Обработка результатов измерений

Обработка результатов многократного измерения

Равноточные измерения

Равноточными называются измерения, выполняемые на одних и тех же приборах, одним и тем же оператором, в одних и тех же условиях.

Результат многократного измерения, так же как и результат однократного измерения, является случайным значением измеряемой величины, но его дисперсия в n раз меньше дисперсии однократного измерения.

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Q_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D\left(Q_i\right) = \frac{n\,\sigma_Q^2}{n^2} = \frac{\sigma_Q^2}{n}.$$

Следовательно, точность значения измеряемой величины повышается в $\sqrt{n}$ раз.

При обработке результатов многократного измерения с равноточными значениями отсчета следует выполнять следующие операции:

1. Анализ априорной информации. Определение значения поправки θ_i.

2. Внесение поправок и получение n независимых результатов измерений:

$$Q_i = X_i + \theta_i .$$

3. Определение оценки среднего значения результата измерения

$$\overline{Q} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Q_i .$$

4. Определение оценки среднеквадратического отклонения результата измерения:

$$S_Q = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(Q_i - \overline{Q}\right)^2}$$

5. Исключение ошибок по правилу трех сигм:

$$\left|Q_i - \overline{Q}\right| \le 3\sigma_Q$$

Если отклонение результата отдельного измерения от среднего арифметического значения больше, чем три сигма, то его считают ошибочным и его отбрасывают, после чего повторяют операции 3, 4, 5.

Если отклонение результата отдельного измерения от среднего арифметического значения меньше, чем три сигма, то проводится проверка нормальности закона распределения вероятности результата измерения.

6. Проверка нормальности закона распределения вероятности результата измерения. Если массив экспериментальных данных n > 40…50, то проверка нормальности закона распределения вероятности результата измерения проводится по критерию К Пирсона:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{n}{P_i}\left(\frac{m_i}{n} - P_i\right)^2$$

Если массив экспериментальных данных n< 40…50, но больше 10…15, то проверка нормальности закона распределения вероятности результата измерения проводится по составному критерию.

Если же n < 10…15, то проверка нормальности закона распределения вероятности результата измерения не проводится, а гипотеза о нормальности закона распределения вероятности (ЗРВ) результата измерения принимается или отвергается на основании априорной информации.

7. Определение стандартного отклонения среднего арифметического.
Если распределение вероятности подчиняется нормальному закону, то стандартное отклонение среднего арифметического определяется по формуле:

$$S_{\overline{Q}} = \frac{S_Q}{\sqrt{n}}$$

Если же распределение вероятности не подчиняется нормальному закону, то стандартное отклонение среднего арифметического определяется по формуле:

$$S_{\overline{Q}} = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(Q_i^2 - \overline{Q}_n^{\,2}\right)}$$

8. Выбор доверительной вероятности P и определение параметра t. Если распределение вероятности результата измерения подчиняется нормальному закону и n > 15-20, то параметр t определяется по табличным значениям функции Лапласа при заданной доверительной вероятности.

Если n < 15-20 то параметр t определяется по табличным значениям распределения Стьюдента при заданной доверительной вероятности.

Если распределение вероятности результата измерения не подчиняется нормальному закону, то параметр t определяется по табличным значениям неравенства Чебышева (по нижней кривой, см. рис. 9).

9. Расчет половины доверительного интервала

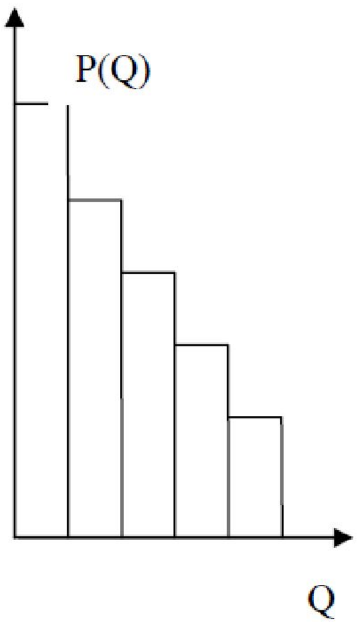
$$\varepsilon = t\sigma_Q$$

10. Определение интервалов, в которых находится значение измеряемой величины:

