
Дифракционная теория изображений



Будак Владимир Павлович,
Национальный исследовательский
университет «МЭИ»
кафедра светотехники

☐: +7 (095) 763-5239

BudakVP@mpei.ru



Описание электромагнитного поля

Уравнения Maxwell (James Clerk, 1831–1879)

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$$

Волновое уравнение $\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad v = \frac{c}{n}, \quad n = \sqrt{\varepsilon\mu}$

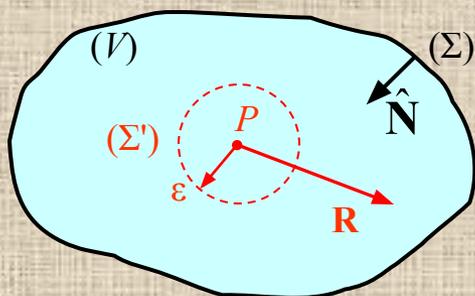
$$\Delta \Psi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0: \quad \Psi(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} U_{\omega}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} d\omega \Rightarrow \Delta U_{\omega}(\mathbf{r}) + k^2 U_{\omega} = 0$$

Дифракция - метод приближенного решения волнового уравнения:

- окончательные выражения - формулы Fresnel для поля за отверстием или за препятствием
- в узком смысле - отклонение от законов геометрической оптики
- в более широком смысле – приближенное описание распространения электромагнитной волны

Не всегда следует искать громоздкое точное аналитическое решение, а затем упрощать его к виду удобному для анализа

Задача дифракции



$$\Delta U + k^2 U = 0, \quad U(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \in \Sigma} = V(\mathbf{r})$$

$$\Delta U' + k^2 U' = 0, \quad U'(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \in \Sigma} = V'(\mathbf{r})$$

$$U' \Delta U - U \Delta U' = 0 \quad \longrightarrow \quad \int_{(V)} (U' \Delta U - U \Delta U') d^3 r = 0$$

$$\operatorname{div}(U' \nabla U - U \nabla U') = \nabla U' \nabla U + U' \Delta U - \nabla U \nabla U' - U \Delta U' = U' \Delta U - U \Delta U'$$

$$\text{Теорема Гау\ss:} \quad \int_{(V)} (U' \Delta U - U \Delta U') d^3 r = \oint_{(\Sigma)} (U' \nabla U - U \nabla U') \hat{\mathbf{N}} d^2 r = 0$$

$$U'(\mathbf{r}) = \frac{e^{ikR}}{R} : \quad \nabla U' = \nabla \frac{e^{ikR}}{R} = \left(ik - \frac{1}{R} \right) \frac{e^{ikR}}{R} \hat{\mathbf{R}}$$

$$\oint_{(\Sigma)} (U' \nabla U - U \nabla U') \hat{\mathbf{N}} d^2 r = - \oint_{(\Sigma')} (U' \nabla U - U \nabla U') \hat{\mathbf{N}} d^2 r$$

*Решение волнового уравнения для точечного источника
известно точное*

Интеграл Kirchhoff (Gustav Robert 1824-1887)

$$I = \oint_{(\Sigma')} (U' \nabla U - U \nabla U') \hat{\mathbf{N}} d^2 r = \oint_{(\Sigma')} \left[\frac{e^{ikR}}{R} \nabla U - U \left(ik - \frac{1}{R} \right) \frac{e^{ikR}}{R} \hat{\mathbf{R}} \right] \hat{\mathbf{N}} d^2 r$$

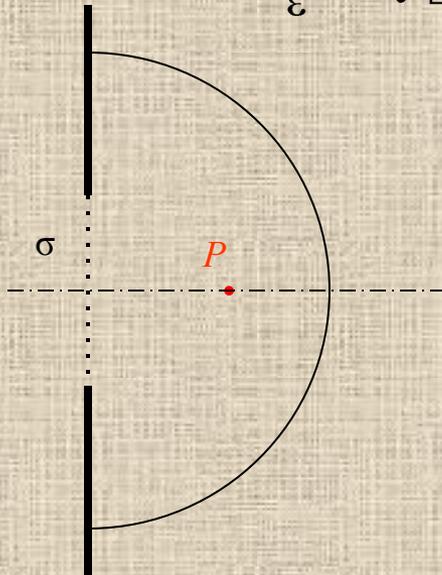
$$I = \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon^2} \varepsilon^2 \oint [U(ik\varepsilon - 1) - \varepsilon \hat{\mathbf{N}} \nabla U] d\hat{\mathbf{N}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} e^{ik\varepsilon} \oint [U(-1)] d\hat{\mathbf{N}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -4\pi U(P)$$

