Целочисленное программирование

Под задачей целочисленного программирования (ЦП) понимается задача, в которой все или некоторые переменные должны принимать целые значения. В том случае, когда ограничения и целевая функция задачи представляют собой линейные зависимости, задачу называют **целочисленной задачей линейного программирования**. В противном случае, когда хотя бы одна зависимость будет нелинейной, это будет **целочисленной задачей нелинейного программирования**.

Способы решения задач целочисленного программирования:

- Округление до целого решений задачи ЛП или НЛП без условий целочисленности переменных
- Метод полного перебора (British museum technique – последовательный перебор всех вариантов с нахождением оптимума: число возможных решений любой целочисленной задачи является конечным)
- Методы с применением оптимизационных алгоритмов (например, метод ветвей и границ, МВГ)

Важно помнить, что методы решения целочисленных задач (перебор или МВГ) во многих случаях разумно применять только тогда, когда переменные принимают небольшие (<20) значения.

Метод ветвей и границ

Впервые **метод ветвей и границ** был предложен Ландом и Дойгом в 1960 году для решения общей задачи целочисленного линейного программирования (Land A.H., Doig A.G. An automatic method of solving discrete programming problems // Econometrica. V28, 1960).

<u>Алгоритм метода ветвей и границ</u> представляет собой эффективную процедуру перебора всех целочисленных допустимых решений.

1. Решается исходная задача ЛП при условии непрерывности переменных.
2. Если все корни решения нецелочисленны (в обратном случае – оптимальное целочисленное решение найдено), производим ветвление задачи на две, для каждой из задач вводим дополнительные ограничения по одной из переменных $x_i \le a_i$, $x_i \ge b_i$, где a_i – наибольшее целое, не превосходящее x_i, а b_i – наименьшее целое, большее x_i, например, при корне исходной задачи $x_2=2.3$ доп. ограничение в одной ветви будет $x_2 \le 2$, а по другой – $x_2 \ge 3$.
3. Снова решаются задачи в обеих ветвях с накладыванием последующих ограничений по другим переменным. На каждом шаге проверяется целочисленность корней.

   Ветку считают тупиковой, если:

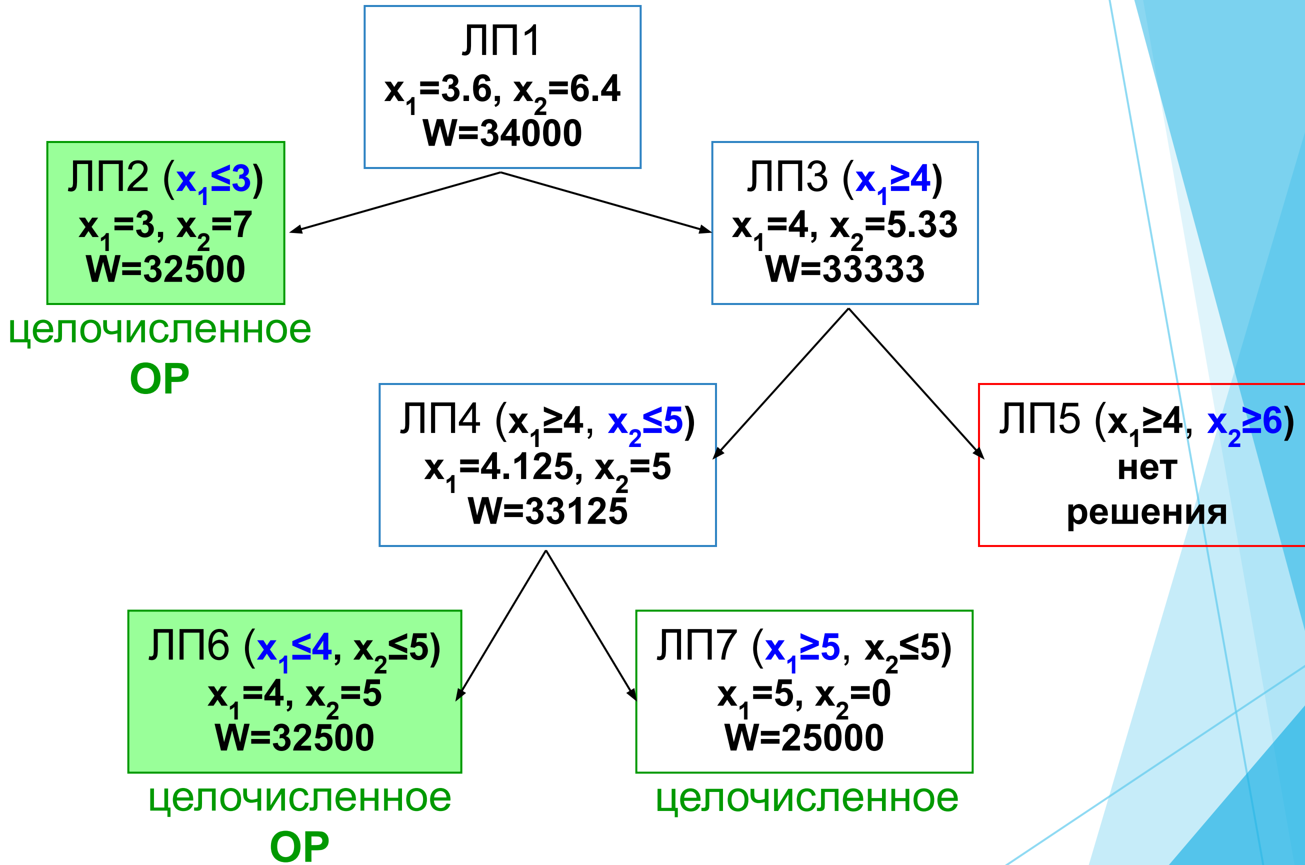
   а) допустимое решение очередной задачи ЛП отсутствует;