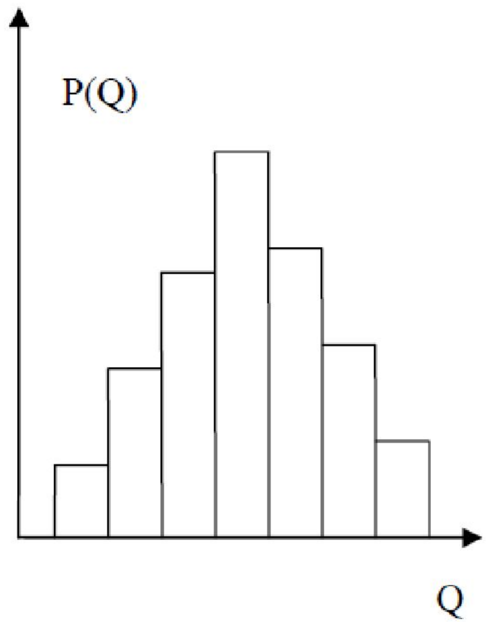
$$\overline{Q_n} - \varepsilon \le Q \le \overline{Q_n} + \varepsilon$$

Проверка нормальности закона распределения вероятности результата измерения

Проверка нормальности закона распределения вероятности результата измерения проводится после исключения ошибок. Для проверки нормальности закона распределения вероятности результата измерения на основании экспериментальных данных строится гистограмма. Иногда по виду гистограммы можно с уверенностью заключить, что результата измерения подчиняется или не подчиняется нормальному ЗРВ. Например, если гистограмма имеет вид, показанный на рис. 1 а, то с уверенностью можно заключить, что результата измерения не подчиняется нормальному ЗРВ. Если гистограмма имеет вид, показанный на рис. 1 б, то можно предположить, что результат измерения подчиняется нормальному ЗРВ. Существует несколько критериев согласия, по которым проверяется гипотеза о соответствии экспериментальных данных тому или иному ЗРВ. Наибольшее распространение получил критерий согласия χ 2 (критерий Пирсона).



а)



б)

При проверке гипотезы о соответствии эмпирической функции распределения теоретическому осуществляются следующие операции:

1) строится ранжированный ряд результатов измерений;

2) определение частоты появления i–го результата измерений – m_i;

3) вся область изменений величины Q_i разбивается на k интервалов. Количество интервалов определяется по формуле:

$$k = 1 + 3{,}3 \cdot \lg n;$$

4) ширина интервала определяется по следующей формуле:

$$h = \frac{Q_{\max} - Q_{\min}}{1 + 3{,}2 \lg n},$$

где n – объем выборки, количество измерений;

5) на основании выбранной теоретической функции $F(Q)$, в данном случае нормальный закон распределения вероятности, определяют вероятность попадания результата измерения в интервал Q_{i-1}; Q_i:

$$p_i = P\{Q_{i-1} \le Q \le Q_i\} = \int_{Q_{i-1}}^{Q_i} f(Q)dx = F(Q_i) - F(Q_{i-1});$$

6) умножая полученные вероятности p_i на n, получаем теоретические частоты np_i, т. е. частоты, которые следует ожидать в интервале (Q_{i-1}; Q_i), если гипотеза верная;

7) определение меры расхождения эмпирического закона распределения от теоретического ЗРВ результата измерения:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{n}{P_i}\left(\frac{m_i}{n} - P_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}.$$

Если расхождение случайное, то χ^2 подчиняется χ^2 – распределению К. Пирсона.

Интегральная функция распределения вероятности К. Пирсона определяет вероятность того, что случайное число примет значение меньшее аргумента этой функции $\chi^2{}_0$. Поэтому, задавшись значением интегральной функции распределения F($\chi^2{}_0$), можно проверить, больше или меньше его аргумента $\chi^2{}_0$ вычисленное значение χ^2.