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \oint_{(\Sigma)} \left[U(\mathbf{r})(ikR - 1) \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R} - \nabla U \right] \frac{e^{ikR}}{R} \hat{\mathbf{N}} d^2 r$$

$$kR \gg 1: U(P) = \frac{1}{4\pi} \oint_{(\Sigma)} \left[ik\hat{\mathbf{R}}V(\mathbf{r}) - \nabla V \right] \frac{e^{ikR}}{R} \hat{\mathbf{N}} d^2 r$$

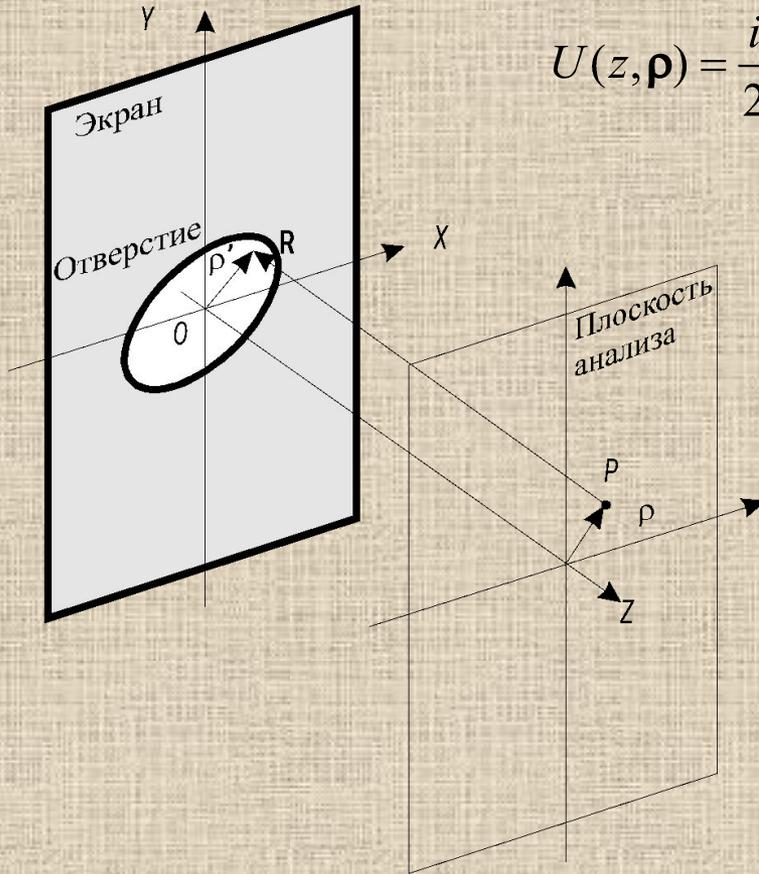
$$\nabla e^{ikz} = -ik e^{ikz} \hat{\mathbf{R}} \Rightarrow \nabla V(\mathbf{r}) \approx -ikV(\mathbf{r})\hat{\mathbf{R}}$$

$$U(z, \rho) = \frac{ik}{2\pi} \int_{(\sigma)} V(\rho') \frac{e^{ikR}}{R} (\hat{\mathbf{R}}, \hat{\mathbf{N}}) d^2 \rho'$$



На границе отверстия скачком изменяется от 0 до некоторого значения, как амплитуда поля, так и ее производная поля

Дифракция Fresnel (Augustin-Jean 1788–1827)



$$U(z, \rho) = \frac{ik}{2\pi} \int_{(\sigma)} V(\rho') \frac{e^{ikR}}{R} (\hat{\mathbf{R}}, \hat{\mathbf{N}}) d^2\rho' \quad (\hat{\mathbf{R}}, \hat{\mathbf{N}}) \approx -\frac{z}{R}, \quad \frac{1}{R^2} \approx \frac{1}{z^2}$$

$$R = \sqrt{z^2 + (\rho - \rho')^2} = z \sqrt{1 + \frac{(\rho - \rho')^2}{z^2}} \approx z + \frac{(\rho - \rho')^2}{2z} + \dots$$

$$U(z, \rho) = \frac{k e^{ikz}}{2\pi iz} \int_{(\sigma)} V(\rho') \exp\left[ik \frac{(\rho - \rho')^2}{2z} \right] d^2\rho'$$

$$\frac{k |\rho - \rho'|^4}{z^3} \ll 2\pi \Rightarrow z = |\rho - \rho'| \sqrt[3]{\frac{|\rho - \rho'|}{\lambda}}$$