   б) текущее решение (значение целевой функции) хуже уже найденного целочисленного решения;

   в) текущая задача ЛП является подзадачей ранее рассчитанной задачи.

Метод ветвей и границ

Пример с оптимизацией побочного производства лесничества



Предыдущие ограничения по одной из переменных остаются в силе до их изменения при ветвлении.

Рекомендации

Рекомендации по формулировке и решению задач ЦП

I. Количество целочисленных переменных необходимо уменьшать насколько возможно. Например, целочисленные переменные, значения которых должно быть не менее 20, можно рассматривать как непрерывные.

II. В отличие от общих задач ЛП, добавление новых ограничений особенно включающих целочисленные переменные, обычно уменьшает время решения задач ЦП.

III. Если нет острой необходимости в нахождении точного оптимального целочисленного решения, отличающегося от непрерывного решения, например, 3%, тогда реализацию метода ветвей и границ для задачи максимизации можно заканчивать, если отношение разницы между верхней и нижней границ к верхней границы меньше 0,03.

$$(W_U-W_L)/W_U<3\%$$

Метод ветвей и границ можно также применять для решения задач нелинейного программирования.

Задача оптимизации раскроя

Пример о распиловке бревен
Из 50 шт. бревен длиной 6,5 м необходимо изготовить наибольшее число комплектов, в состав каждого из которых входит 2 шт. детали длиной 2 м и 3 шт. детали длиной 1,25 м.

1. Подход "в лоб", решение задачи на ЭВМ.

Показатель эффективности: количество (**К**) готовых комплектов из 50 бревен W=K □ max

Управляемые переменные: x_A и x_B – число деталей А и В, получаемых из заготовки

Ограничения:

по длине заготовки $2x_A + 1{,}25x_B \le 6{,}5$

по комплектности $50x_A - 2K \ge 0$; $50x_B - 3K \ge 0$;

(эти ограничения можно не учитывать)

областные ограничения $x_A \ge 0$, $x_B \ge 0$, $K \ge 0$ - целые

Расчет на ЭВМ дает $x_A=2$, $x_B=2$, K=33. Это означает, что если из одной заготовки выкраивать две 2 м детали А и две 1,25 м детали В, то максимальное количество комплектов будет 33.

Задача оптимизации раскроя

2. ЛПР принимает несколько вариантов раскроя, задача решается с использованием ЭВМ.

Сырье может раскраиваться на заготовки различными способами - вариантами (картами) раскроя, которые сводятся в специальную таблицу (в нашем примере существует 4 варианта распиловки).

