



Моделирование систем

Лекция 2

**Имитационные модели:
дискретные и на базе
дифференциальных
уравнений**

Дискретная модель распространения эпидемии

- Содержательное описание модели:
- 1. Каждый заболевший на следующий день заражает в среднем « a » человек.
- 2. Каждый заболевший выздоравливает через « b » дней.
- 3. Все население региона равно « c ».
- 4. В первый день заболело « d » человек.
- 5. Выздоровевшие обладают иммунитетом к этой болезни.

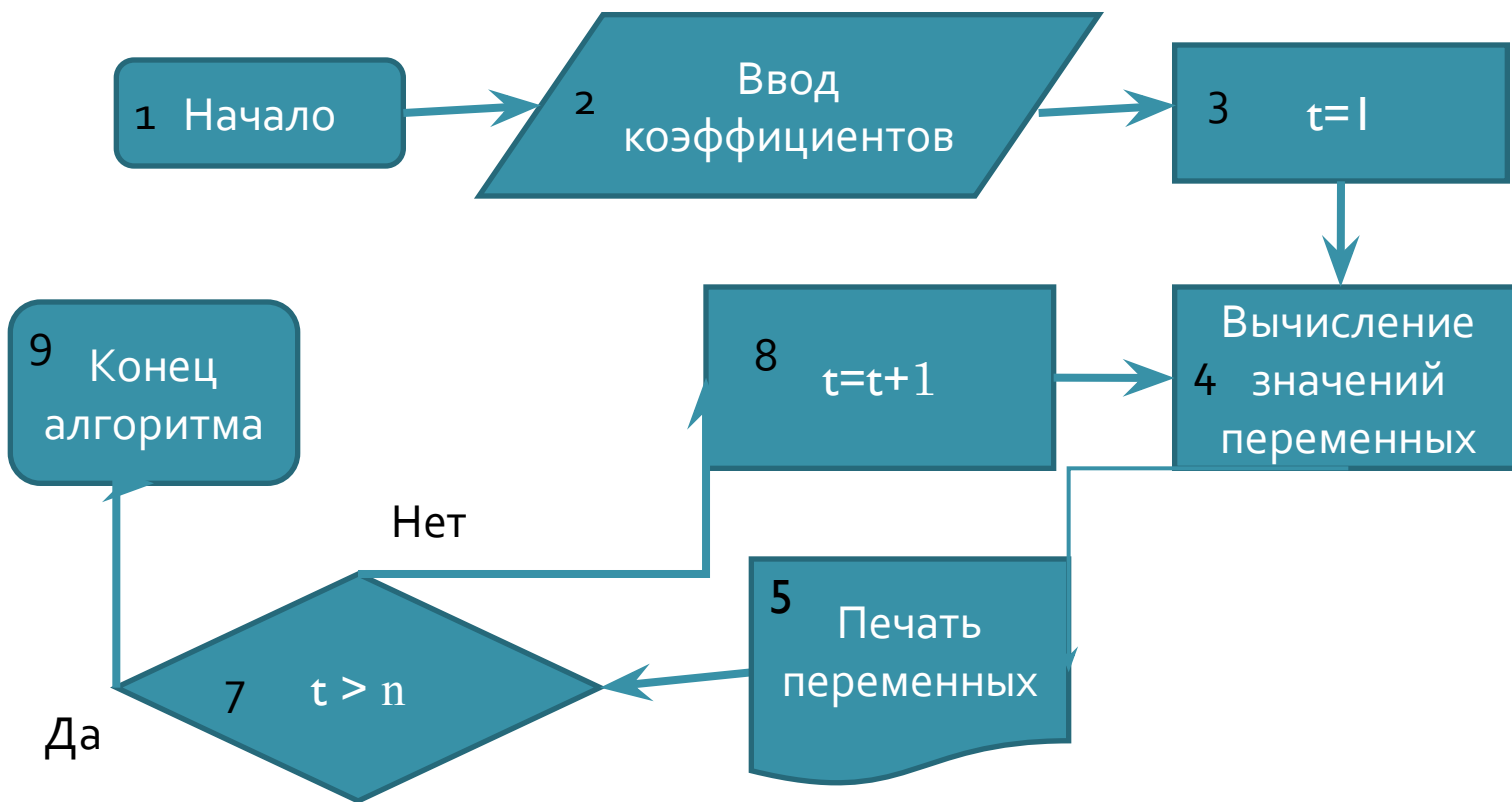
Обозначения

- $x(t)$ – число больных .
- $z(t)$ – число заболевших в t -й день;
- $y(t)$ – число здоровых в t -й день.