При использовании критерия Пирсона возможны два рода ошибок. Ошибка первого рода состоит в отклонении верной гипотезы, а ошибка второго рода – в принятии неправильной гипотезы.

На рис. 16 представлены графики плотности распределения вероятности χ^2, когда проверяемая гипотеза верна (а) и когда неверна (б).

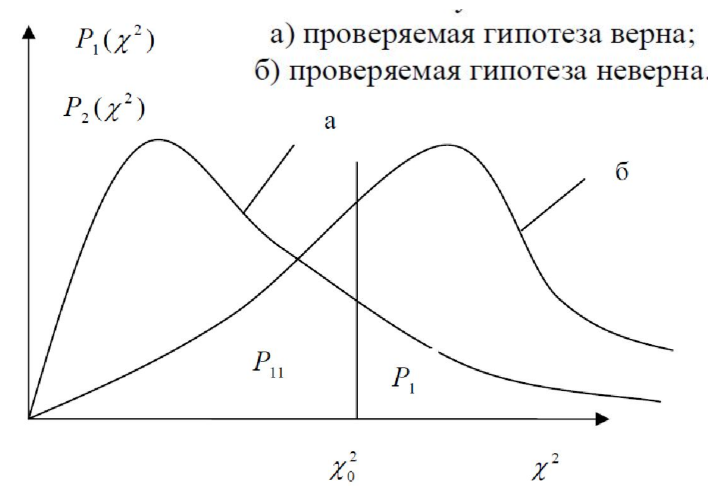


Рисунок 16

Составной критерий. При n< 10…15 для проверки нормальности закона распределения вероятности результата измерения применяется составной критерий.

При проверке по составному критерию выполняются следующие действия:

1) сначала рассчитывается величина

$$d = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|Q_i - \overline{Q_n}\right|}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Q_i - \overline{Q_n}\right)^2}};$$

2) проверяется условие $d_{\min} \le d \le d_{\max}$, где $d_{\min}$ и $d_{\max}$ зависят от вероятности, с которой принимается решение (табл. 5);

3) если это условие соблюдается, то проверяются «хвосты» теоретического и эмпирического законов распределения вероятности.

При 10 ≤ n ≤ 20 считается допустимым отклонение одного из независимых результатов значений результата измерения Q_i от среднего значения больше чем на $2{,}5\,S_Q$, т.е. проверяем условие: $\left|Q_i - \overline{Q_n}\right| \le 2{,}5\,S_Q$.

При 20 ≤ n ≤ 50 допускается отклонение двух значений результата измерения от среднего значения больше чем $2{,}5\,S_Q$.

Таблица 5

n	P=0,90		P=0,95		P=0,99	
	$d_{\min}$	$d_{\max}$	$d_{\min}$	$d_{\max}$	$d_{\min}$	$d_{\max}$
11	0,7409	0,8899	0,7153	0,9073	0,6675	0,9359
16	0,7452	0,8733	0,7236	0,8884	0,6829	0,9137
21	0,7495	0,8631	0,7304	0,8768	0,6950	0,9001
26	0,7530	0,8570	0,7360	0,8686	0,7040	0,8901
31	0,7559	0,8511	0,7404	0,8625	0,7110	0,8827
36	0,7583	0,8468	0,7440	0,8578	0,7167	0,8769
41	0,7604	0,8436	0,7470	0,8540	0,7216	0,8722
46	0,7621	0,8409	0,7496	0,8508	0,7256	0,8682
51	0,7636	0,8385	0,7518	0,8481	0,7291	0,8648

При соблюдении обоих условий, т. е.

$$\begin{cases} d_{\min} \le d \le d_{\max} \\ \left|Q_i - \overline{Q_n}\right| \le 2{,}5\,S_Q \end{cases}$$

гипотеза о нормальности закона распределения принимается. Если хотя бы один из условий не выполняется, то гипотеза отвергается.

