Определенный интеграл

$$\int_{a}^{b} f(x)dx$$

Преподаватель математики Чебоксарского кооперативного техникума Чувашпотребсоюза

Определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

- формула Ньютона – Лейбница

a - нижний предел интегрирования,

b - верхний предел интегрирования.

Для вычисления определённого интеграла $\int_a^b f(x)dx$, нужно:

1. Найти какую-нибудь первообразную $F(x)$ для функции (найти неопределенный интеграл от функции $f(x)$, в котором можно принять C=0);

2. В полученном выражении подставить вместо x сначала верхний предел b, а затем нижний предел a, и из результата первой подстановки вычесть результат второй.

Пример 1

$$\int_2^3 x^3dx=\frac{x^4}{4}\Big|_2^3=\frac{3^4}{4}-\frac{2^4}{4}=\frac{81}{4}-\frac{16}{4}=\frac{65}{4}=16\frac{1}{4}$$

Пример 2

$$\int_0^{\pi}\sin x dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=-(\underbrace{\cos\pi}_{-1}-\underbrace{\cos 0}_{1})=$$

$$=-(-2)=2$$

Пример 3

$$\int_1^2\frac{dx}{x}=\ln|x|\ \Big|_1^2=\ln 2-\underbrace{\ln 1}_{0}=\ln 2$$

Пример 4

$$\int_{-1}^{2}(x^2-3x+7)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+7x\right)\Bigg|_{-1}^{2}=$$

$$=\left(\frac{1}{3}\cdot 2^3-\frac{3}{2}\cdot 2^2+7\cdot 2\right)-\left(\frac{1}{3}(-1)^3-\frac{3}{2}(-1)^2+7(-1)\right)=$$

$$=\frac{8}{3}-6+14+\frac{1}{3}+\frac{3}{2}+7=19{,}5$$

Пример 5

$$\int_{-1}^{2}(x^2+4x+1)dx=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{-1}^{2}=\left(\frac{x^3}{3}+2x^2+x\right)\Bigg|_{-1}^{2}=$$

$$=\left(\frac{2^3}{3}+\underbrace{2\cdot 2^2+2}_{10}\right)-\left(\frac{(-1)^3}{3}+\underbrace{2\cdot(-1)^2+(-1)}_{1}\right)=\frac{8}{3}+10+\frac{1}{3}-1=12$$

Замена переменной в определенном интеграле

При вычислении определенного интеграла способом подстановки новая переменная вводится подобно случаю неопределенного интеграла. Однако в отличие от неопределенного интеграла, где в полученном результате мы снова возвращались к старой переменной, здесь этого делать не надо, так как одновременно с заменой переменной меняются пределы интегрирования.

Пример 6

$$\frac{1}{6}\int_0^1 \underbrace{(2x^3+1)^4}_{t}\,\underbrace{6x^2dx}_{dt} = \left|\begin{array}{l} t=2x^3+1 \\ dt=\left(2x^3+1\right)'dx=6x^2dx \\ x=0\Rightarrow t=1 \\ x=1\Rightarrow t=3 \end{array}\right| = \frac{1}{6}\int_1^3 t^4dt =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{t^5}{5}\bigg|_1^3 = \frac{t^5}{30}\bigg|_1^3 = \frac{3^5}{30}-\frac{1^5}{30} = \frac{243}{30}-\frac{1}{30} = \frac{242}{30} = 8\frac{1}{15}$$

Пример 7

$$\int_0^1 \frac{6x^2dx}{1+2x^3} = \left| \begin{array}{l} t = 1+2x^3 \\ dt = 6x^2dx \\ x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = 1 \Rightarrow t = 3 \end{array} \right| = \int_1^3 \frac{dt}{t} =$$

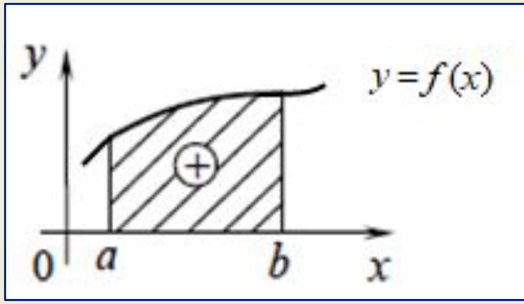
$$= \ln|t| \Big|_1^3 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$$