- $|\rho - \rho'| \approx 1 \text{ см}$ при длине волны $\lambda = 1 \text{ мкм}$ составит $z \gg 0.3 \text{ м}$
- Более точные оценки $z \approx 400\lambda$

Приближение Fresnel можно считать практически точным в задачах прикладной оптики

Дифракция Fraunhofer (Joseph von, 1787-1826)

$$\frac{(\rho - \rho')^2}{2z} = \frac{\rho^2 + \rho'^2}{2z} - \frac{\rho\rho'}{z} \quad U(z, \rho) = \frac{ke^{ikz + \frac{\rho^2}{2z}}}{2\pi iz} \int_{(\sigma)} V(\rho') e^{-ik\frac{\rho\rho'}{z}} d^2\rho'$$

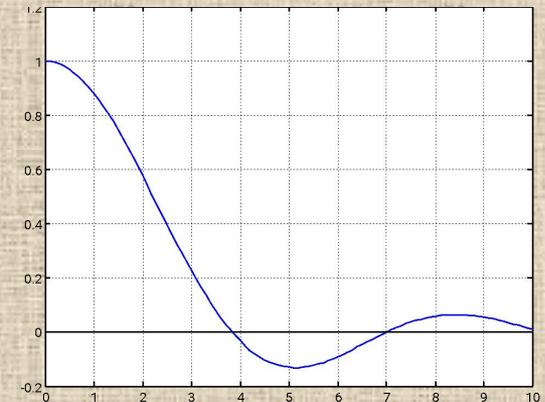
$k\frac{\rho'^2}{2z} \ll 2\pi \Rightarrow z \gg \frac{\rho'^2}{\lambda} : \quad |\rho - \rho'| \approx 1 \text{ см при длине волны } \lambda = 1 \text{ мкм} - z \gg 100 \text{ м}$

Дифракция Fraunhofer на круглом отверстии радиуса a :

$$U(z, \rho) = A \int_{(\sigma)} \exp\left[-ik\frac{\rho\rho'}{z}\right] d^2\rho' = A \int_0^a \int_0^{2\pi} \exp\left[-ik\frac{\rho\rho'}{z} \cos\phi\right] d\phi \rho' d\rho' = 2\pi A \int_0^a J_0\left(k\frac{\rho\rho'}{z}\right) \rho' d\rho'$$

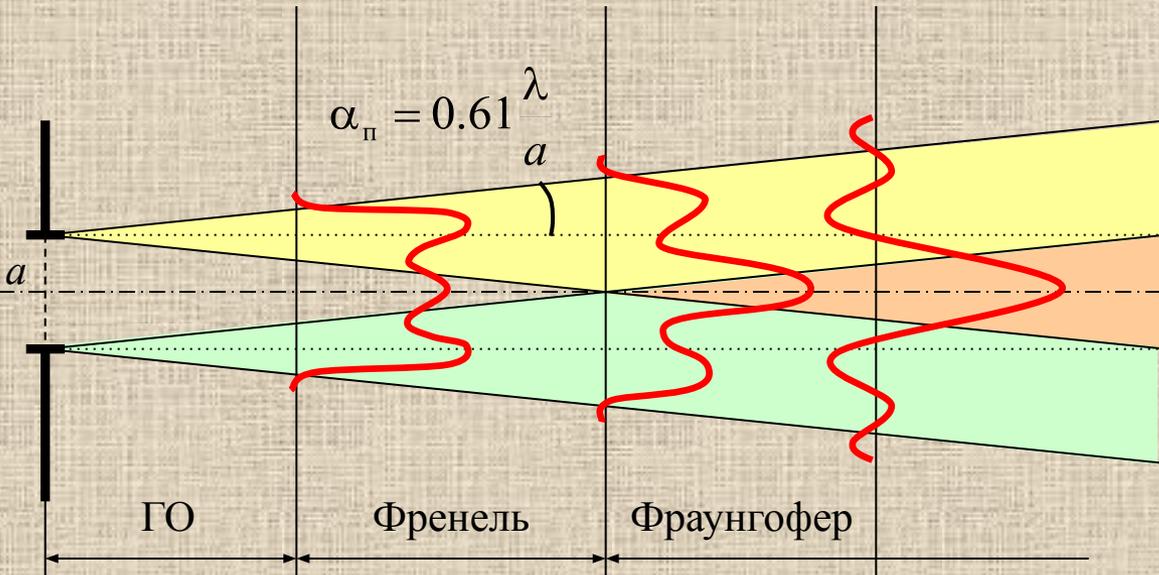
$$d[zJ_1(z)] = zJ_0(z)dz \Rightarrow U(z, \alpha) = \pi a^2 A \frac{2J_1(k\alpha a)}{k\alpha a}$$

