Омский государственный технический университет

Кафедра физики

Калистратова Л.Ф.

Электронные лекции по разделам классической и релятивистской механики

6 лекций

(12 аудиторных часов)

Раздел 1.
Классическая механика

Темы лекций

1. Кинематика поступательного движения.
2. Кинематика вращательного движения.
3. Динамика поступательного движения.
4. Динамика вращательного движения.
5. Работа, энергия.
6. Законы сохранения.

Тема 1. Кинематика поступательного движения

План лекции

1.1. Основные понятия кинематики

1.2. Перемещение, скорость, ускорение.

1.3. Обратная задача кинематики.

1.4. Тангенциальное и нормальное ускорения.

1.1. Основные понятия кинематики

Механическое движение – это **процесс перемещения тел или их частей относительно друг друга.**

Механическое, как и всякое другое, движение происходит в пространстве и времени.

Пространство и время – сложнейшие физические и философские категории.

В ходе развития **физики и философии** эти понятия претерпели существенные изменения.

Классическую механику создал И. Ньютон.

Он постулировал, что **время и пространство абсолютны.**

Абсолютное пространство и абсолютное время **не взаимосвязаны.**

Классическая механика приписывает абсолютному пространству и абсолютному времени вполне **определенные свойства.**

Абсолютное пространство

- **трехмерно** (имеет три измерения),
- **непрерывно** (его точки могут быть сколь угодно близки друг к другу),
- **эвклидово** (его геометрия описывается геометрией Эвклида),
- **однородно** (в нем нет привилегированных точек),
- **изотропно** (в нем нет привилегированных направлений).

Абсолютное время

- **одномерно** (имеет одно измерение);
- **непрерывно** (два его мгновения могут быть сколь угодно близки друг к другу);
- **однородно** (в нем нет привилегированных мгновений);
- **анизотропно** (течет только в одном направлении).

В начале XX века классическая механика подверглась кардинальному пересмотру.

В результате были созданы величайшие теории нашего времени – **теория относительности и квантовая механика.**

Теория относительности (релятивистская механика) описывает движение макроскопических тел, когда их скорость соизмерима со скоростью света.

Квантовая механика описывает движение микрообъектов.

Теория относительности установила следующие положения о пространстве и времени.

Пространство и время:

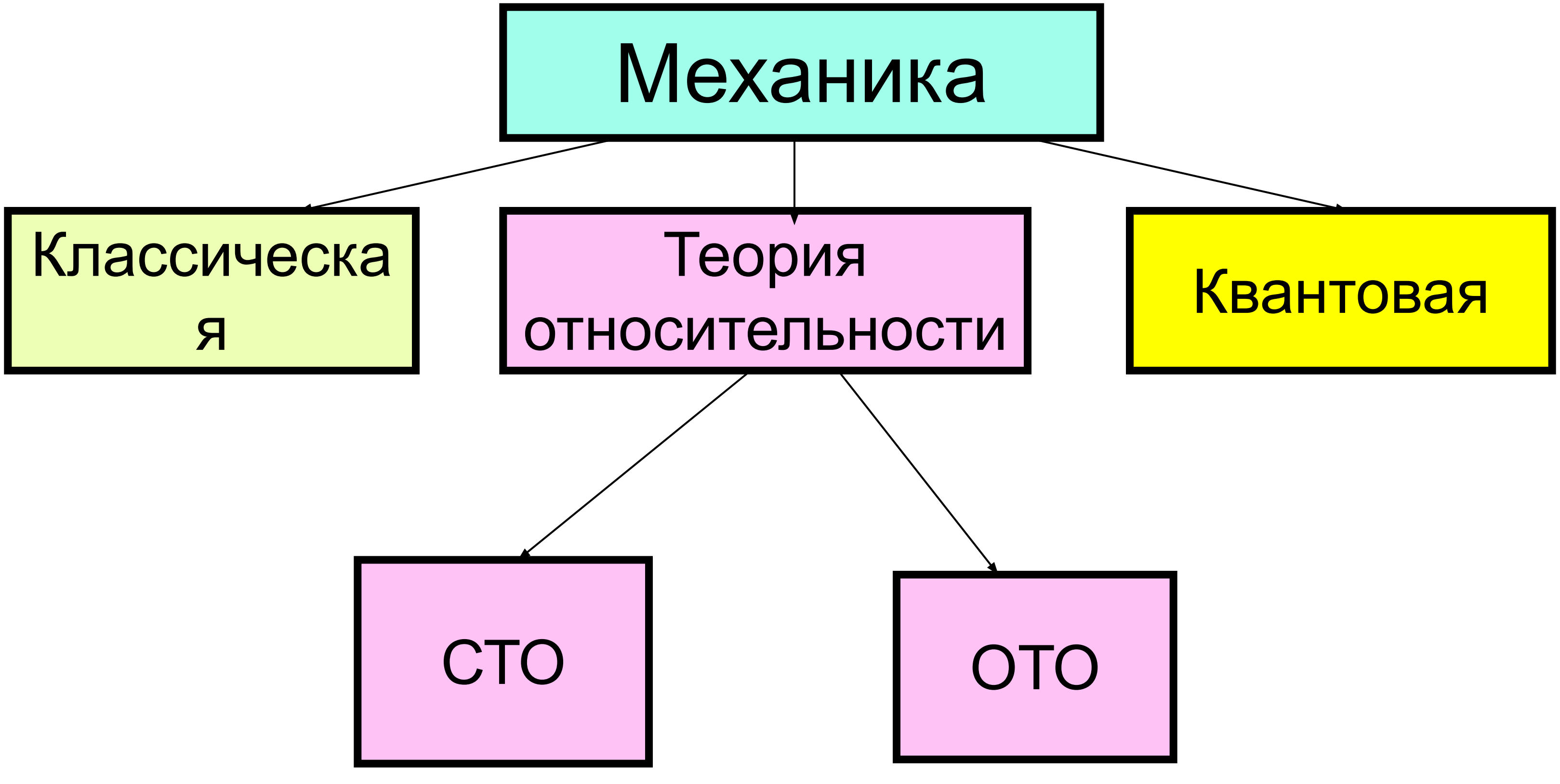
- **не являются самостоятельными объектами;**

– **это формы существования материи;**

- **имеют не абсолютный, а относительный характер;**

- **неотделимы друг от друга;**

- **неотделимы от материи и её движения.**


Механика
Классическа
я
Теория
относительности
Квантовая
СТО
ОТО

Классическая механика изучает макроскопические тела, движущиеся с малыми скоростями.

Специальная теория относительности изучает макроскопические тела, движущиеся с большими скоростями (порядка $C = 3\ 10^{8}$ м/с) в **инерциальных системах отсчёта.**

Общая теория относительности изучает макроскопические тела, движущиеся с большими скоростями в **неинерциальных** системах отсчёта.

Квантовая механика изучает микроскопические тела (микрочастицы), движущиеся с большими, но нерелятивистскими скоростями.