Длина заготовки, м.	Варианты раскроя				Число деталей в комплекте
	1	2	3	4	
2	3	2	1	0	2
1.25	0	2	3	5	3
отходы	0.5	0	0.75	0.25	
Число заготовок	x1	x2	x3	x4	

В качестве **показателя эффективности** целесообразно взять число комплектов **K**, которое можно получить из заданного числа заготовок (50 бревен). Возможны другие постановки - взять число заготовок Z, которое необходимо иметь, чтобы получить заданное число комплектов или отходы O.

Задача оптимизации раскроя

Длина заготовки, м.	Варианты раскроя				Число деталей в комплекте
	1	2	3	4	
2	3	2	1	0	2
1.25	0	2	3	5	3
отходы	0.5	0	0.75	0.25	
Число заготовок	x1	x2	x3	x4	

Управляемые переменные:

$\mathbf{x}_n$ - число заготовок, раскраиваемых по n варианту.

Целевая функция:

$W_1=K \ \square\ \max$ или

$W_1=O=0.5x_1+0x_2+0.75x_3+0.25x_4 \ \square\ \min$

Ограничения:

по числу заготовок $x_1+x_2+x_3+x_4=50$

по комплектности $3x_1+2x_2+x_3-2K\geq 0$

$2x_2+3x_3+5x_4-3K\geq 0$

областные ограничения $x_1,x_2,x_3,x_4,K\geq 0$ - целые

Задача оптимизации раскроя

Решения, полученные на ЭВМ.

Переменная	Решения				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
x1	0	0	0	1	0
x2	41	41	42	40	40
x3	0	1	0	1	2
x4	9	8	8	8	8
K	41	41	41	41	41

Из таблицы видно, что существует пять равноценных вариантов раскроя, которые приводят к получению 41 комплекта из 50 заготовок. Если данный результат сравнить с результатом, полученном в первом случае (33 комплекта из тех же самых 50 заготовок), то получаем выигрыш в 8 комплектов.

ЛПР может выбрать какой-нибудь из предложенных вариантов распиловки, например, на основании предпочтений по длине отходов.

Разместить в приборном отсеке ракеты приборы двух типов, каждый из которых весит 2 кГ, но один из них трехфункциональный, а другой – двух функциональный; при этом, учитывая ограничение по общему весу в 7 кг, добиться максимальной эффективности приборов.

Решение.

Математическая формулировка задачи выглядит следующим образом.

Максимизировать ЦФ , $f(x) = 6 \cdot V^{\frac{2}{3}}$,

при ограничениях: $x_1 \le 2$; $x_2 \le 2$; $x_1 + x_2 \le 3{,}5$

где - целочисленные. $x_1, x_2 \ge 0$

Начальный шаг решения этой задачи состоит в нахождении решения задачи целочисленного программирования (ЦП), получаемой при отбрасывании условий целочисленности и . Обозначим эту задачу через ЛП-1, решение которой представлено на рис. 3.7.

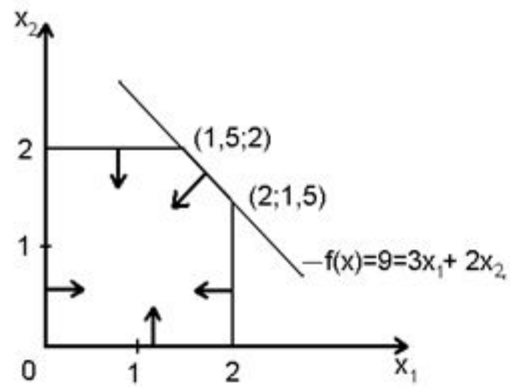


Рис. 3.7. Решение ЛП - 1.

$x_1 = 2$; $x_2 = 1{,}5$; *f(x) = 9*, поэтому найденное решение не может быть оптимальным, целочисленным.

Найденное значение *f (x)* представляет собой верхнюю границу истинного оптимального целочисленного значения, поскольку при выполнении условия целочисленности x_2 значение *f(x)* может только уменьшится.

Следующий шаг метода заключается в просмотре целочисленных значений x_2, больших или меньших 1,5. Это делается путём добавления к задаче ЛП-1 либо ограничения $x_2 \le 1$, либо. Таким $x_2 \ge 1$ образом, из задачи ЛП-1 получаются две задачи следующего вида ЛП-2 и ЛП-3, представленные соответственно на рис. 3.8 и 3.9.

В этих задачах наряду с первоначальным условием соответственно добавлены:

для ЛП - 2 новое ограничение , $x_2 \le 1$.