$$k\alpha a_n = 3.83 \Rightarrow \alpha_n = 0.61 \frac{\lambda}{a}$$



- кружок рассеяния Airy

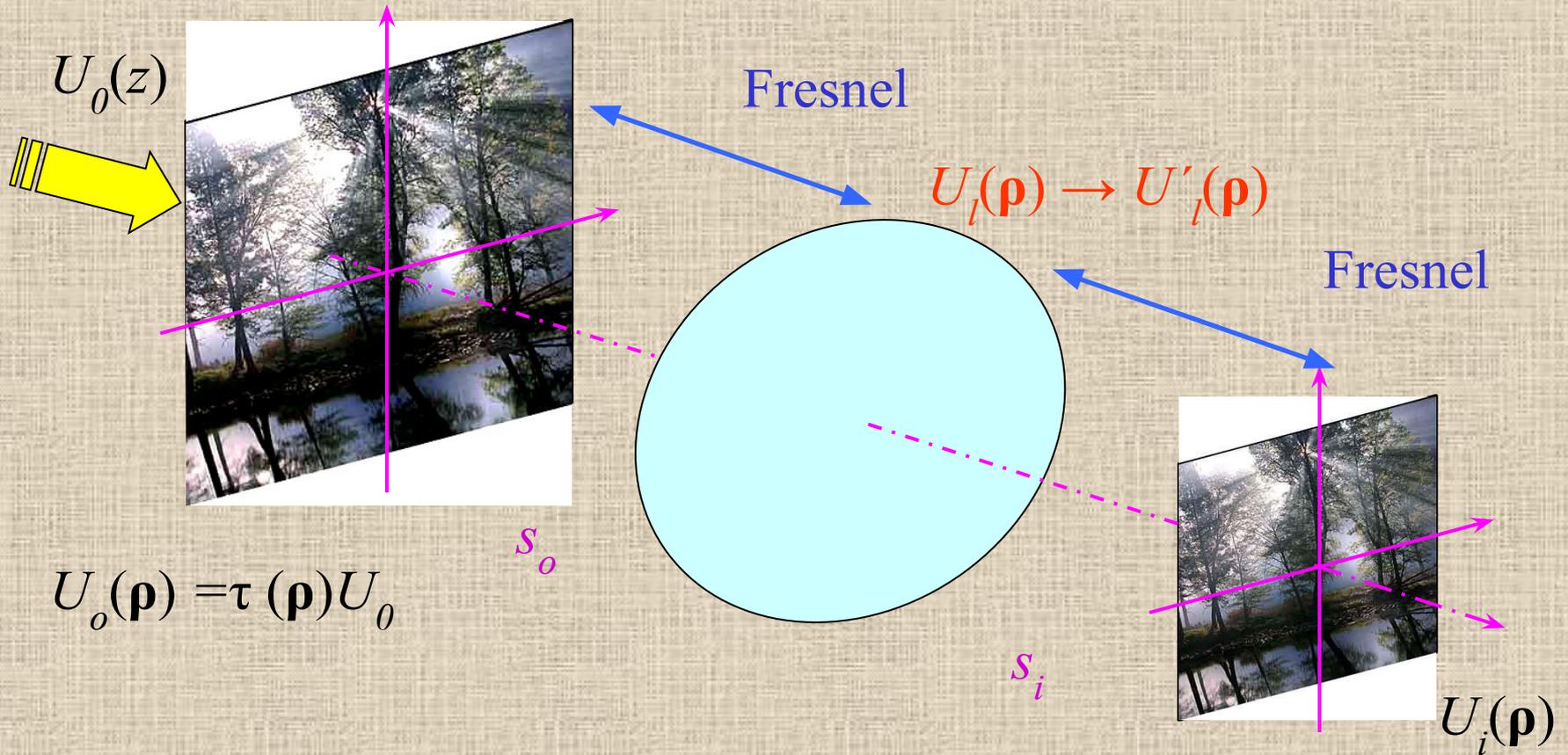
Общая картина электромагнитного поля



- пятно много меньше размера a , интенсивность по падающей волне – приближение ГО;
- пятно соизмерим с a , влияние соседних областей велико, интенсивность сильно изменяется с расстоянием – дифракция Fresnel;
- пятно много больше a , интенсивность мало зависит от расстояния – дифракция Fraunhofer.