$$\left\{ \begin{array}{l} z(t) = a \cdot z(t-1); \\ x(t) = \sum_{q=t-b}^{q=t} z(q); \\ y(t) = c - \sum_{q=t-b}^{q=t} x(q); \\ z(1) = d. \end{array} \right.$$

Алгоритм исследования модели I

- Ниже полагаем, что время t меняется в диапазоне $1 - n$ с шагом 1.

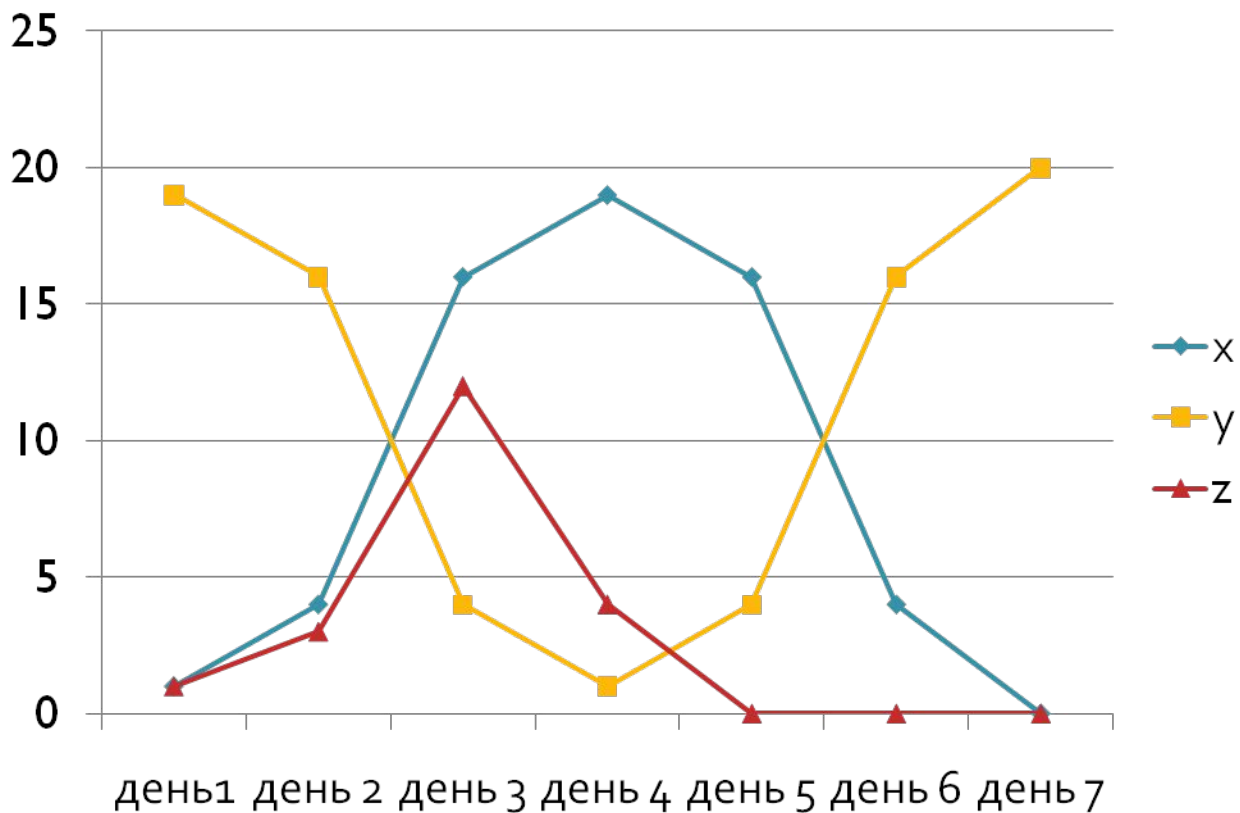


Динамика эпидемии

- Таблица, отображающая динамику эпидемии, при условии, что $a=3$, $b=3$, $c=20$, $d=1$:

| | | | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|----|----|
| t | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| x | 1 | 4 | 16 | 19 | 16 | 4 | 0 |
| y | 19 | 16 | 4 | 1 | 4 | 16 | 20 |
| z | 1 | 3 | 12 | 4 | 0 | 0 | 0 |