Обработка результатов нескольких серий измерений (неравноточных измерений)

Если многократные измерения одной и той же величины производятся в несколько этапов, разными людьми, в разное время, в различных условия, то получаем несколько серий измерений.

Серии называются однородными, если подчиняются одному и тому же закону распределения вероятности. В противном случае серии называются неоднородными.

При совместной обработке нескольких серий измерений проверка однородности является обязательной.

При проверке однородности нескольких серий измерений сравниваются между собой средние арифметические и оценки дисперсии в каждой серии. Если различие между средними арифметическими и между оценками дисперсии незначимо, то такие серии обрабатываются вместе.

При проверке однородности двух серий измерений выполняются следующие операции (рис. 17):

1) определяется среднее арифметическое в каждой серии: $\overline{Q_1} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} Q_i$ и $\overline{Q_2} = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} Q_i$;

2) определяется среднее квадратическое отклонение каждой серии:

$$S_{Q_2}^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_{i=1}^{n_2}\left(Q_i - \overline{Q}_2\right)^2 ;$$

3) проводится проверка нормальности результата измерения в каждой серии;

4) если обе серии подчиняются нормальному закону распределения вероятности, то определяется среднее квадратическое отклонение обеих серий:

$$S_G = \sqrt{\frac{S_{Q_1}^2}{n_1} + \frac{S_{Q_2}^2}{n_2}} ;$$

5) определяется различие средних арифметических двух серий измерений:

$$G = \overline{Q}_2 - \overline{Q}_1 ;$$

6) выбирается доверительная вероятность Р, с которой принимается решение;

7) определение параметра t по таблицам функции Лапласа (по верхней кривой) или по таблицам неравенства Чебышева (по нижней кривой, см. рис. 9), в зависимости от вида закона распределения вероятности;

8) определение ширины доверительного интервала: $t \cdot S_G$;

$$S_{Q_1}^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}\left(Q_i - \overline{Q_1}\right)^2 \text{ и}$$