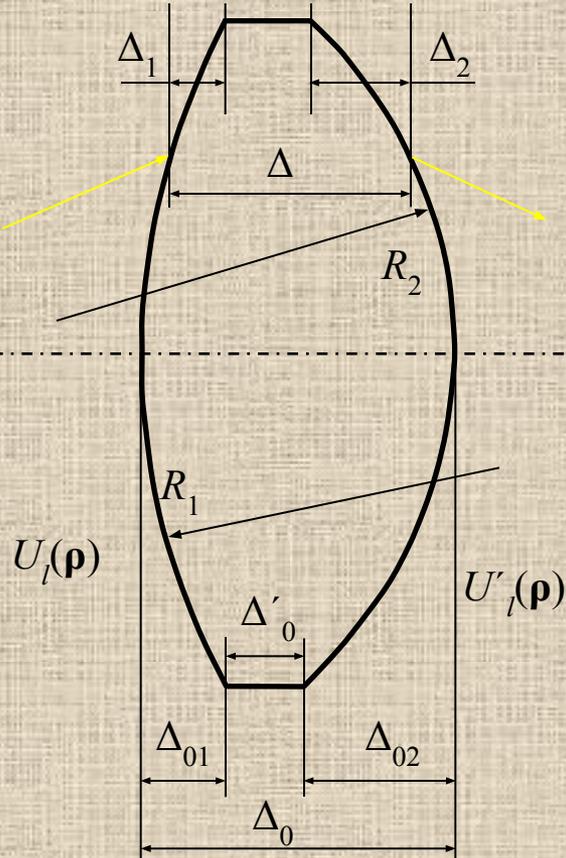
*Открыватель дифракции монах-иезуит Франческо Гримальди
(Grimaldi, 1618-1663)*

Поле в плоскости анализа ОС



Для анализа ОС дифракцию Fresnel можно считать точным решением скалярного волнового уравнения

Действие тонкой линзы



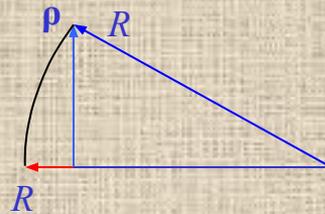
$$U'_t(\rho) = U_i(\rho) \cdot \tau(\rho), \quad \tau(\rho) = \Theta(\rho) \cdot \exp\{ik\varphi(\rho)\}$$

$$\text{Зрачковая функция: } \Theta(\rho) = \begin{cases} 1, & \rho \in \Sigma; \\ 0, & \rho \notin \Sigma. \end{cases}$$

Оптический путь луча в линзе $\varphi(\rho)$:

$$\varphi(\rho) = n\Delta(\rho) + (\Delta_0 - \Delta(\rho)) = \Delta_0 + (n - 1)\Delta(\rho)$$

$$\Delta(\rho) = \Delta_1 + \Delta'_0 + \Delta_2 = \left[\Delta_{01} - \left(R_1 - \sqrt{R_1^2 - \rho^2} \right) \right] + \left[\Delta_{02} + \left(R_2 - \sqrt{R_2^2 - \rho^2} \right) \right] + \Delta'_0 =$$



$$= \Delta_0 - R_1 \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{R_1} \right)^2} \right) + R_2 \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{R_2} \right)^2} \right)$$

Приближение параксиальной оптики: $\rho \gg R$

Параксиальная оптика

Аналогично приближению дифракции Fresnel – разложение в ряд Taylor сохранением 2 членов:

$$\sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{R}\right)^2} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{R}\right)^2 \quad \Delta(\rho) = \Delta_0 - \frac{\rho^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Откуда:
$$\varphi(\rho) = \Delta_0 + (n - 1) \left[\Delta_0 - \frac{\rho^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \right] = n\Delta_0 - \frac{\rho^2}{2} (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Заднее фокусное расстояние тонкой линзы:
$$\frac{1}{f'} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \Rightarrow \varphi(\rho) = n\Delta_0 - \frac{\rho^2}{2f'}$$

