



---

# Функции многих переменных (ФМП) Частные производные высших порядков функции двух переменных

Попова Елена Александровна  
К. пед. н., доцент  
доцент кафедры ММиИТ ТЭИ,  
СФУ  
[popova\\_elena15@mail.ru](mailto:popova_elena15@mail.ru)

## Частные производные высших порядков функции двух переменных

---

Пример 7 ФМП.

Найти частные производные второго порядка функции

$$z = f(x, y) = x^y + \frac{x^3}{y^2}$$

## Частные производные высших порядков функции двух переменных

---

Пример 7 ФМП.

Найти частные производные второго порядка функции

$$z = f(x, y) = x^y + \frac{x^3}{y^2}$$

Решение.

## Частные производные высших порядков функции двух переменных

---

Пример 7 ФМП.

Найти частные производные второго порядка функции

$$z = f(x, y) = x^y + \frac{x^3}{y^2}$$

Решение.

$$f'_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} =$$

## Частные производные высших порядков функции двух переменных

---

Пример 7 ФМП.

Найти частные производные второго порядка функции

$$z = f(x, y) = x^y + \frac{x^3}{y^2}$$

Решение.

$$f'_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1} + \frac{3x^2}{y^2}$$

## Частные производные высших порядков функции двух переменных

---

Пример 7 ФМП.

Найти частные производные второго порядка функции

$$z = f(x, y) = x^y + \frac{x^3}{y^2}$$

Решение.

$$f'_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1} + \frac{3x^2}{y^2}$$

$$f'_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} =$$

## Частные производные высших порядков функции двух переменных

---

Пример 7 ФМП.

Найти частные производные второго порядка функции

$$z = f(x, y) = x^y + \frac{x^3}{y^2}$$

Решение.

$$f'_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1} + \frac{3x^2}{y^2}$$

$$f'_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x - \frac{2x^3}{y^3}$$

## Пример 7 ФМП.

Найти частные производные второго порядка функции

$$z = f(x, y) = x^y + \frac{x^3}{y^2}$$

---

Решение .

$$f'_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1} + \frac{3x^2}{y^2}$$
$$f'_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x - \frac{2x^3}{y^3}$$



## Пример 7 ФМП.

Найти частные производные второго порядка функции

$$z = f(x, y) = x^y + \frac{x^3}{y^2}$$

---

Решение .  $f'_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1} + \frac{3x^2}{y^2}$

$$f'_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x - \frac{2x^3}{y^3}$$

$$f''_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) =$$

## Пример 7 ФМП.

Найти частные производные второго порядка функции

$$z = f(x, y) = x^y + \frac{x^3}{y^2}$$

---

Решение .  $f'_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1} + \frac{3x^2}{y^2}$

$$f'_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x - \frac{2x^3}{y^3}$$

$$f''_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \left( y \cdot x^{y-1} + \frac{3x^2}{y^2} \right)'_x =$$

## Пример 7 ФМП.

Найти частные производные второго порядка функции

$$z = f(x, y) = x^y + \frac{x^3}{y^2}$$

---

Решение .  $f'_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1} + \frac{3x^2}{y^2}$

$$f'_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x - \frac{2x^3}{y^3}$$

$$f''_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \left( y \cdot x^{y-1} + \frac{3x^2}{y^2} \right)'_x = y \cdot (y-1) \cdot x^{y-2} + \frac{6x}{y^2}$$

## Пример 7 ФМП.

Найти частные производные второго порядка функции

$$z = f(x, y) = x^y + \frac{x^3}{y^2}$$

---

Решение .

$$f'_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1} + \frac{3x^2}{y^2}$$
$$f'_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x - \frac{2x^3}{y^3}$$