для ЛП - 2 новое ограничение $x_2 \ge 2$, поэтому допустимая область в этом случае представляет собой просто отрезок АВ.

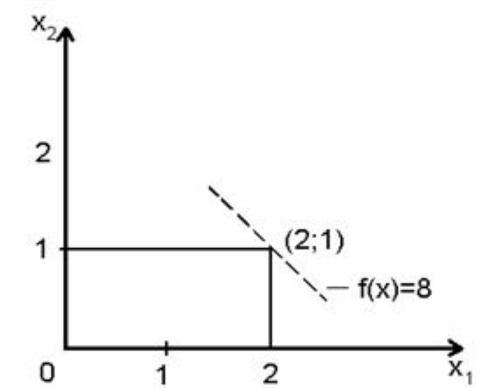


Рис. 3.8. Решение ЛП - 2.

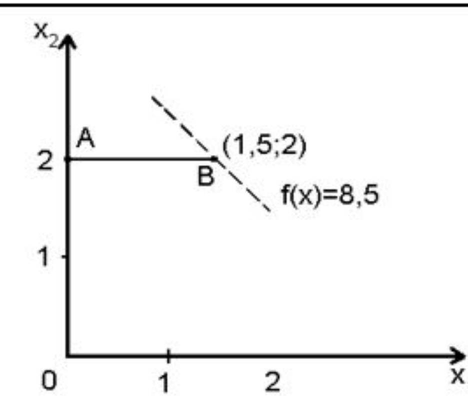


Рис. 3.9. Решение ЛП - 3.

Изображённые допустимые области задач ЛП-2 и ЛП-3 обладают следующими свойствами.

1. Оптимальное решение задачи ЛП-1 ($x_1 = 2;\ x_2 = 1{,}5$) недопустимо для обеих задач ЛП-2 иЛП-3. Таким образом, это решение не повторится.
2. Любое целочисленное (допустимое) решение исходной задачи допустимо для задачи ЛП-2 или ЛП-3. Таким образом, при введении этих задач не происходит потери допустимых (целочисленных) решений исходной задачи.
3. Оптимальное решение задачи ЛП-2 - точка $x_1 = 2;\ x_2 = 1$, $f(x) = 8$. Следовательно, значение $f(x) = 8$ представляет собой нижнюю границу максимального значения $f(x)$ для смешанной задачи ЦЛП. Поскольку ранее была получена лишь верхняя граница, равная 9, нельзя утверждать, что решение ЛП-2 оптимально для исходной задачи. Следовательно, необходимо рассмотреть задачу ЛП-3. Однако её решение недопустимо для исходной задачи ЦЛП, поскольку $x_1 = 1{,}5$, но при этом $f(x) = 8{,}5$. Поэтому необходимо проверить существование в допустимой области ЛП-3 целочисленного решения, дающего значение $f(x) \geq 8$. Для этого рассматриваются задачи ЛП-4 и ЛП-5, получающиеся при добавлении к ЛП-3 ограничений $x_1 \leq 1$ и $x_1 \geq 2$ соответственно.

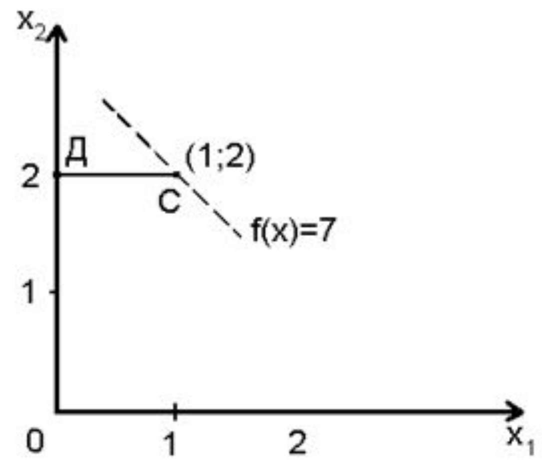


Рис. 3.10. Решение ЛП - 4.

Допустимая область задачи ЛП-4 состоит из отрезка ДС, показанного на рис. 3.10, задача ЛП-5 не имеет допустимых решений. Итак, точка $x_1 = 2;\ x_2 = 1$, из задачи ЛП-2 представляет собой оптимальное целочисленное решение исходной задачи, так как $f(x) = 8$, т.е. больше $f(x)$ из ЛП-4.