Механика состоит из трех разделов – **кинематики, динамики и статики.**

Кинематика изучает виды движений.

Динамика изучает причины, вызывающие тот или иной вид движения.

Статика изучает условия равновесия тел.

Основные понятия механики

Движение – изменение положения тел друг относительно друга.

Тело отсчёта - тело, по отношению к которому определяется положение других тел.

Система отсчёта - система декартовых координат, связанная с телом отсчета и прибором для отсчета времени.

Материальная точка – это тело, формой и размерами которого в данной задаче можно пренебречь.

Абсолютно твердое тело – это тело, деформациями которого в данной задаче можно пренебречь.

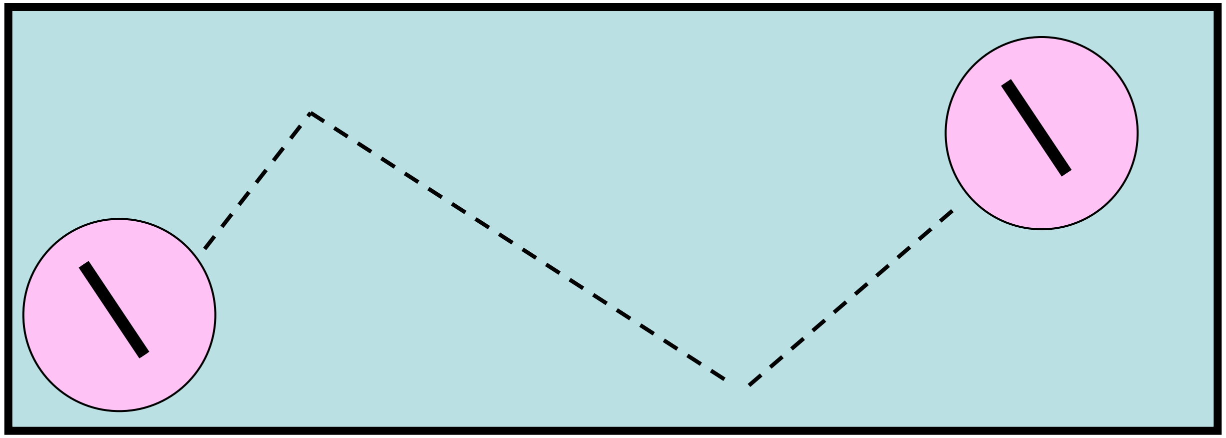
1.2. Перемещение, скорость, ускорение

Описать движение материальной точки – значит знать её положение относительно выбранной системы отсчёта в любой момент времени.

Для решения этой задачи надо иметь **эталон длины** (например, линейку) и **прибор для измерения времени** – часы.

Выберем тело отсчёта и свяжем с ним прямоугольную систему координат.

Поступательным движением твёрдого тела называется движение, **при котором любая прямая, проведённая в теле, остаётся параллельной самой себе.**

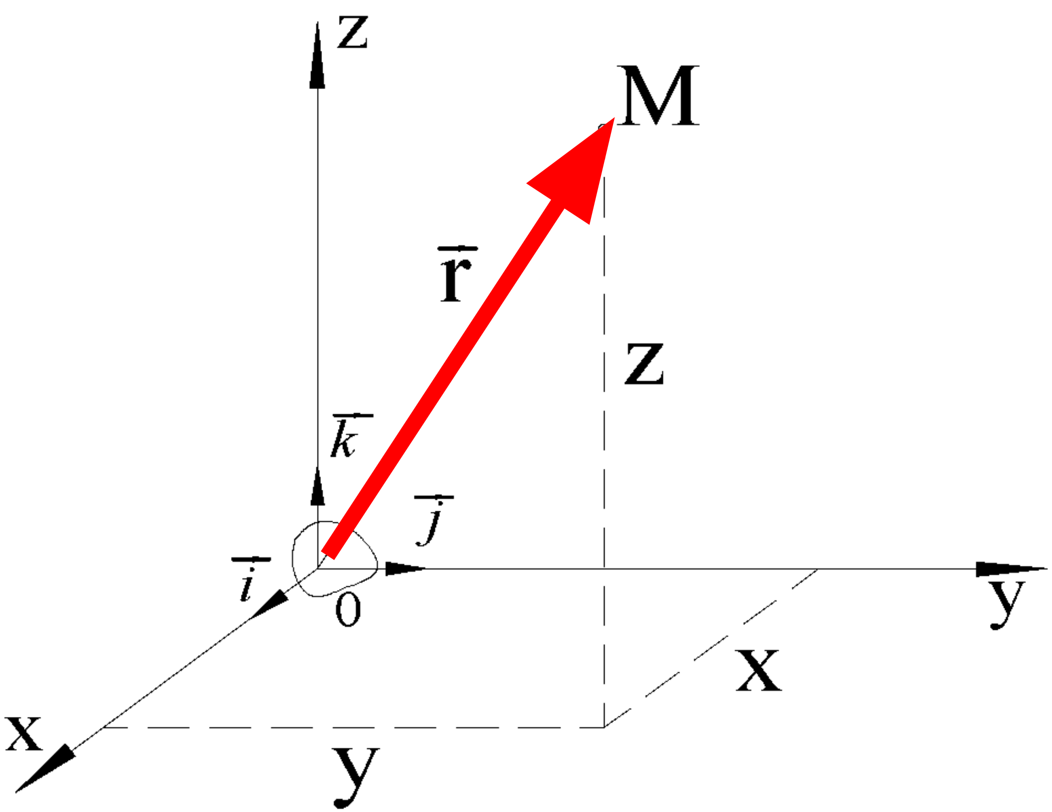


При **поступательном движении** все точки тела движутся одинаково.

Движение тела можно охарактеризовать движением одной точки - движением **центра масс тела**.

Перемещение

Радиус-вектор $\vec{r}$ - **соединяет движущуюся материальную точку (М) с центром координат** и задаёт положение этой точки в системе координат.



Спроецируем радиус-вектор $\vec{r}$ на оси координат:

$$\vec{r} = r_X\vec{i} + r_{\acute{o}}\vec{j} + r_Z\vec{k}$$

$$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$$

- орты осей X,У,Z (единичные векторы направлений)

Модуль радиус-вектора равен: $|\vec{r}| = r$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$r_x = x$$

$$r_y = y$$

– **проекции радиус-вектора** $\vec{r}$ на соответствующие оси.

$$r_z = z$$

X, У, Z называются **декартовыми координатами** материальной точки.