## Пример 7 ФМП.

Найти частные производные второго порядка функции

$$z = f(x, y) = x^y + \frac{x^3}{y^2}$$

---

Решение .  $f'_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1} + \frac{3x^2}{y^2}$

$$f'_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x - \frac{2x^3}{y^3}$$

$$f''_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) =$$

## Пример 7 ФМП.

Найти частные производные второго порядка функции

$$z = f(x, y) = x^y + \frac{x^3}{y^2}$$

---

Решение .  $f'_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1} + \frac{3x^2}{y^2}$

$$f'_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x - \frac{2x^3}{y^3}$$

$$f''_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \left( x^y \cdot \ln x - \frac{2x^3}{y^3} \right)'_y =$$

## Пример 7 ФМП.

Найти частные производные второго порядка функции

$$z = f(x, y) = x^y + \frac{x^3}{y^2}$$

---

Решение .  $f'_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1} + \frac{3x^2}{y^2}$

$$f'_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x - \frac{2x^3}{y^3}$$

$$f''_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \left( x^y \cdot \ln x - \frac{2x^3}{y^3} \right)'_y = x^y \cdot \ln^2 x + \frac{6x^3}{y^4}$$

## Пример 7 ФМП.

Найти частные производные второго порядка функции

$$z = f(x, y) = x^y + \frac{x^3}{y^2}$$

---

Решение .  $f'_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1} + \frac{3x^2}{y^2}$

$$f'_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x - \frac{2x^3}{y^3}$$

$$f''_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) =$$



## Пример 7 ФМП.

Найти частные производные второго порядка функции

$$z = f(x, y) = x^y + \frac{x^3}{y^2}$$

---

Решение .  $f'_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1} + \frac{3x^2}{y^2}$

$$f'_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x - \frac{2x^3}{y^3}$$

$$f''_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \left( y \cdot x^{y-1} + \frac{3x^2}{y^2} \right)'_y =$$

## Пример 7 ФМП.

Найти частные производные второго порядка функции

$$z = f(x, y) = x^y + \frac{x^3}{y^2}$$

---

Решение .  $f'_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1} + \frac{3x^2}{y^2}$

$$f'_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x - \frac{2x^3}{y^3}$$

$$f''_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \left( y \cdot x^{y-1} + \frac{3x^2}{y^2} \right)'_y =$$

$$= x^{y-1} + y \cdot x^{y-1} \cdot \ln x - \frac{6x^2}{y^3}$$

---

Пример 7 ФМП. Найти частные производные функции

$$z = f(x, y) = x^y + \frac{x^3}{y^2}$$

---

Решение .

$$f'_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1} + \frac{3x^2}{y^2}$$
$$f'_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x - \frac{2x^3}{y^3}$$

Пример 7 ФМП. Найти частные производные функции

$$z = f(x, y) = x^y + \frac{x^3}{y^2}$$

---

Решение .  $f'_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1} + \frac{3x^2}{y^2}$

$$f'_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x - \frac{2x^3}{y^3}$$

$$f''_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) =$$

Пример 7 ФМП. Найти частные производные функции

$$z = f(x, y) = x^y + \frac{x^3}{y^2}$$

---

Решение .  $f'_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1} + \frac{3x^2}{y^2}$

$$f'_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x - \frac{2x^3}{y^3}$$

$$f''_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \left( x^y \cdot \ln x - \frac{2x^3}{y^3} \right)'_x =$$

Пример 7 ФМП. Найти частные производные функции

$$z = f(x, y) = x^y + \frac{x^3}{y^2}$$

---

Решение .  $f'_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1} + \frac{3x^2}{y^2}$

$$f'_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x - \frac{2x^3}{y^3}$$

$$f''_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \left( x^y \cdot \ln x - \frac{2x^3}{y^3} \right)'_x =$$

$$= y \cdot x^{y-1} \cdot \ln x + x^{y-1} - \frac{6x^2}{y^3}$$

---

Пример 7 ФМП. Найти частные производные функции

$$z = f(x, y) = x^y + \frac{x^3}{y^2}$$

---

Решение .  $f''_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = x^{y-1} + y \cdot x^{y-1} \cdot \ln x - \frac{6x^2}{y^3}$

$$f''_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = y \cdot x^{y-1} \cdot \ln x + x^{y-1} - \frac{6x^2}{y^3}$$

Выполняется ли равенство?

$$f''_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = f''_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$