^* + Y$$

- Рассмотрим способ нахождения частного решения неоднородного уравнения, ограничиваясь решением таких неоднородных уравнений второго порядка, у которых правая часть является многочленом, т.е. $P(x)$, или показательной функцией Ae^{kx} .
- Для отыскания частного решения y^* будем применять метод неопределенных коэффициентов, причем y следует искать в таком же виде, какой имеет $P(x)$ или Ae^{kx} .



I. Подбор частного решения y^ , когда правая часть – многочлен.*

а) если $P(x)$ – многочлен и $q \neq 0$, то y^* следует искать в виде многочлена такой же степени

$P(x) = 2x + 3$ или x , то $y^* : Ax + B$

$P(x) = x^2$ или $(x^2 + 1)$ или $(x^2 + x - 1)$, то $y^* : Ax^2 + Bx + C$

- При этом коэффициенты многочлена находятся из системы линейных алгебраических уравнений, которые получатся при подстановке в дифференциальное уравнение предполагаемого многочлена и его производных.



$$\# \quad y''' - 2y' - 3y = 2x \quad \text{нач. усл.:} \quad y(0) = 0 \\ y'(0) = 1$$

$$y^* = Ax + B$$

$$y^{*'} = A; \quad y^{*''} = 0$$

$$-2A - 2Ax - 3B = 2x$$

$$\begin{cases} -2A = 2 \\ -2A - 3B = 0 \end{cases}; \begin{cases} A = -1 \\ -3B = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -1 \\ B = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$y^* = -x + \frac{2}{3}$$



$$k^2 - 2k - 3 = 0$$

$$D = 4 + 12 = 16$$

$$k_1 = \frac{2 + 4}{2} = 3$$

$$k_2 = -1$$

$$Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - x + \frac{2}{3}$$

$$y' = -C_1 e^{-x} + 3C_2 e^{3x} - 1$$



$$\begin{cases} C_1 + C_2 + \frac{2}{3} = 0 \\ -C_1 + 3C_2 - 1 = 1 \end{cases} ; \begin{cases} C_1 = -\frac{2}{3} - C_2 \\ 4C_2 = 2\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 = \frac{1}{3} \\ C_1 = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \end{cases} \begin{cases} C_2 = \frac{1}{3} \\ C_1 = -1 \end{cases}$$

$$y = -e^{-x} + \frac{1}{3}e^{3x} - x + \frac{2}{3}$$



б) $q = 0$ (при этом характеристическое уравнение имеет один нулевой корень), то в многочлене, для частного решения y^* , вводится множитель x .

- Это значит, что вместо A берется Ax , вместо $Ax + B$ — $Ax^2 + Bx$ вместо

$$Ax^2 + Bx + C \text{ — } Ax^3 + Bx^2 + Cx \text{ т.}$$



в) если $p = 0$ и $q = 0$, то в многочлен y^* вводятся множитель x^2 .

$$\# y'' - 2y' = 24x \quad k^2 - 2k = 0$$

$$q = 0 \quad k(k - 2) = 0$$

$$y^* = Ax^2 + Bx \quad k = 0, k = 2$$

$$y^{*'} = 2Ax + B \quad Y = C_1 + C_2 e^{2x}$$

$$y^{*''} = 2A$$

$$2A - 4Ax - 2B = 24x$$

$$\begin{cases} -4A = 24 \\ 2A - 2B = 0 \end{cases} \begin{cases} A = -6 \\ A = B \end{cases} \begin{cases} A = -6 \\ B = -6 \end{cases}$$

$$y^* = -6x^2 - 6x$$

$$\underline{y = -6x^2 - 6x + C_1 + C_2 e^{2x}}$$

II. Подбор частного решения y^* когда правая часть – показательная функция.

- а) если в правой части задана показательная функция ae^{bx} , то частное решение y^* следует искать в виде Ae^{bx} .
- б) если характеристическое уравнение, соответствующее однородному уравнению, имеет корень $x = b$, то частное решение следует искать в виде $y^* = Axe^{bx}$.

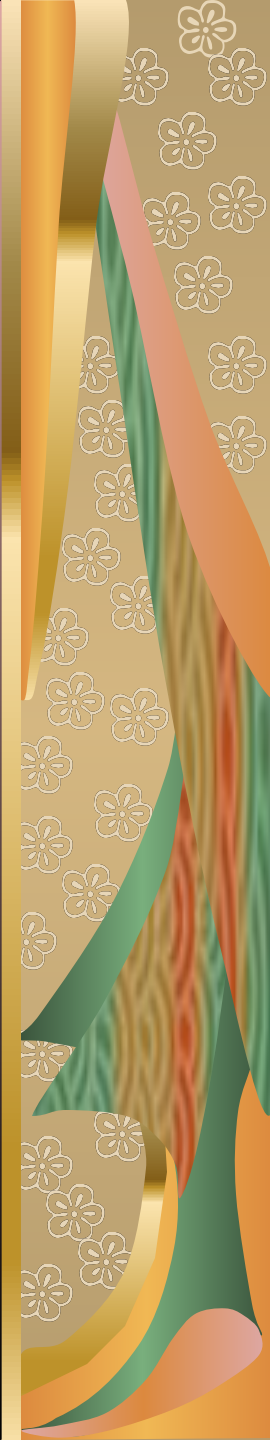


в) если правая часть – сумма функций различного вида, то частное решение составляется в виде суммы функций соответствующих каждому слагаемому.

$$\# \quad x^2 + e^{-x} = \Phi(x)$$

$$y^* = Ax^2 + Bx + C + Me^{-x}$$

Каждое слагаемое проще определяется отдельно!



$$\# y'' - 3y' - 4y = 9e^{2x}$$

$$k^2 - 3k - 4 = 0$$

$$D = 9 + 16 + 25$$

$$k_1 = \frac{3+5}{2} = 4$$

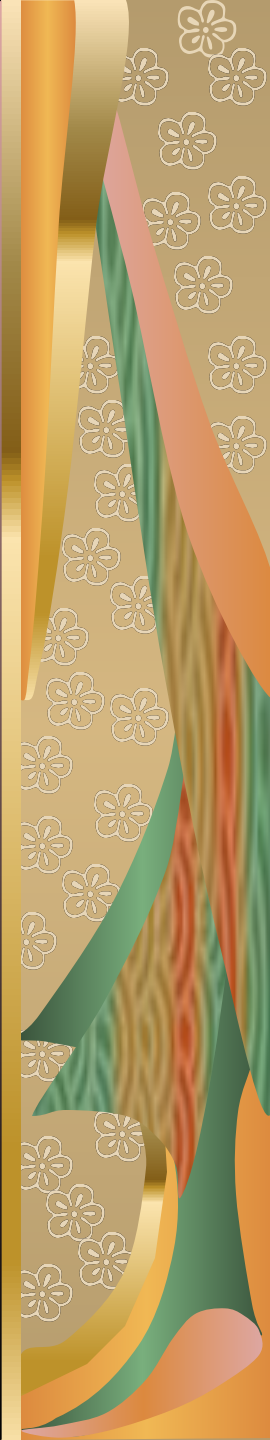
$$k_2 = -1$$

$$Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}$$

$$y^* = Ae^{2x}$$

$$y^{*'} = 2Ae^{2x}$$

$$y^{*''} = 4Ae^{2x}$$



$$4Ae^{2x} - 6Ae^{2x} - 4Ae^{2x} = 9e^{2x}$$

$$-6A = 9$$

$$A = -\frac{9}{6} = -1\frac{1}{2}$$

$$y = -1\frac{1}{2}e^{2x} + C_1e^{-x} + C_2e^{4x}$$