Траекторией называется линия:

- **которую описывает конец радиус-вектора материальной точки при её движении;**
- **по которой движется тело.**

По виду траектории движения делятся на:

- **прямолинейное;**
- **криволинейное;**
- **по окружности.**

Законом движения материальной точки **называется уравнение, выражающее зависимость её радиус-вектора от времени**:

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Скалярная форма закона движения получила название **кинематических уравнений движения:**

$$x = f(t)$$

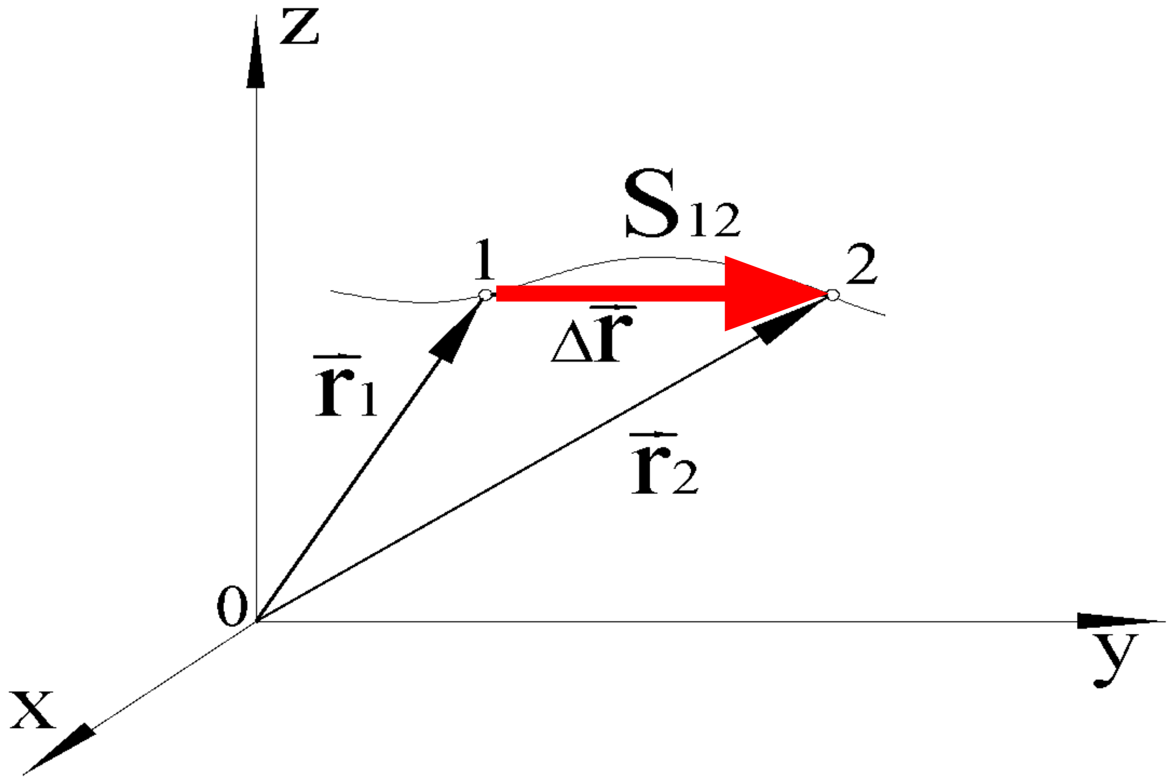
$$y = f(t)$$

$$z = f(t)$$

Исключив из этой системы уравнений параметр времени t , получим **уравнение траектории**: **У = f(Х)**

Для конечных промежутков времени Δt: $\Delta t = t_2 - t_1$

Вектор перемещения $\Delta\vec{r}$ **соединяет начальную и конечную точки перемещения,** пройденного телом за время $\Delta t = t_2 - t_1$.



$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$ - приращение (изменение) радиус – вектора.

Модуль вектора перемещения $|\Delta \vec{r}|$ называется **перемещением.**

Путь - **расстояние (S_{12}), пройденное по траектории.**

Перемещение и путь – величины скалярные и положительные.

Для конечных промежутков времени Δ**t** **перемещение не равно** пройденному **пути**:

$$|\Delta \vec{r}| \neq S$$

Для бесконечно малого промежутка времени **dt**:

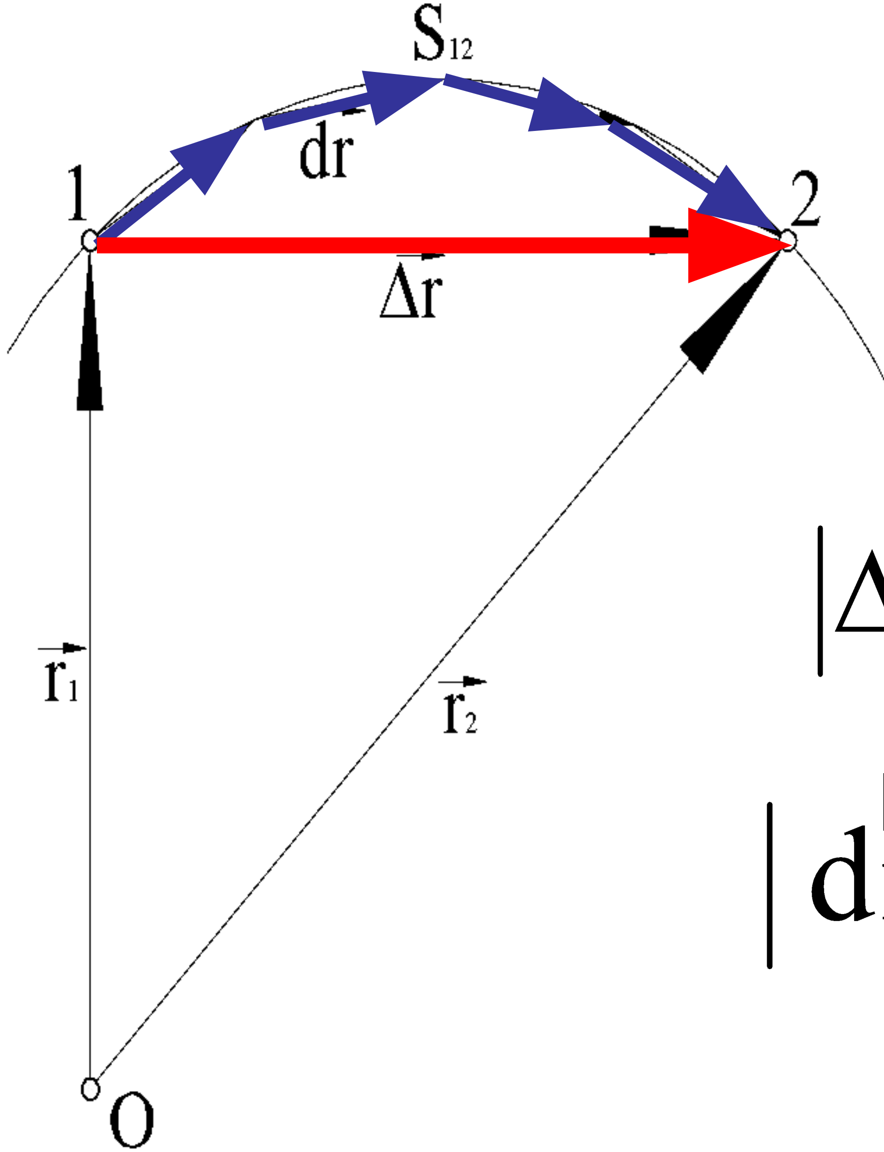
$d\vec{r}$ - **вектор элементарного перемещения**;

$|d\vec{r}|$ - **элементарное перемещение;**

dS - **элементарный путь**.