Графическое представление результатов



Самостоятельно 1

Определить динамику
эпидемии в течение 10
дней, если известно,
что:

$$a=4, b=2, c=30, d=4 .$$

Самостоятельно 2

Дать формальное описание модели, содержательное описание которой приводится ниже:

- 1. Каждый заболевший на следующий день заражает в среднем «а» человек.
- 2. Каждый заболевший либо выздоравливает или гибнет через «b» дней.
- 3. Отношение числа погибших к числу заболевших «b» дней назад равно η .
- 3. Все население региона равно «с».
- 4. В первый день заболело «d» человек.
- 5. Выздоровевшие обладают иммунитетом к этой болезни.

Самостоятельно 3

**Определить динамику
эпидемии в течение 10
дней, если известно, что:
 $a=2$, $b=3$, $c=24$, $d=2$, $\eta = 25\%$**

Содержательная постановка задачи №2

- Остров населен мхами, оленями и волками. Известны функции, связывающие эти параметры между собой. Требуется определить такое соотношение между количеством мха, числом оленей и числом волков, которое бы гарантировало устойчивость биоценоза.

Обозначения, допущения и определения

- X_1 - количество мха на острове;
- X_2 - количество оленей на острове;
- X_3 - количество волков на острове;
- $X_1 = A + B \cdot \sin(t) - L \cdot X_2 + d X_1/dt$;
- $X_2 = C \cdot X_1 - D \cdot X_3 + d X_2/dt$;
- $X_3 = H \cdot X_2 + d X_3/dt$;
- Если $X_1 < A + B \cdot \sin(t)$, то $d X_1/dt = W \cdot X_1$, в противном случае $d X_1/dt = 0$;
- $d X_2/dt = G \cdot X_2$;
- $d X_3/dt = K \cdot X_3$.

Замечания

- X_2 и X_3 - целые неотрицательные числа;
- Если одно из переменных X_2 и X_3 принимает значение q , меньшее, чем 2, то эта переменная не может в дальнейшем превысить величину q ;
- Для всех $i > 1$ справедливо:
$$X_i = X_i \cdot \text{signum}(X_{i-1}).$$
- Все коэффициенты далее полагаем известными.