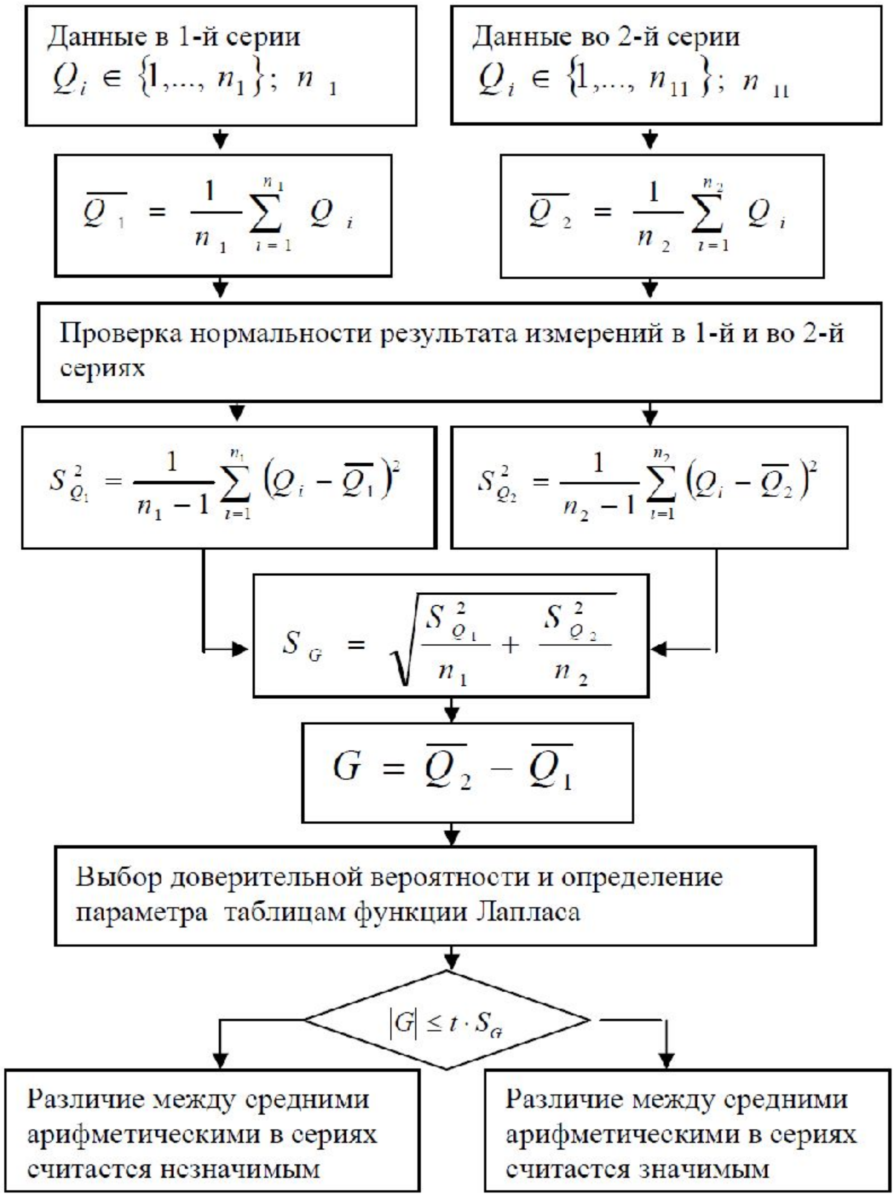


Рисунок 17 – Проверка различия между средними арифметическими в двух сериях измерений

9) если $|G| \le t \cdot S_G$, то различие между средними арифметическими считается незначимым; если же $|G| > t \cdot S_G$, то различие между средними арифметическими – значимым.

При небольшом числе измерений в каждой серии (n < 40…50), если их средние арифметические подчиняются ЗРВ Стьюдента, то их разность можно считать, что уже подчиняется нормальному ЗРВ.

После проверки значимости различия между средними арифметическими проверяется различие между оценками дисперсии.

При проверке значимости различия между оценками дисперсии выполняются следующие операции (рис. 18):

1) определение среднего арифметического в каждой серии;

2) определение среднего квадратического отклонения каждой серии;

3) проверка нормальности ЗРВ результата измерения каждой серии;

4) определение величины ψ, равной отношению средних квадратических отклонений:

$$\psi = \frac{S^2_{Q_1}}{S^2_{Q_2}};$$

5) если $\psi < 1$, то в качестве ψ берут выражение:

$$\psi = \frac{S^2_{Q_2}}{S^2_{Q_1}}.$$

При ψ > 1, если это число случайное, то оно подчиняется закону распределения вероятности Р.А. Фишера. Поэтому, выбрав значение интегральной функции распределения Фишера, равным вероятности Р, с которым принимается решение, можно проверить больше или меньше ее аргумента ψ 0 вычисленное значение ψ . Если ψ < ψ 0, то различие оценок дисперсии в сериях можно считать незначимым.

Серии с незначимым различием оценок дисперсии на зываются равнорассеянными.

Если ψ > ψ 0, то гипотеза о равнорассеянности серии отвергается.

Равнорассеянные серии с незначимым различием между средними арифметическими называются однородными.

Если в равнорассеянные серии входят экспериментальные данные, полученные в одних и тех же условиях, это говорит о сходимости серий измерений. То есть **под сходимостью понимается качество измерений, отражающее близость друг к другу результатов измерений, полученных в одинаковых условиях.**

Если в равнорассеянные серии входят экспериментальные данные, полученные в разных условиях, это говорит о воспроизводимости серий измерений.