Для бесконечно малых промежутков времени **элементарное перемещение равно элементарному пути:**

$$|d\vec{r}| = dr = dS$$



$$\left|\Delta \vec{r}\right| \neq S$$

$$\left|\mathrm{d}\vec{r}\right| = dS$$

Вектор перемещения получим, просуммировав векторы элементарных перемещений:

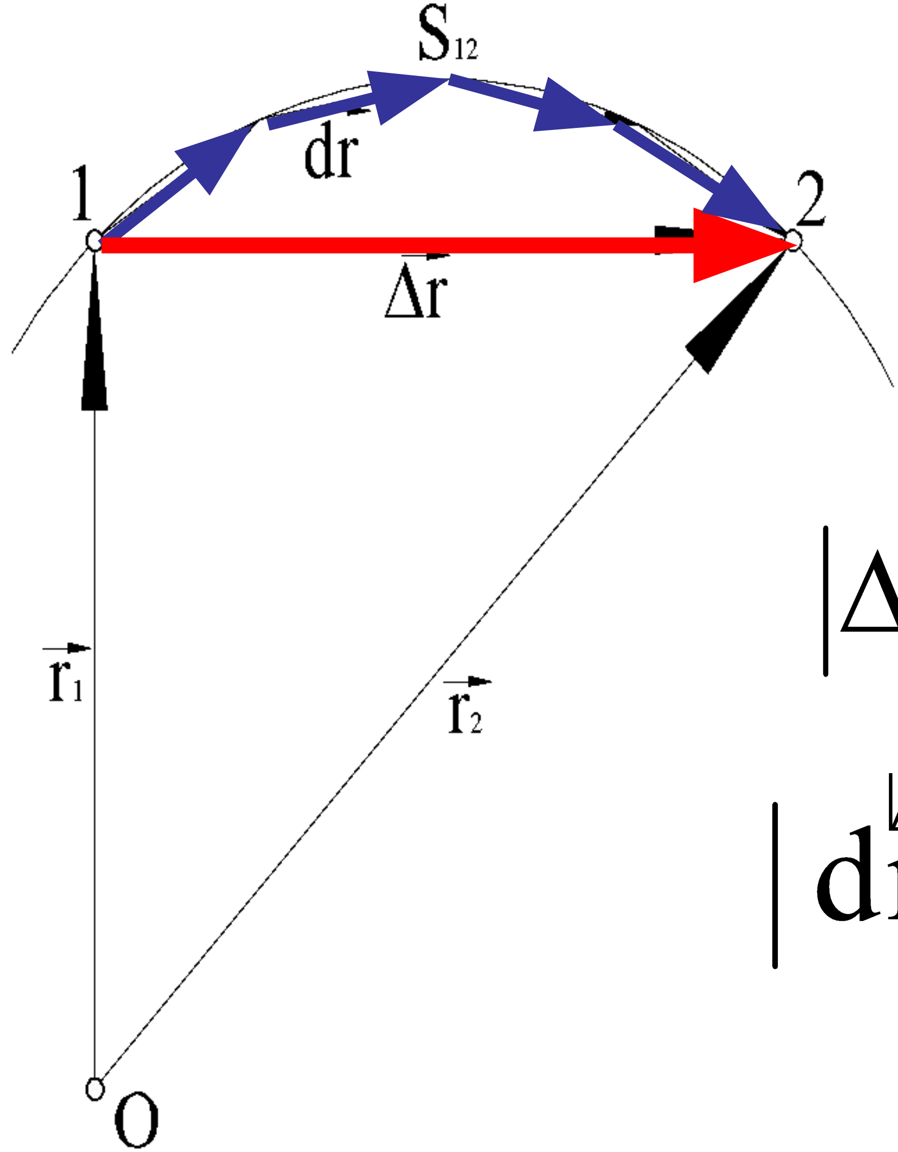
$$\Delta\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r}$$

Перемещение получим, просуммировав элементарные перемещения:

$$|\Delta\vec{r}| = \Delta r = \int |d\vec{r}|$$

Путь получим интегрированием (суммированием) элементарных путей или равнозначно модулей элементарных перемещений:

$$S_{12} = \int dS = \int dr$$



$$\left|\Delta \vec{r}\right| \neq S$$

$$\left|\,d\vec{r}\,\right| = dS$$

Скорость

- равна перемещению, совершенному материальной точкой за единицу времени;

- характеризует быстроту изменения пространственного положения материальной точки;

- измеряется в м/с;

- является векторной величиной;

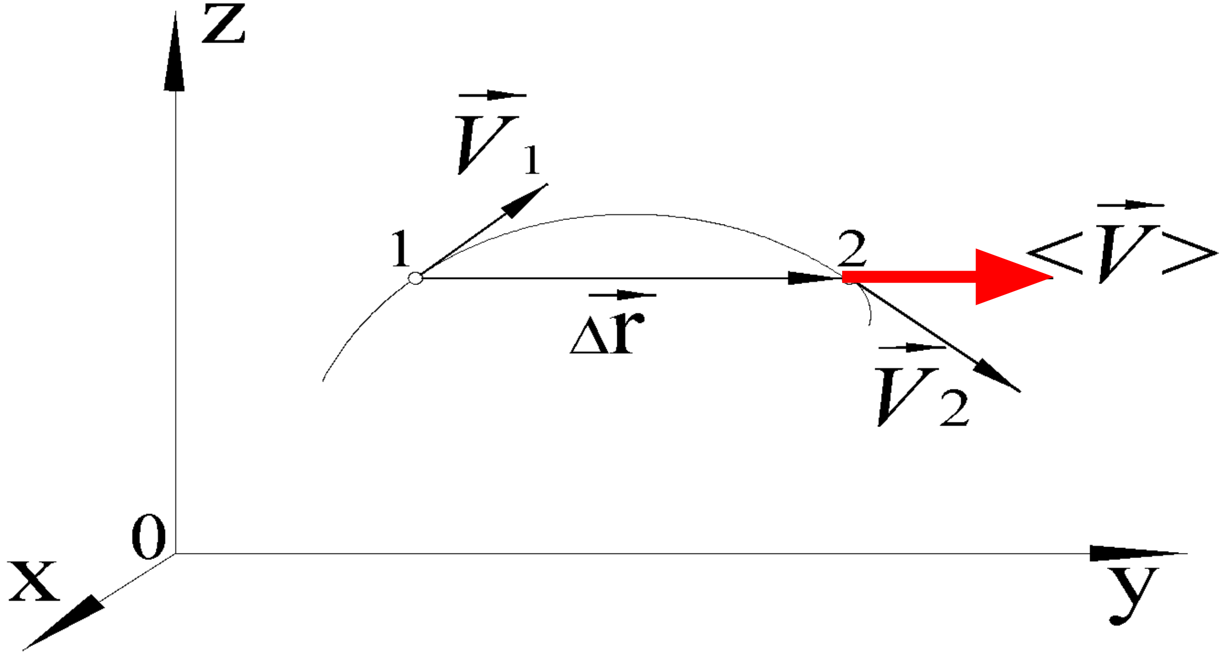
- различают среднюю и мгновенную.