Формальное описание острова

$$X_1 = A + B \cdot \sin(t) - L \cdot X_2 + d X_1/dt;$$

$$X_2 = C \cdot X_1 - D \cdot X_3 + d X_2/dt;$$

$$X_3 = H \cdot X_2 + d X_3/dt;$$

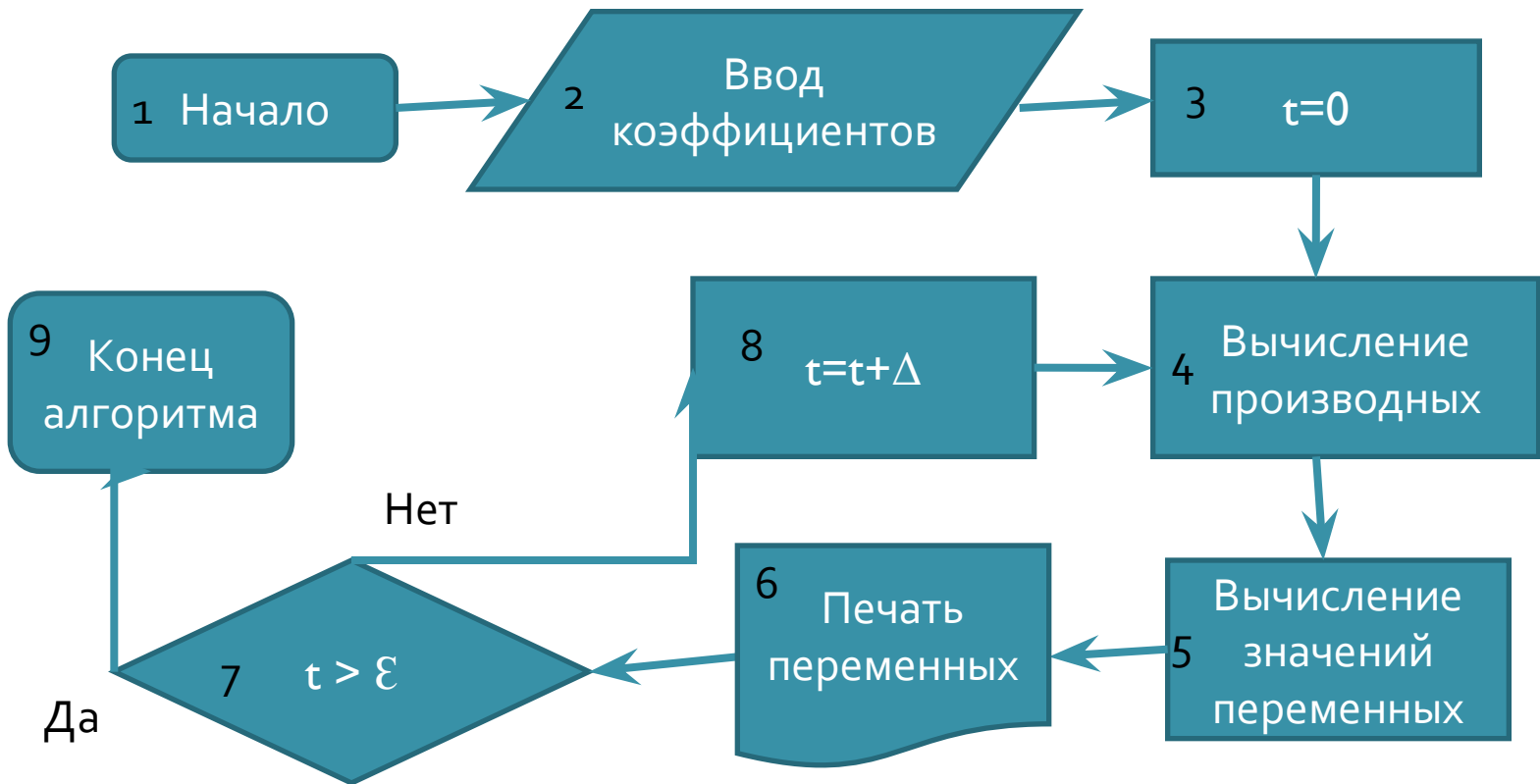
$$\frac{dX_1}{dt} = WX_1 \text{signum}(1 - \text{signum}(X_1 - A - B \cdot \sin(t)));$$