Действие тонкой линзы в параксиальном приближении сводится к множителю:

$$U'_l(\rho) = U_l(\rho)\Theta(\rho) \exp \left\{ ikn\Delta_0 - ik \frac{\rho^2}{2f'} \right\}$$

Тонкая линза в параксиальном приближении изменяет амплитуду падающей волны по зрачковой функции, а фазу - квадратично

Формирование изображения ОС

Поле на линзе – дифракция Fresnel:

$$U_l(\rho_1) = \frac{k e^{iks_o}}{2\pi i s_o} \int U_o(\rho) \exp\left\{ik \frac{(\rho - \rho_1)^2}{2s_o}\right\} d^2\rho$$

Поле после тонкой линзы:

$$U'_l(\rho_1) = U_l(\rho_1) \Theta(\rho_1) \exp\left\{ikn\Delta_0 - ik \frac{\rho_1^2}{2f'}\right\}$$

Поле на экране – дифракция Fresnel:

$$U_i(\rho_2) = \frac{k e^{iks_i}}{2\pi i s_i} \int U'_l(\rho_1) \exp\left\{ik \frac{(\rho_1 - \rho_2)^2}{2s_i}\right\} d^2\rho_1$$

Собирая все члены вместе получим:

$$U_i(\rho_2) = -\left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \frac{e^{ik(s_o+s_i+n\Delta_0)}}{s_i s_o} \iint U_o(\rho) \Theta(\rho_1) \exp\left\{\frac{ik}{2} \left[\frac{(\rho - \rho_1)^2}{s_o} - \frac{\rho_1^2}{f'} + \frac{(\rho_1 - \rho_2)^2}{s_i} \right]\right\} d^2\rho d^2\rho_1$$

Упрощение выражения возможно из анализа части подынтегрального выражения в квадратных скобках

Комплексная амплитуда в изображении

$$[\Delta] = \frac{(\rho - \rho_1)^2}{s_o} - \frac{\rho_1^2}{f'} + \frac{(\rho_1 - \rho_2)^2}{s_i} = \frac{\rho^2}{s_o} + \rho_1^2 \left(\frac{1}{s_o} - \frac{1}{f'} + \frac{1}{s_i} \right) + \frac{\rho_2^2}{s_i} + \rho_1 \left(\frac{\rho}{s_o} + \frac{\rho_2}{s_i} \right)$$

Плоскости объекта и изображения - сопряженные: $\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f'}$

Проведем замену переменных:

$$\rho_o = -\frac{\beta}{s_i} \rho = \frac{\rho}{s_o}, \quad \rho_i = \frac{\rho_2}{s_i}, \quad \rho_1' = \frac{\rho_1}{\lambda}, \quad d^2 \rho = \frac{s_i^2}{\beta^2} d^2 \rho_o, \quad d^2 \rho_1 = \lambda^2 d^2 \rho_1', \quad \beta = -\frac{s_i}{s_o}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

что приведет к выражению для поля комплексной амплитуды в изображении

$$U_i(\rho_i) = \frac{A}{\beta} \iint U_o(\rho_o) \Theta(\lambda \rho_1') \exp \{ i\pi \rho_o^2 - i2\pi \rho_1' (\rho_i - \rho_o) \} d^2 \rho_o d^2 \rho_1'$$

Допустим, что система является узкопольной и $\rho_o \rightarrow 0$. Тогда

$$U_i(\rho_i) = \frac{A}{\beta} \int U_o(\rho_o) \int \Theta(\lambda \rho_1') \exp \{ -i2\pi \rho_1' (\rho_i - \rho_o) \} d^2 \rho_1' d^2 \rho_o \equiv \int U_o(\rho_o) F(\rho_i - \rho_o) d^2 \rho_o$$

- т.е. интегралу свертки: тонкая линза в параксиальном приближении является линейной системой

Произвольная оптическая система

В случае оптической системы из многих компонент:

1. Учет aberrаций и конечной толщины изменит выражение для оптического пути в линзе $\varphi(\rho_1)$
2. Многолинзовость изменит соотношение сопряжения объекта и изображения

$$U_i(\rho_i) = \int U_o(\rho_o) P(\rho_o \rightarrow \rho_i) d^2 \rho_o$$

причем в общем случае

$$P(\rho_o \rightarrow \rho_i) = \frac{A}{\beta} \int \Theta(\lambda \rho_1') \exp \{ -i2\pi \rho_1' (\rho_i - \rho_o) + iW(\rho_1', \rho_o) \} d^2 \rho_1'$$

Произвольная ОС линейна относительно комплексной амплитуды