Вектор средней скорости за промежуток времени Δt:

- определяется как

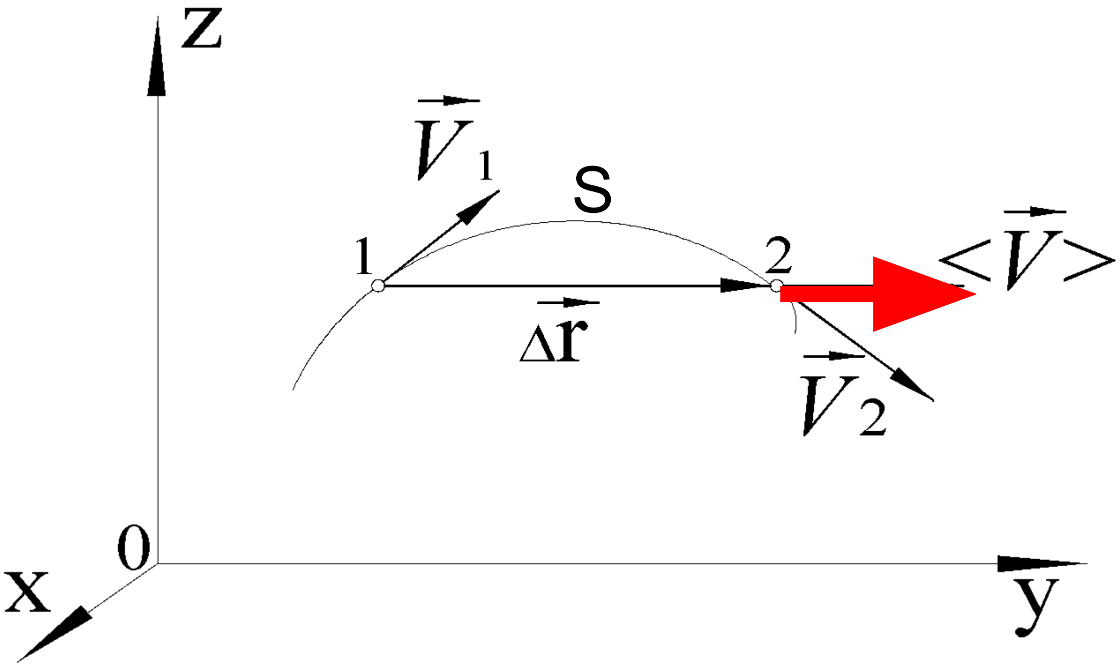
$$\langle \vec{V} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

- направлен вдоль вектора перемещения $\Delta \vec{r}$.

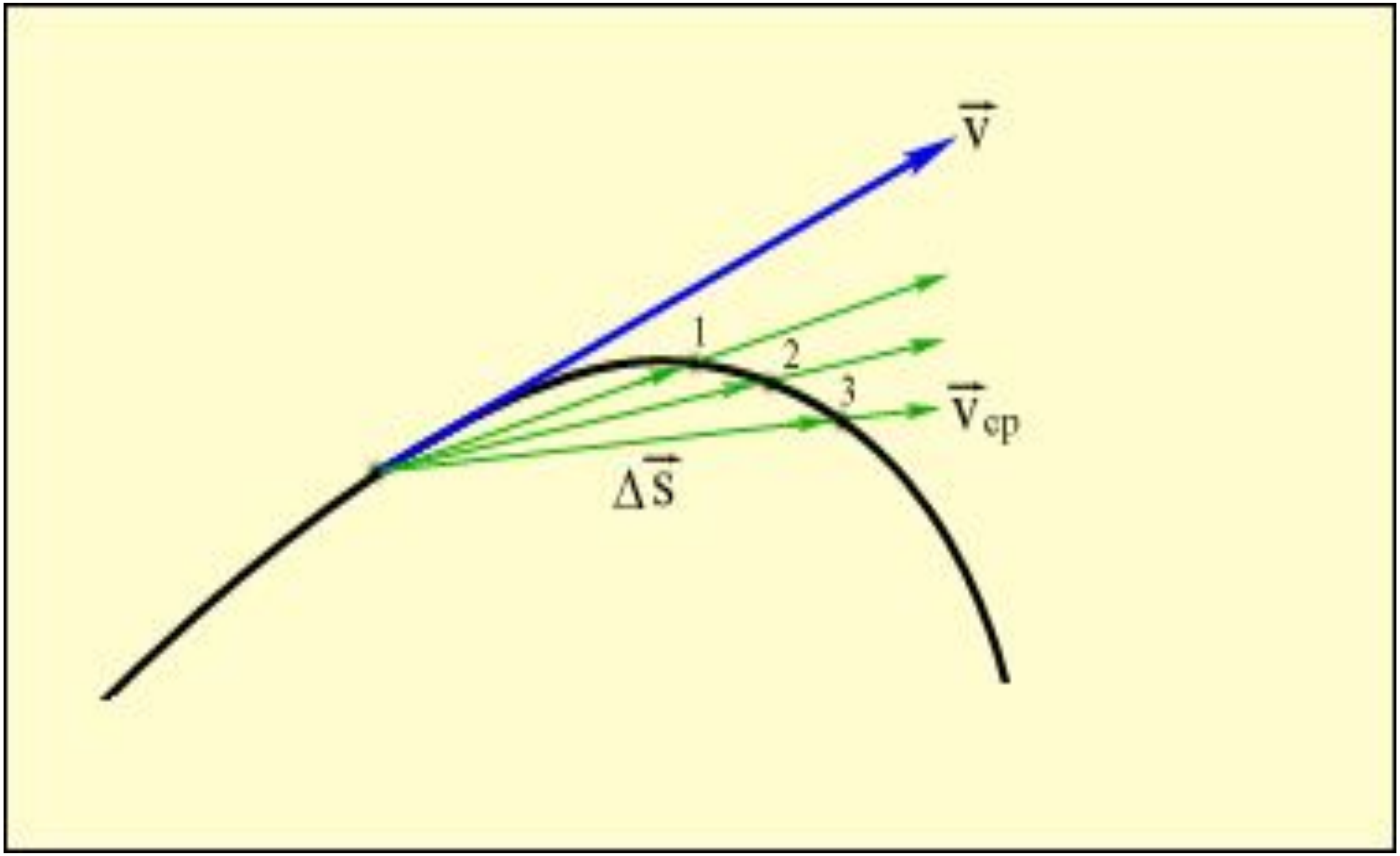


Модуль средней скорости определяется как

$$\left|\left\langle \vec{V} \right\rangle\right| = \frac{S}{\Delta t}$$



При движении тела **средняя скорость** изменяет направление и величину.



