Дискретный анализ

Лекция 1

Введение.

Некоторые понятия теории множеств

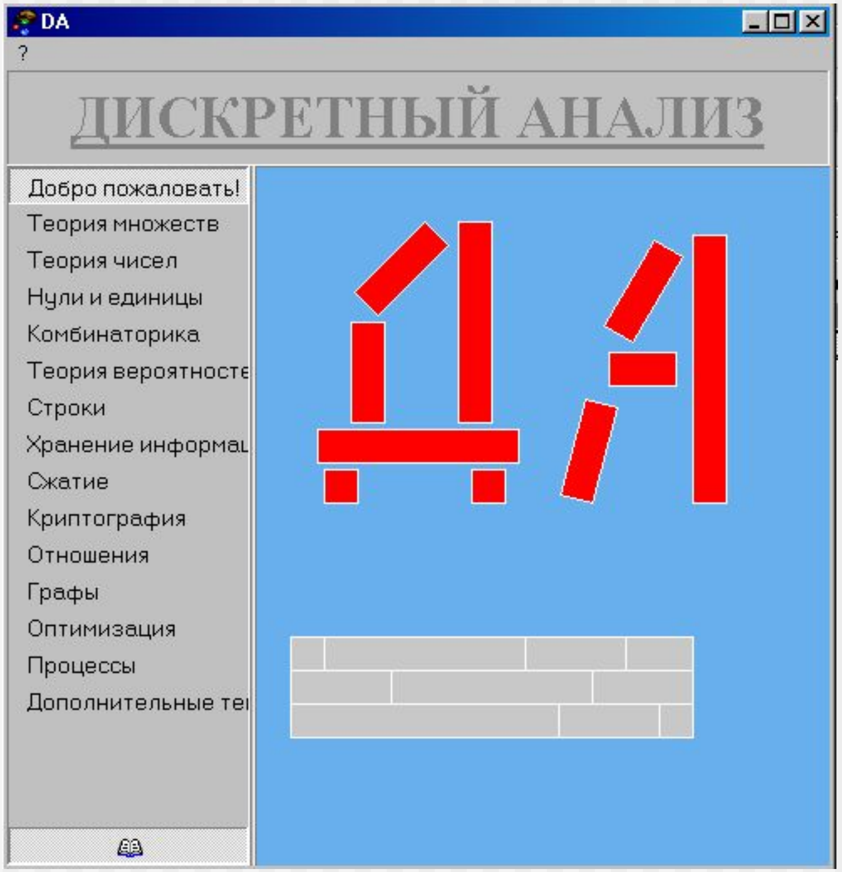
Организационные вопросы

- Лектор – Романовский Иосиф Владимирович, профессор кафедр исследования операций и информатики.
- Курс читается весь год по 1 разу в неделю. Во втором семестре упражнения – 1 раз в две недели.
- В первом семестре зачет, во втором экзамен.

Рекомендуемая литература

- Эта книга была написана по материалам данного курса, и она подходит нам в максимальной степени.
- По отдельным вопросам есть более подробные источники, они по мере надобности будут называться.

Дополнительный материал



- Комплекс DA_Demo демонстрационных программ по отдельным темам курса.
- Можно написать такую программу и получить отлично на экзамене. Но это дело не простое.

Программа 1-го семестра

- Немного теории множеств
- Комбинаторика
- Элементы теории вероятностей
- Строки и работа с ними
- Сжатие и защита информации
- Поиск и организация информации

Некоторые понятия теории множеств

- Вам должны быть знакомы понятия
- Множество
- Элемент множества
- Пересечение множеств
- Объединение множеств
- Разность множеств
- Симметрическая разность множеств
- Пустое множество
- Мощность множества – число элементов в нем (для конечных множеств)

Запись введенных обозначений

- $a \in A$
- $a \notin A$
- $A \subset B$
- $A \cap B$
- $A \cup B$
- $A \setminus B$
- $A \,\Delta\, B$
- $A = \varnothing$
- $|A|$