Значит, **под воспроизводимостью понимается качество результатов измерений, характеризующее близость друг к другу результатов измерений, полученных в разных условиях, в разное время, разными людьми и средствами.**

Экспериментальные данные, входящие в однородные серии, рассматривают как единый массив. При совместной обработке однородных серий среднее арифметическое можно вычислять по следующей формуле:

$$\overline{Q} = \frac{n_1 \cdot \overline{Q_1} + n_2 \cdot \overline{Q_2}}{N},$$

где $N = n_1 + n_2$.

А среднее квадратическое отклонение:

$$S_Q = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\left\{(n_1-1)S^2_{Q_1} + (n_2-1)S^2_{Q_q} + n_1(\overline{Q}_1-\overline{Q})^2 + n_2(\overline{Q}_2-\overline{Q})^2\right\}}$$

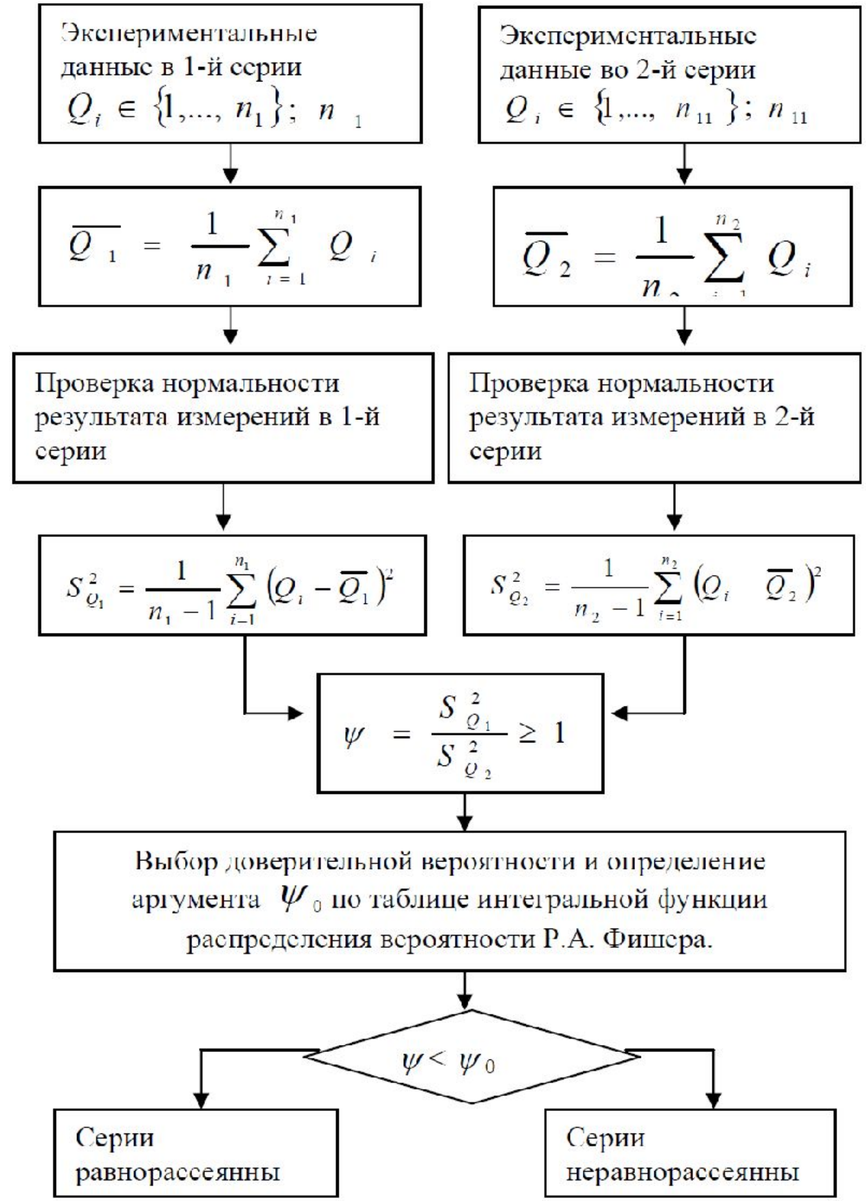


Рисунок 18 – Проверка равнорассеянности результатов измерений в двух сериях

Обработка неравнорассеянных серий измерений

При обработке неравнорассеянных серий измерений с незначимым различием между средними арифметическими учитывается ценность информации, выполненной с особой точностью.