Пример 8

$$\int_0^{\pi/6} e^{\sin x} \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \\ x = 0 \Rightarrow t = \sin 0 = 0 \\ x = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow t = \sin \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2} \end{array} \right| = \int_0^{1/2} e^t dt = e^t \Big|_0^{1/2} =$$

$$= e^{1/2} - e^0 = \sqrt{e} - 1$$

Вычисление площадей
лоских фи



$$S = \int_a^b f(x)dx$$

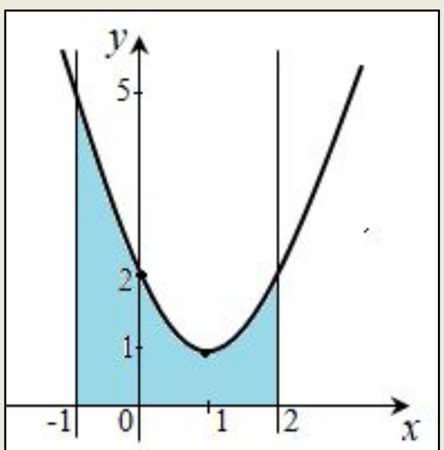
Пример 1 $y = x^2 - 2x + 2, x = -1, \ x = 2$ и $y = 0$

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \ y_0 = f(x_0)$$

Вершину параболы находим по формулам

$$x_0 = -\frac{-2}{2\cdot 1} = 1, \ y_0 = 1^2 - 2\cdot 1 + 2 = 1$$

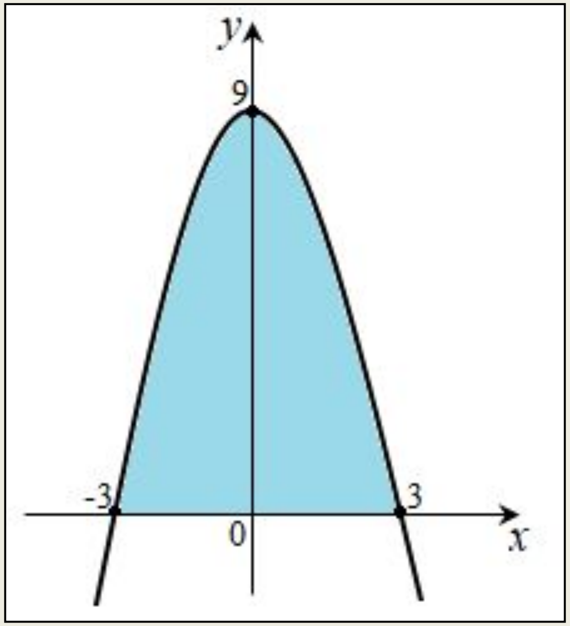
$(1,1)$ - вершина параболы



$$S = \int_{-1}^{2}(x^2 - 2x + 2)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x\right)\Bigg|_{-1}^{2} =$$

$$= \left(\frac{8}{3} - 4 + 4\right) - \left(\frac{-1}{3} - 1 - 2\right) = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} + 3 = 6.$$

Пример 2 $y = -x^2 + 9$ и $y = 0$



Находим пределы интегрирования:

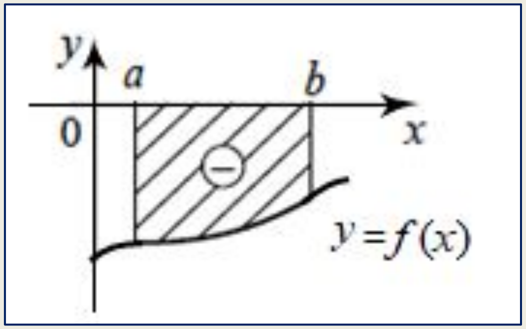
$$-x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = -3 \text{ и } x = 3$$

Следовательно, a = - 3, b = 3.

$$S = \int_{-3}^{3} (-x^2 + 9)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 9x\right)\Bigg|_{-3}^{3} =$$

$$= \left(-\frac{3^3}{3} + 9 \cdot 3\right) - \left(-\frac{(-3)^3}{3} + 9 \cdot (-3)\right) = (-9 + 27) - (9 - 27) =$$

$$= 18 + 18 = 36$$



$$S = \left|\int_a^b f(x)dx\right| = -\int_a^b f(x)dx$$

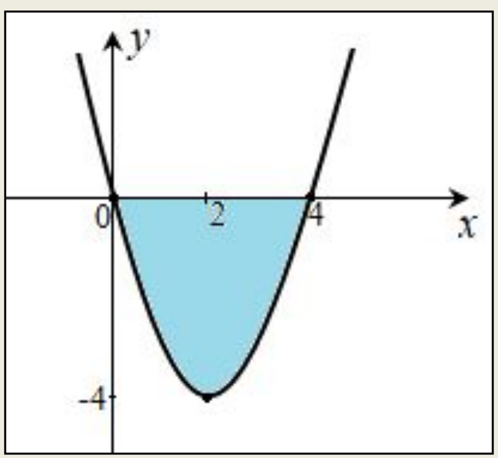
Пример 3 $y = x^2 - 4x$ и $y = 0.$

$$x_0 = -\frac{-4}{2\cdot 1} = 2, \quad y_0 = 2^2 - 4\cdot 2 = 4 - 8 = -4$$

$(2, -4)$ - *вершина параболы*

Находим пределы интегрирования:

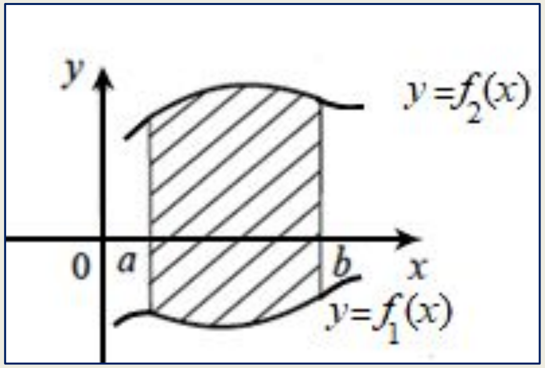
$x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ или $x = 4$. *Следовательно, a = 0, b = 4.*



$$S = -\int_0^4 (x^2 - 4x)dx = -\left(\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2}\right)\Big|_0^4 =$$

$$= -\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2\right)\Big|_0^4 = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right)\Big|_0^4 =$$

$$= \left(-\frac{4^3}{3} + 2\cdot 4^2\right) - 0 = -\frac{64}{3} + 32 = -\frac{64}{3} + \frac{96}{3} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$$



$$S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx$$

Пример 5 $y=-x^2+2x+8$ и $y=x+6.$

$$x_0=-\frac{2}{2\cdot(-1)}=1,\quad y_0=-1^2+2\cdot 1+8=9$$

$(1,9)$ - *вершина параболы.*

Находим пределы интегрирования:

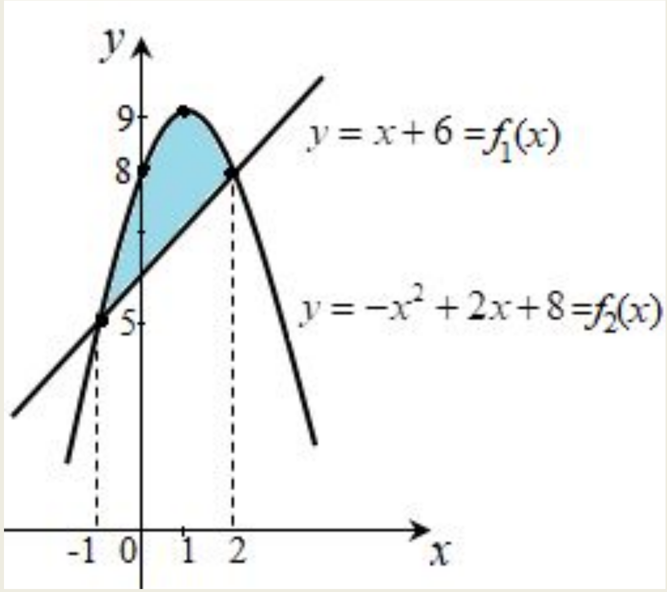
$$-x^2+2x+8=x+6$$

$$-x^2+2x+8-x-6=0$$

$$-x^2+x+2=0$$

$$x_1=-1 \text{ и } x_2=2 \Rightarrow a=-1,\ b=2$$

$$y_1=-1+6=5,\ y_2=2+6=8$$



$(-1, 5),\ (2, 8)$ - *точки пересечения параболы и прямой*

$$S = \int_{-1}^{2}\left(\left(\underbrace{-x^2+2x+8}_{f_2(x)}\right)-\left(\underbrace{x+6}_{f_1(x)}\right)\right)dx = \int_{-1}^{2}\left(-x^2+x+2\right)dx = \left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_{-1}^{2} =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \left(-\frac{2^3}{3}+\frac{2^2}{2}+2\cdot 2\right)-\left(-\frac{(-1)^3}{3}+\frac{(-1)^2}{2}+2\cdot(-1)\right) =$$

$$= \left(-\frac{8}{3}+2+4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right) = -\frac{8}{3}+6-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2 = 5-\frac{1}{2} = 4{,}5$$

Литература

1) Богомолов Н. В. Практические занятия по математике: учебное пособие для СПО / Н. В. Богомолов. – 11-е изд., пер. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2015. – 495с

2) Математика для экономистов и менеджеров. Практикум: учебное пособие/ коллектив авторов; под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: КНОРУС, 2017. – 480с.