- `$a\in A$`
- `$a\notin A$`
- `$A\subset B$`
- `$A\cap B$`
- `$A\cup B$`
- `$A\setminus B$`
- `$A\Delta B$`
- `$A=\nothing$`
- `$|A|$`

Объяснение правого столбца

- Тексты, записанные в правом столбце таблицы, - это условная запись соответствующих формул, применяемая в специальном языке для набора научных текстов.
- Этот язык и его программная поддержка были разработаны знаменитым американским математиком и программистом Дональдом Эрвином Кнутом (Donald E. Knuth).
- Язык называется TeX. Вы обязательно должны будете им овладеть.

Прочтите и поймите тексты

- Говорят, что множества A и B *дизъюнктны*, если $A\cap B=\nothing$.
- Для любых A и B справедлива следующая формула $|A\cap B|+|A\cup B|=|A|+|B|$.
- Для любых A, B и C справедлива формула
- $(A\cap C)\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap C$.
- Множество целых чисел от k до l, где $k\leq l$, мы будем обозначать через $k:l$. (Здесь введено новое обозначение: $\leq$ используется для символа ≤ (*less or equal*).)
- Таким образом, $1:37 \cup 30:60 = 1:60$.
- Напишите, чему равны $1:37\cap 30:60$ и $1:37\Delta 30:60$.

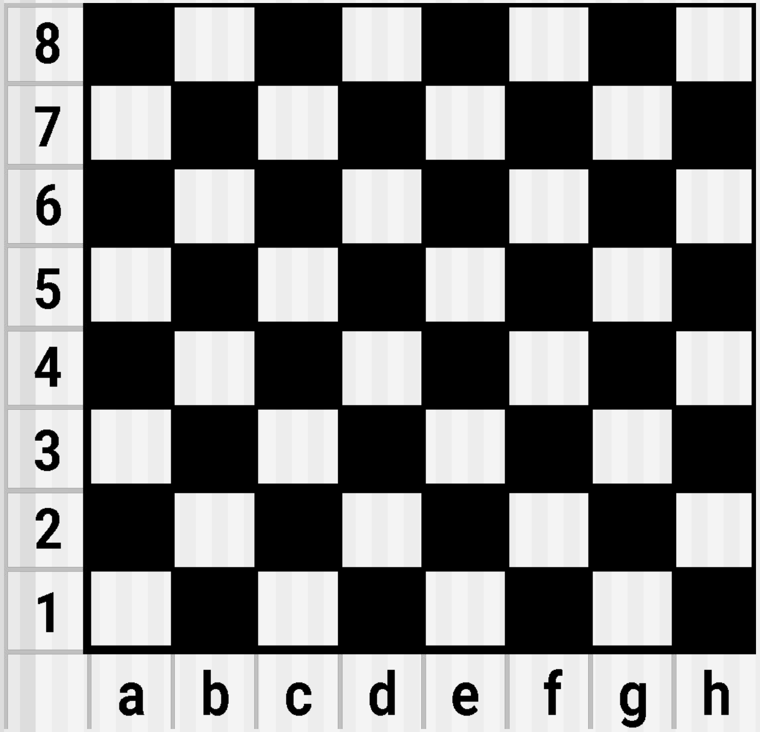
Новые понятия

- Декартово или прямое произведение множеств (это портрет Рене Декарта – Rene Descartes)
- Разбиение множества

Прямое произведение множеств

- Пусть заданы два (конечных) множества A и B. Прямым произведением этих множеств называется множество всевозможных пар $\{(a,b)\}$, где a пробегает все множество A, а b пробегает все множество B.
- Можно это записать так
- $A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,\ b\in B\}$
- Или в ТеХе
- `$A\times B=\{(a,b)\,|\,a\in A,b\in B\}$`
- Очевидно, что равенство $A\times B=B\times A$ верно не всегда.