Более точными являются серии с малой дисперсией.

Для учета важности серий измерений, выполненных с большой точностью, при определении средних арифметических двух серий измерений включают средние каждой серии с «весами».

Вес каждой серии измерений определяется как величина обратно пропорциональная дисперсии:

$$g_1 = \frac{1}{S_{Q_1}^2}; \quad g_2 = \frac{1}{S_{Q_2}^2} \ldots .$$

Следовательно, среднее арифметическое неравнорас-

$$\overline{Q} = \frac{\frac{1}{S_{Q_1}^2} \cdot \overline{Q}_1 + \frac{1}{S_{Q_2}^2} \cdot \overline{Q}_2 + \ldots + \frac{1}{S_{Q_n}^2} \cdot \overline{Q}_n}{\frac{1}{S_{Q_1}^2} + \frac{1}{S_{Q_2}^2} + \ldots + \frac{1}{S_{Q_n}^2}} =$$

$$= \frac{g_1 \overline{Q}_1 + g_2 \overline{Q}_2 + \ldots + g_n \overline{Q}_n}{g_1 + g_2 + \ldots + g_n}.$$

То есть при обработке неравнорассеянных серий измерений определяется среднее арифметической взвешенное.

Стандартное отклонение неравнорассеянных серий равно:

$$S = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{l} \frac{1}{S_j^2}}},$$

где l – количество серии;

S_j^2 – среднее квадратическое отклонение j–й серии.

Порядок обработки экспериментальных данных, входящих в неравнорассеянные серии с незначимым различием средних арифметических, состоит из следующих этапов (рис. 22):

1) получение 1–й серии измерений;

2) определение среднего арифметического каждой серии измерений:

$$\overline{Q}_j = \frac{1}{m_j} \cdot \sum_{i=1}^{m_j} Q_{i,j},$$

где $\overline{Q}_j$ – среднее арифметическое j-й серии измерений;

m_j – число измерений в j-й серии измерений;

$Q_{i,j}$ – i-й результата в j-й серии измерений.

3) определение среднего квадратического отклонения каждой серии измерений:

$$S_j^2 = \frac{1}{m_j(m_j - 1)} \cdot \sum_{i=1}^{m_j} \left(Q_{i,j} - \overline{Q}_j\right)^2;$$

4) определение стандартного отклонения:

$$S = \sqrt{\frac{1}{\sum_{j=1}^{l} \frac{1}{S_j^2}}};$$

5) определение среднего арифметического взвешенного серии измерений:

$$\overline{Q} = \sum_{j=1}^{l} \frac{S^2}{S_j^2} \cdot \overline{Q}_j;$$

6) если число измерений во всех сериях меньше 50, то параметр t после выбора доверительной вероятности устанавливают по распределению Стьюдента, если больше 50 – то по таблицам функции Лапласа.

7) определение доверительного интервала: $\varepsilon = t \cdot S$;

8) определение значения измеряемой величины:

$$\overline{Q} - \varepsilon \le Q \le \overline{Q} + \varepsilon$$

Обеспечение требуемой точности измерений

Многократное измерение одной и той же величины постоянного размера позволяет обеспечить требуемую точность. Поскольку ширина доверительного интервала зависит от количества экспериментальных данных, то есть

$$\varepsilon = t \cdot S_{\overline{Q}} \quad \text{где} \quad S_{\overline{Q}} = \frac{S_Q}{\sqrt{n}}$$

то, увеличивая массив экспериментальных данных, можно добиться наперед заданного значения:

$$\varepsilon \le \varepsilon_0 .$$

Алгоритм обработки экспериментальных данных при обеспечении единства измерений представлен на рис.