$$\frac{dX_2}{dt} = G \cdot X_2;$$

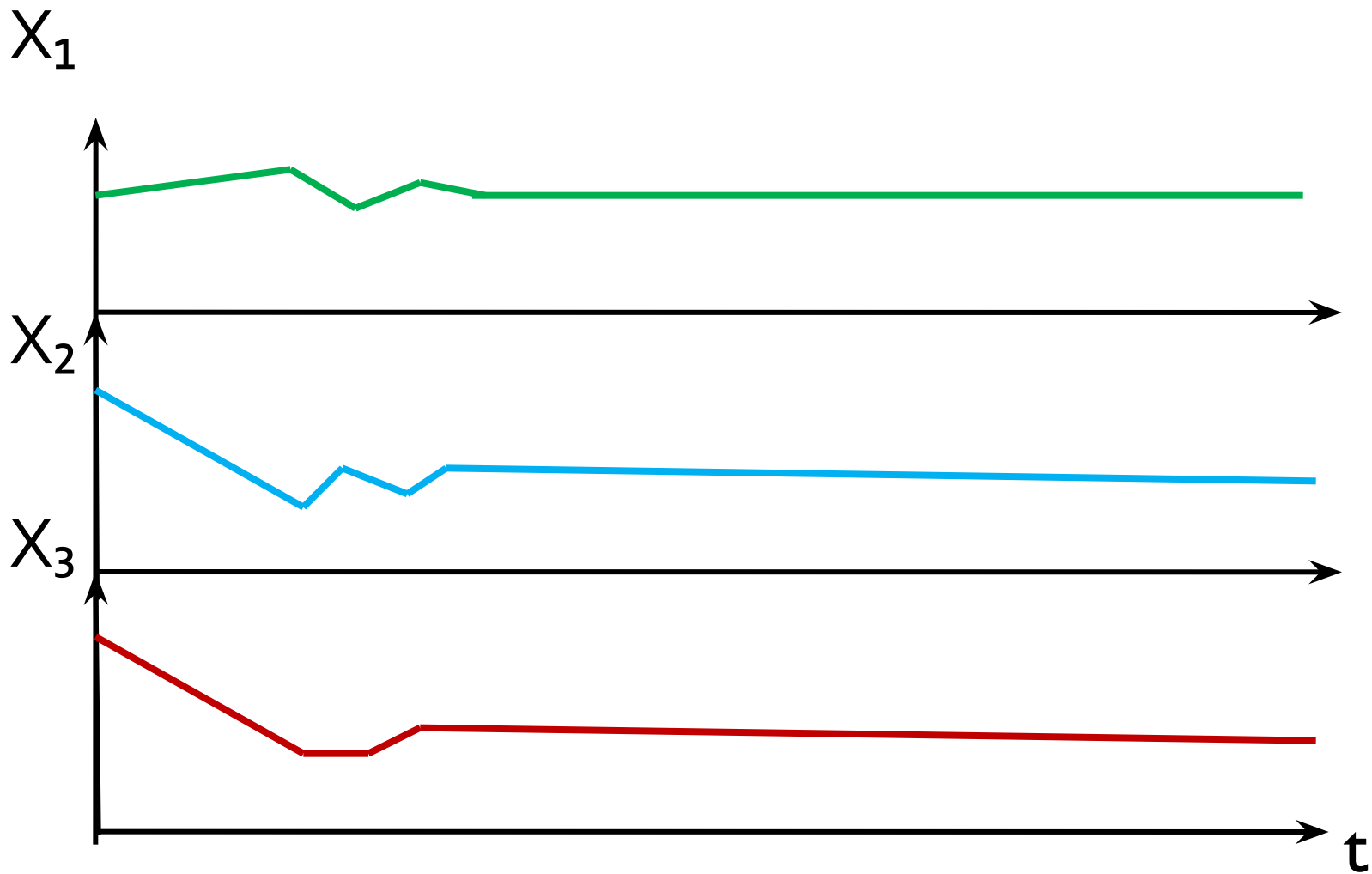
$$\frac{dX_3}{dt} = K \cdot X_3.$$

Алгоритм исследования модели

- Ниже полагаем, что время t меняется в диапазоне $0 - \varepsilon$ с шагом Δ .



Результаты моделирования



Значения коэффициентов, использованные в программе

- $A = 2200$; $B = 1000$; $L=1$;
 $C= 0,01$; $D = 4$; $G = 0,2$;
 $H=0,1$; $K= 0,05$; $\Delta = 1$;
 $X_2=150$; $X_3 = 2$; $B_1= 0,1$; ε
 $= 40$.

Самостоятельно:

1. Реализовать программно алгоритм имитирующий жизнь острова.
2. Определить соотношение олени/волки, при которой численность оленей будет максимальной и стабильной.
3. Построить графики, иллюстрирующие динамику массы мха, числа оленей и волков.

Модель озера (задача № 3)

- Учитываемые параметры (переменные):
- X_s – энергия солнечной радиации;
- X_p – растения;
- X_k – травоядные;
- X_c – плотоядные животные и рыбы;
- X_o – органические осадки, выпадающие на дно озера;
- X_e – энергообмен между средой и биоценозом.

Формальное описание модели

- Модель задается системой:

$$dX_p/dt = X_s - k_1 X_p;$$

$$dX_k/dt = k_2 X_p - k_3 X_k;$$

$$dX_c/dt = k_4 X_k - k_5 X_c;$$

$$dX_o/dt = k_6 X_p + k_7 X_k - k_8 X_c;$$

$$dX_e/dt = k_9 X_p + k_{10} X_k + k_{11} X_c;$$

$$X_s = k_{12} (k_{13} + k_{14} \sin 2\pi t)$$

Начальные условия (значение переменных при $t=0$): $X_p(0)$; $X_k(0)$; $X_c(0)$; X_o ; $X_e(0)$.