Пример 1. Шахматная доска



- Множество клеток шахматной доски можно рассматривать как прямое произведение множества столбцов $\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ и множества строк 1:8

Пример 2. Колода игральных карт в 52 листа

♠**A**	♣**A**	♦**A**	♥**A**
♠K	♣K	♦K	♥K
♠Δ	♣Δ	♦Δ	♥Δ
♠ϑ	♣ϑ	♦ϑ	♥ϑ
♠T	♣T	♦T	♥T
♠9	♣9	♦9	♥9
♠8	♣8	♦8	♥8
♠7	♣7	♦7	♥7
♠6	♣6	♦6	♥6
♠6	♣6	♦6	♥6
♠5	♣5	♦5	♥5
♠4	♣4	♦4	♥4
♠3	♣3	♦3	♥3
♠2	♣2	♦2	♥2

- Колода игральных карт является произведением множества мастей {♠,♣, ♦,♥} на множество значений {A,K,D,J,T,9,8,7,6,5,4,3,2}.
- При добавлении джокеров это свойство теряется – расширенная колода в произведение двух множеств не раскладывается.

Пример 3. Множество секунд в минуте

- Множество 60 секунд одной минуты можно представить как произведение множества 0:5, задающего десятки секунд, и множества 0:9, задающего единицы внутри десятки.
- Таким образом пара (3,7) определяет 37-ю секунду минуты, если считать от нулевой секунды.
- Аналогично можно описывать множество минут в часе, а множество часов в сутках так не описать. Можно только разбить сутки на две половины.

Еще о примере 3

- Отметим еще, что если на множествах A и B заданы упорядочения, то на их произведении $C=A\times B$ естественно возникает еще и упорядочение: предшествование пары (a,b) паре (a',b') означает, что либо a предшествует a' в упорядочении множества A, либо $a = a'$, но b предшествует b' в упорядочении множества B.
- Такое упорядочение называется лексикографическим. Дальше мы будем рассматривать более общее определение лексикографического упорядочения.

Продолжение примера 3

- Если на множествах $A = 0{:}9$ и $B = 0{:}5$ заданы нумерации, то на их произведении $C=A\times B$ естественно возникает нумерация $\#C(a,b)=\#B(b)|A|+\#A(a)$.
- Можно считать, что у нас получилась позиционная система счисления с двухзначными числами: A – множество цифр младшего разряда, а B – старшего разряда.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
3	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
4	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
5	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59

Мощность произведения множеств

- Теорема. Мощность произведения двух множеств равна произведению их мощностей.

- Доказательство прямо следует из определения произведения чисел.

Произведение нескольких множеств

- Аналогично предыдущему можно определить произведение любого нумерованного набора конечных множеств $A_1, A_2, \dots, A_k$.
- $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k =$
- $\{(a_1, a_2, \dots, a_k) \mid a_i \in A_i, i \in 1{:}k\}$
- Сомножители в произведении могут быть одинаковыми.
- Как и раньше, $|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = \prod_{i \in 1:k} |A_i|$.
- Как и раньше, если все множества упорядочены, на их произведении можно определить лексикографический порядок. Попробуйте его определить сами.

Особый случай произведения

- Пусть $B=0:1$. Множество B^k – это множество последовательностей из нулей и единиц длины k.
- Очевидно, что $|B^k|=2^k$.
- Вы, конечно, уже знаете, что с помощью нулей и единиц представляются целые числа и что память компьютера состоит из элементов, каждый из которых хранит нуль или единицу. На следующей лекции мы будем заниматься всевозможными трактовками этого объекта.

Цилиндрические множества

- Пусть заданы два непустых множества A и B, и $C=A\times B$. Пусть $P\subset A$.
- Множество $R=P\times B$ называется *цилиндрическим.*

Разбиения

- Пусть задано множество A. Совокупность непустых множеств $\mathcal{A}=\{A_i\}_{i\in 1:k}$, которые попарно дизъюнктны и объединение которых равно A, называется разбиением A.
- Пример. Множество
- $A=\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,s,t,u,v,w,x,y,z\}$ разбито на три подмножества – красных, синих и черных букв. Эта система множеств составляет разбиение A.