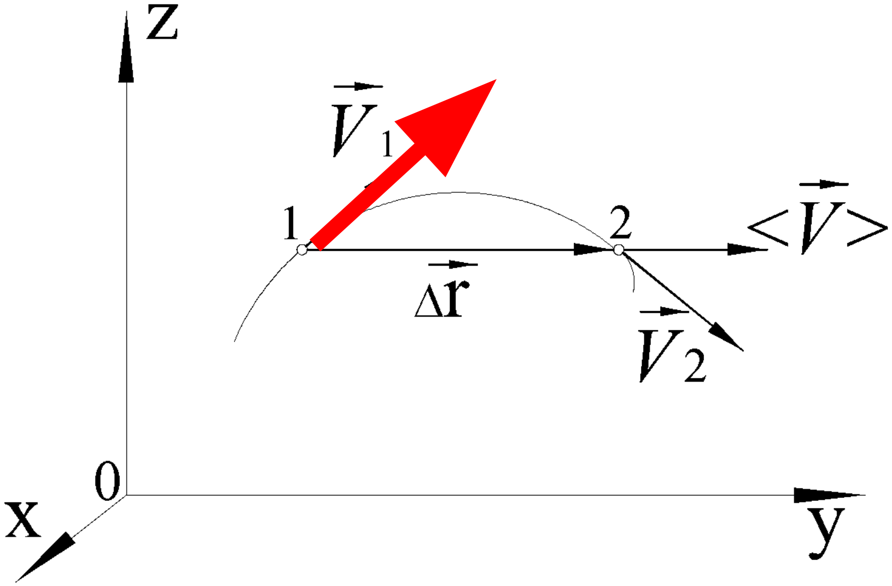
Мгновенная скорость равна пределу, к которому стремится вектор средней скорости при неограниченном убывании промежутка времени до нуля ($\Delta t \to 0$).

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Мгновенная скорость равна первой производной от радиус-вектора по времени.

Вектор мгновенной скорости $\vec{V}$ **направлен по вектору** $d\vec{r}$**, т. е. по касательной к траектории.**



Модуль мгновенной скорости равен первой производной от пути по времени:

$$\left|\vec{V}\right| = V = \frac{\left|d\vec{r}\right|}{dt} = \frac{dS}{dt}$$

Проекции скорости на координатные оси **равны первым производным от соответствующих координат по времени:**

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt}$$

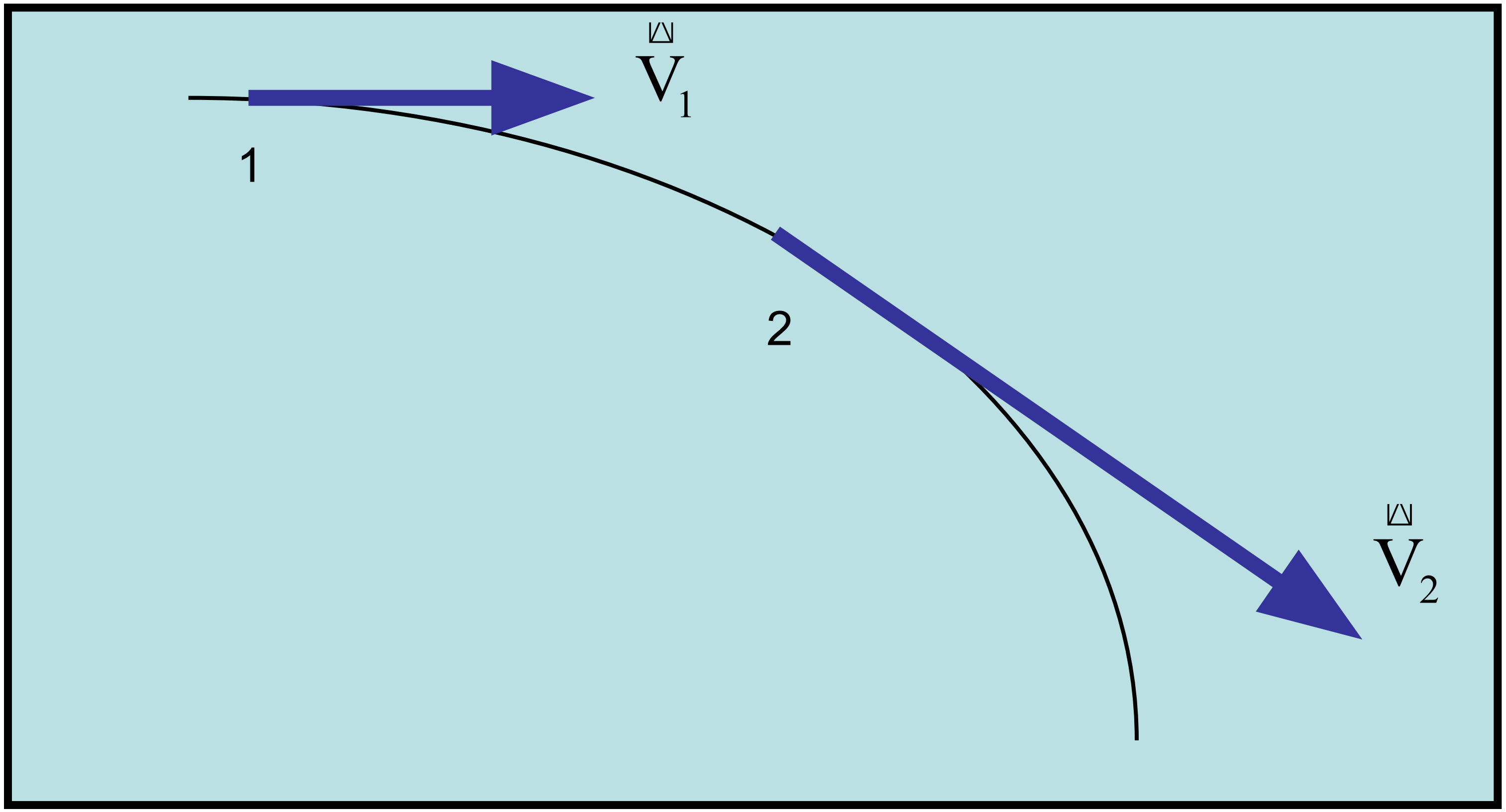
$$v_z = \frac{dz}{dt}$$

Вектор мгновенной скорости $\vec{v}$ и его модуль v через проекции скорости v_x, v_y, v_z записываются как:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

В процессе движения материальной точки модуль и направление её скорости в общем случае изменяются.