Конкретные значения коэффициентов модели

- Модель задается системой:

$$dX_p/dt = X_s - 4.03X_p;$$

$$dX_k/dt = 0.48X_p - 17.87X_k;$$

$$dX_c/dt = 4.85X_k - 4.65X_c;$$

$$dX_o/dt = 2.55X_p + 6.12X_k - 1.95X_c;$$

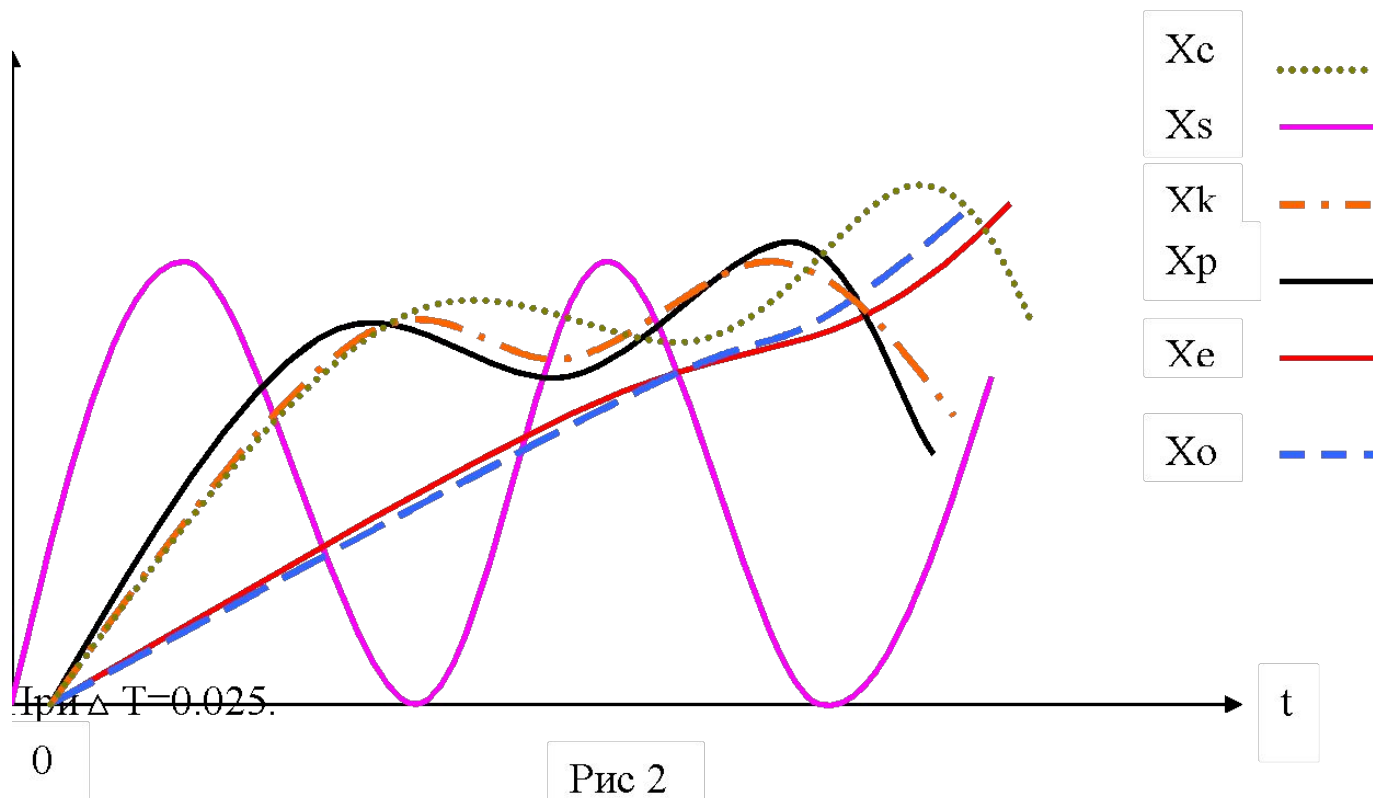
$$dX_e/dt = X_p + 6.9X_k + 7.7X_c;$$

$$X_s = 95.2(1 + 0.635\sin 2\pi t)$$

Начальные условия (значение переменных при $t=0$): $X_p(0)=0.83$;
 $X_k(0)=0.003$; $X_c(0)=0.0001$; $X_o(0)=0$; $X_e(0)=0$;

Графическое представление результатов

Модель озера Сидарбог: результаты имитации



Самостоятельно:

1. Разработать алгоритм, имитирующий жизнь озера.
2. Реализовать программно алгоритм имитирующий жизнь озера.
3. Определить соотношение между плотоядными и травоядными обитателями озера, при котором их численность будет максимальной и стабильной.
4. Построить графики, иллюстрирующие динамику всех переменных.