Сравнение разбиений

- Пусть задано множество S и два его разбиения $\mathcal{A}=\{A_i\}_{i\in 1:k}$ и $\mathcal{B}=\{B_j\}_{j\in 1:m}$.
- Будем говорить, что разбиение $\mathcal{B}$ мельче разбиения $\mathcal{A}$, и писать $\mathcal{B}$ €$\mathcal{A}$, если для любого B_j, $j\in 1:m$, найдется такое A_i, которое содержит B_j полностью. (Мы можем сказать также, что $\mathcal{A}$ крупнее $\mathcal{B}$).
- Некоторые разбиения могут быть несравнимы, ни одно из двух не будет мельче другого.
- Каждое разбиение мельче и одновременно крупнее самого себя.

Произведение разбиений

- Пусть снова задано множество S и два его разбиения $\mathcal{A}=\{A_i\}_{i\in 1:k}$ и $\mathcal{B}=\{B_j\}_{j\in 1:m}$.
- Разбиение $\mathcal{C}=\{C_r\}_{r\in 1:n}$ называется произведением разбиений $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, если оно является самым крупным из разбиений, которые мельче и $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.
- Такого разбиения может и не существовать. Разбиения, о которых идет речь, не все сравнимы между собой. Но оказывается, что самое крупное из них, существует.

Теорема о произведении разбиений

- Произведение $\mathcal{C}$ разбиений $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ существует.
- Доказательство. Мы просто предъявим разбиение $\mathcal{C}$, а затем докажем, что это оно и есть.
- Образуем набор множеств $\mathcal{C}=\{C_{ij}=A_i \cap B_j\}_{i \in 1:k,\ j \in 1:m}$
- Покажем, что множества C_{ij} попарно дизъюнктны и их объединение равно S. Так что, если бы все эти множества были непусты, то $\mathcal{C}$ было бы разбиением.
- Дизъюнктность. Возьмем два различных множества $C_{ij}=A_i \cap B_j$ и $C_{i'j'}=A_{i'} \cap B_{j'}$, так что либо $i \neq i'$, либо $j \neq j'$. Рассмотрим первый случай, второй аналогичен. Так как $A_i \neq A_{i'}$, то они не пересекаются ($\mathcal{A}$ - разбиение), значит не пересекаются и их подмножества C_{ij} и $C_{i'j'}$.

Продолжение доказательства

- Объединение равно S. Вычислим это объединение.
- $\bigcup_{i\in 1:k,\ j\in 1:m} C_{ij} = \bigcup_{i\in 1:k} \left(\bigcup_{j\in 1:m} A_i \cap B_j\right)$
- $= \bigcup_{i\in 1:k} \left(A_i \cap \bigcup_{j\in 1:m} B_j\right) = \bigcup_{i\in 1:k} (A_i \cap S) = S$
- Покажем теперь, что для любого разбиения $\mathcal{D}$, $\mathcal{D} \in \mathcal{A}$, $\mathcal{D} \in \mathcal{B}$, выполняется $\mathcal{D} \in \mathcal{C}$. Возьмем какой-либо элемент D_s разбиения $\mathcal{D}$. Из того, что $\mathcal{D} \in \mathcal{A}$, следует, что найдется A_i, $D_s \subset A_i$. Аналогично, найдется B_j, $D_s \subset B_j$. Значит, нашлось C_{ij}, $D_s \subset C_{ij}$, и все доказано.
- Осталось выкинуть из построенного набора пустые множества, и он станет искомым разбиением.

Экзаменационные вопросы

1. Прямое произведение множеств.
2. Разбиения множеств. Произведение разбиений.

Упражнения

- 1. Пусть $A=\{a,c,e,h,k\}$, $B=\{b,c,d,e,h\}$. Найдите $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $A \vartriangle B$.
- 2. Найдите $A \times B$.
- 3. Сколько элементов содержит множество $A \times B \times B \times A \times B \times B$?
- 4. Пусть разбиения $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ заданы раскраской множества S:
- $\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ и $\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$. Постройте произведение этих разбиений.