Ускорение

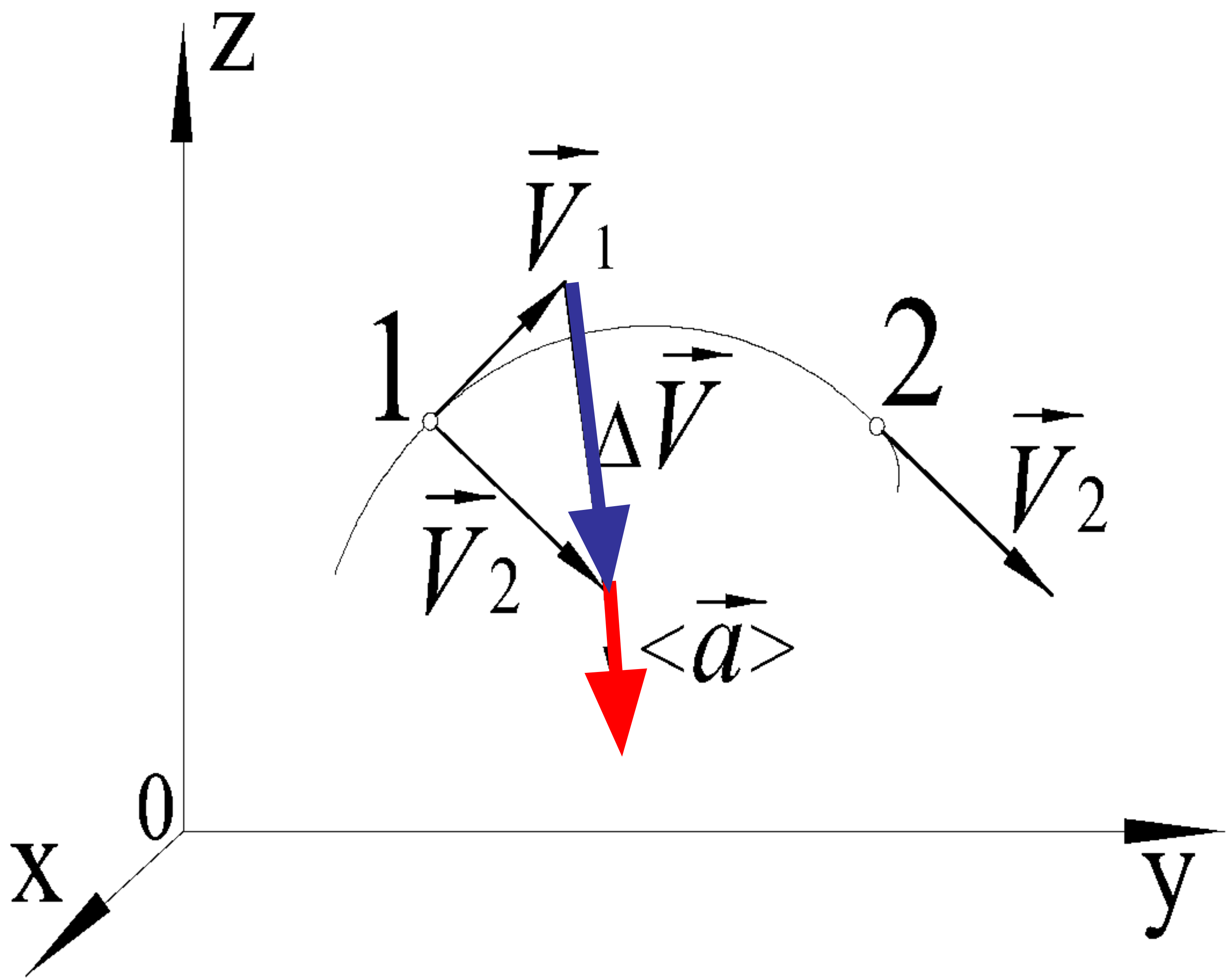
- равно изменению скорости за единицу времени;

- характеризует быстроту изменения скорости с течением времени;

- измеряется в $м/с^2$;

- является векторной величиной;

- различают среднее и мгновенное.


z
$\vec{V}_1$
1
2
$\Delta\vec{V}$
$\vec{V}_2$
$\vec{V}_2$
$<\vec{a}>$
0
x
y

Вектор среднего ускорения за промежуток времени Δt определяется как

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$$

,

где $\Delta \vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$

– приращение (изменение) скорости за время Δt.

Вектор среднего ускорения $\langle \vec{a} \rangle$ направлен по вектору $\Delta \vec{V}$.

Мгновенное ускорение равно пределу, к которому стремится среднее ускорение при неограниченном убывании промежутка времени до нуля ($\Delta t \to 0$).

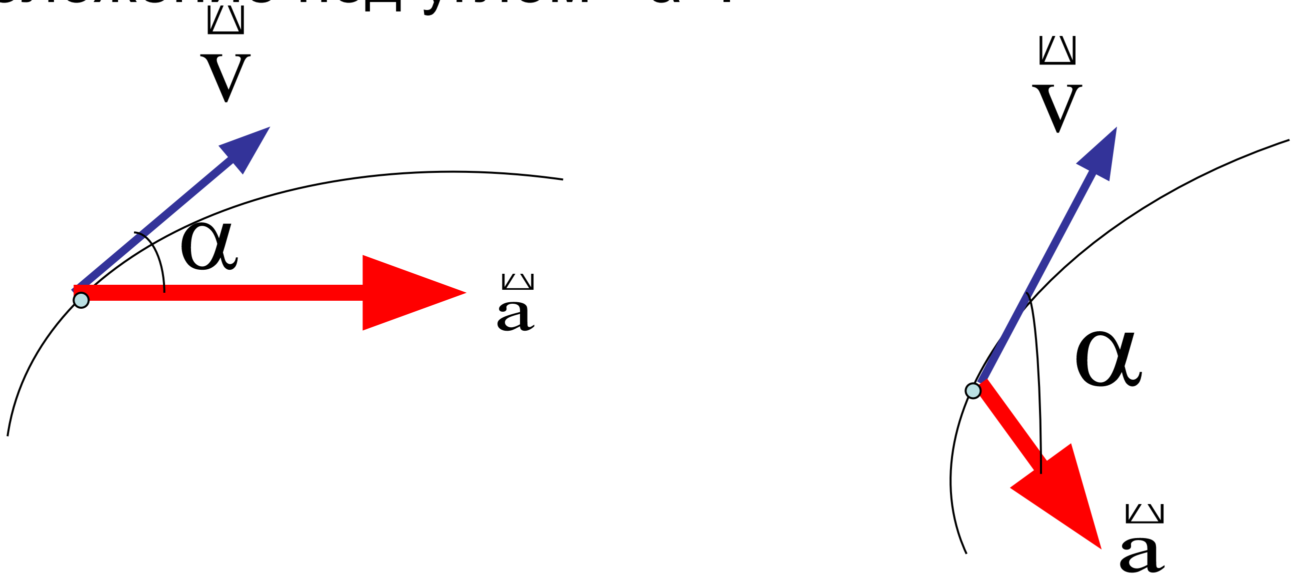
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} \qquad \vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Мгновенное ускорение равно:

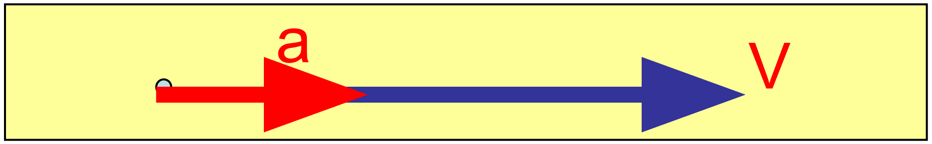
- первой производной от мгновенной скорости по времени;
- второй производной от радиус-вектора по времени.

Вектор мгновенного ускорения по отношению к вектору мгновенной скорости может занять любое положение под углом α .



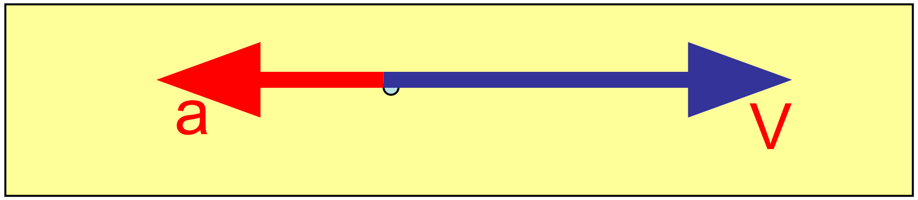
Если угол α - **острый**, то движение материальной точки будет являться **ускоренным**.

В пределе острый **угол равен нулю.** В этом случае движение является **равноускоренным**.



Если угол α - **тупой**, то движение точки будет **замедленным.**

В пределе тупой **угол равен 180** ^{o}. В этом случае движения будет **равнозамедленным.**



Проекции вектора ускорения на координатные оси **равны первым производным от соответствующих проекций скорости на эти же оси**:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

Вектор мгновенного ускорения $\vec{a}$ и его модуль **a** **через проекции** можно записать как

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

1.3. Обратная задача кинематики

В рамках кинематики решаются две основные задачи: **прямая** и **обратная.**

При решении **прямой задачи** по известному закону движения

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

в любой момент времени находятся все остальные кинематические характеристики материальной точки:

путь, перемещение, скорость, ускорение.

При решении **обратной задачи** по известной зависимости ускорения от времени $\vec{a} = \vec{a}(t)$

в любой момент времени находят скорость и положение материальной точки на траектории.

Для решения обратной задачи нужно задать в некоторый начальный момент времени t_0

начальные условия:

- радиус-вектор $\vec{r}_0$;
- скорость точки $\vec{v}_0$.

Из определения ускорения имеем

$$d\vec{V} = \vec{a} \cdot dt$$

Проинтегрируем

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}(t)} d\vec{V} = \int_{t_0}^{t} \vec{a} \cdot dt$$

$$\vec{V} - \vec{V}_O = \int_{t_0}^{t} \vec{a} \cdot dt$$

Окончательно **скорость** получим при решении данного выражения.

$$\vec{V} = \vec{V}_O + \int_{t_0}^{t} \vec{a} \cdot dt \quad (1)$$

Из определения скорости следует, что **элементарное перемещение** равно

$$d\vec{r} = \vec{V} \cdot dt$$

Подставим сюда выражение для скорости и проинтегрируем полученное уравнение:

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t}\left[\vec{V}_0 + \int_{t_0}^{t}\vec{a}\cdot dt\right]\cdot dt$$

Окончательно для **радиус-вектора** имеем выражение:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t}\left[\vec{V}_0 + \int_{t_0}^{t}\vec{a}\cdot dt\right]\cdot dt$$

Частные случаи

Равномерное прямолинейное движение

(ускорение $\vec{a} = 0$ и $t_0 = 0$).

Тогда

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{V}_0 dt = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t$$

Перейдём от векторной формы записи уравнений к скалярной:

$$x = x_0 + V_{0x} t \qquad s = Vt$$

Равнопеременное прямолинейное движение

(ускорение $\vec{a}$ = const и $t_0 = 0$).

Тогда

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_0^t \left[\vec{V}_0 + \int_0^t \vec{a}\,dt \right] dt = \vec{r}_0 + \int_0^t \left[\vec{V}_0 + \vec{a}\ t \right] dt$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}$$

Полученное выражение, спроецированное на ось *X*, имеет вид:

$$x = x_0 + V_{ox} t + \frac{a_x t^2}{2}$$

$$S = V_o t + \frac{at^2}{2}$$

1.4. Тангенциальное и нормальное ускорения

Пусть материальная точка движется по **криволинейной траектории**, имея различную скорость в разных точках траектории.

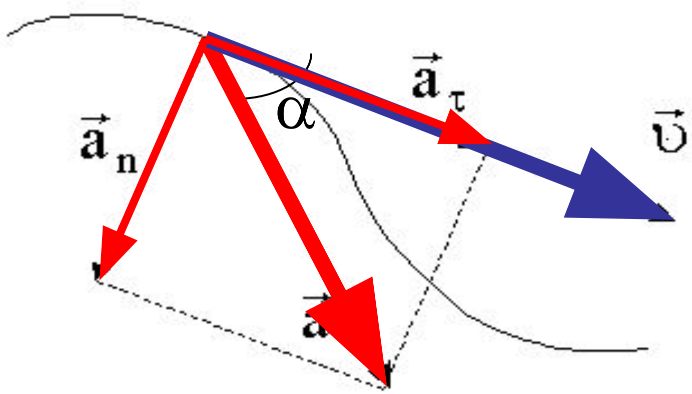
Скорость при криволинейном движении может изменяться и по модулю и по направлению.

Эти изменения можно оценивать раздельно.

Вектор ускорения $\vec{a}$ можно разложить на два направления:

- **касательное к траектории;**
- **перпендикулярное к ней (по радиусу к центру окружности).**

Составляющие на эти направления носят названия **тангенциального ускорения** $\vec{a}_\tau$ и **нормального ускорений** $\vec{a}_n$.



$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

Тангенциальное ускорение:

- характеризует изменение скорости по модулю;
- направлено по касательной к траектории.

Модуль тангенциального ускорения равен модулю первой производной от скорости по времени.

$$a_\tau = \left| \frac{dV}{dt} \right|$$

Нормальное ускорение

- характеризует изменение скорости по направлению;
- направлено перпендикулярно скорости по радиусу к центру кривизны траектории.

Модуль нормального ускорения равен

$$a_n = \frac{V^2}{R}$$

R – радиус кривизны в заданной точке траектории.

Полное ускорение материальной точки.

$$\vec{a} = \vec{a}_{\tau} + \vec{a}_{n}$$

Модуль полного ускорения:

$$a = \sqrt{a_{\tau}^{2} + a_{n}^{2}}$$

$$a = \sqrt{\left(\frac{dV}{dt}\right)^{2} + \left(\frac{V^{2}}{R}\right)^{2}}$$

Частные случаи движений

1. $a_\tau = 0,\quad a_n = 0$

- **равномерное прямолинейное движение**;

2. $a_\tau = const,\quad a_n = 0$

- **равнопеременное прямолинейное движение**;

3. $a_\tau = 0,\quad a_n = const$

- **равномерное движение по окружности**;

4. $a_\tau = 0,\quad a_n = f(t)$

- **равномерное криволинейное движение**.