КУРС СЕМИНАРСКИХ ЗАНЯТИЙ

ТЕПЛОМАССООБМЕН В БИОСФЕРЕ

Старший преподаватель
Львов Владимир Анатольевич

ВВЕДЕНИЕ

Некоторые математические понятия

Градиент: $$grad = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$$

Градиент функций многих переменных $f(x_1,\dots x_2)$ в точке P_0 – элемент векторного пространства, компоненты которого суть значения частных производных $\partial f/\partial x_i$ в этой точке.

Градиент (т.е. шагающий) **скалярного поля U** – векторное поле, компонентами которого служат частные производные $\partial U/\partial x$, $\partial U/\partial y$, $\partial U/\partial z$; обозначается $\boldsymbol{gradU}$ и выражается с помощью набла-оператора как ∇U

Градиент скалярной функции точки $\Phi(\vec{r}) \equiv \Phi(x, y, z)$ есть **векторная** функция точки, определяемая формулой:

$$grad\Phi(\vec{r}) \equiv \nabla\Phi \equiv \lim_{\delta \to 0} \frac{\int_{S1} \Phi(\vec{r}_1) d\vec{S}}{\int_{V1} dV}$$

где V_1 – область, содержащая точку $(\vec{r})$, S_1 - замкнутая поверхность, ограничивающая область V_1, δ – наибольшее расстояние от точки $(\vec{r})$ до точек поверхности S_1.

Некоторые математические понятия

Набла-оператор – дифференциальный оператор, обозначаемый через ∇ и символически записываемый в виде «вектора» с компонентами $\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n$; умножение компоненты $\partial/\partial x_i$ на «скалярную» функцию φ переменных $\{x_i\}$ записывается как частная производная $\partial\varphi/\partial x_i$.

Пример: В прямоугольных декартовых координатах **линейный** оператор ∇ (набла) определяется формулой:

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{z}}\boldsymbol{k}$$

его применение к скалярным и векторным функциям точки формально соответствует некоммутативной операции умножения на вектор с декартовыми координатами:

$$\partial/\partial \boldsymbol{x}, \partial/\partial \boldsymbol{y}, \partial/\partial \boldsymbol{z}$$

$$\nabla\Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \equiv \boldsymbol{grad}\Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \frac{\partial\Phi}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial \boldsymbol{y}}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial \boldsymbol{z}}\boldsymbol{k}$$

Замечание: В каждой точке, где существует вектор $grad\Phi(\vec{r}) \neq 0$, его модуль

$$|\nabla\Phi| = \sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial \boldsymbol{y}}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial \boldsymbol{z}}\right)^2}$$

равен наибольшей производной по направлению $d\Phi/ds$ в этой точке, а его направление совпадает с направлением, в котором эта наибольшая производная достигается.

Некоторые математические понятия

Векторные линии поля ***gradΦ*** определяются уравнениями $d\vec{r} \times \nabla\Phi = 0$ или

$$dx : dy : dz = \frac{\partial \Phi}{\partial x} : \frac{\partial \Phi}{\partial y} : \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

Линии градиента, определяемые этими уравнениями, перпендикулярны к **поверхностям уровня** $\Phi(r) \equiv \Phi(x, y, z) = const$

Дивергенция:

$$div\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

Дивергенция векторного поля – скалярная характеристика поля ***V***, обозначаемая через ***div V***; в прямоугольных координатах дивергенция имеет вид $\partial V_x/\partial x + \partial V_y/\partial y + \partial V_z/\partial z$, где V_x, V_y, V_z – компоненты вектора.

Дивергенция (расхождение) векторной функции точки $\vec{F}(\vec{r})$ есть **скалярная** функция точки, определяемая формулой:

$$div\vec{F}(\vec{r}) \equiv \nabla \cdot \vec{F} \equiv \lim_{\delta \to 0} \frac{\int_{S1} d\vec{S} \cdot \vec{F}(\vec{r}_1)}{\int_{V1} dV}$$

$$\nabla \cdot \vec{F}(x, y, z) \equiv div\vec{F}(x, y, z) = \frac{\partial F_X}{\partial x} + \frac{\partial F_Y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Некоторые математические понятия

Ротор

Ротор (вращающий, вихрь) векторной функции точки есть **векторная** функция точки, определяемая формулой:

$$rot\vec{F}(\vec{r}) \equiv \nabla \times \vec{F} \equiv \lim_{\delta \to 0} \frac{\int\limits_{S1} d\vec{S} \times \vec{F}(\vec{r}_1)}{\int\limits_{V1} dV}$$

$$\nabla \times \vec{F}(x,y,z) \equiv rot\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{\partial F_Z}{\partial y} - \frac{\partial F_Y}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial F_X}{\partial z} - \frac{\partial F_Z}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial F_Y}{\partial x} - \frac{\partial F_X}{\partial y}\right)k =$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_X & F_Y & F_Z \end{vmatrix}$$

Оператор Лапласа:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Оператор Лапласа – дифференциальный оператор, обозначаемый Δ и задаваемый формулой: $\partial^2 f/\partial x^2{}_1 + \ldots + \partial^2 f/\partial x^2{}_n$, где f – функция переменных $x_1,\ldots,x_n$.

$$\Delta = \mathbf{div\ grad} = \nabla^2$$

Семинар 1. *Уравнения движения невязкой среды (уравнения Эйлера)*

Внимание! Вывод уравнения движения основывается на законе сохранения и/или изменения импульса.

Область $\omega(t) \subset R^3$, состоящая при всех t из одних и тех же частиц, называется **движущимся объемом**, имеющим поверхность *γ(t)* с единичным вектором внешней нормали $\vec{n}$

Если импульс – $\dfrac{d}{dt}\iiint\limits_{\omega(t)} \rho \vec{w}\, d\omega$, то закон сохранения и/или изменения импульса может быть записан в виде:

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{\omega(t)} \rho \vec{w}\, d\omega = -\iint\limits_{\gamma(t)} p\vec{n}\, d\gamma = \vec{F}$$

Замечание: В подобной постановке силами, действующими на объем *ω(t)* будут только поверхностные силы давления, направленные по нормали к поверхности рассматриваемого объекта.

Случай одномерного движения

Движение газа происходит в одномерном поле давления ***p=f(x)*** с градиентом – ***dp/dx***, поэтому на выделенный элементарный объем ***dV=Fdx*** должна действовать сила $\dfrac{dp}{dx}dxF = \dfrac{dp}{dx}dV$, сообщающая массе газа $\rho Fdx = \rho dV$ в стационарном потоке

ускорение, равное: $\dfrac{dw}{dt} = \dfrac{dw}{dx}\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dw}{dx}w$

Замечание: Такое ускорение приобретает элементарная масса газа, движущаяся со скоростью ***w*** в поле скорости ***w=f(x)*** с градиентом ***dw/dx***.

Случай одномерного движения

Для одномерного потока газа в соответствии со вторым законом Ньютона уравнение движения может быть записано в виде:

$$\frac{dp}{dx}dV = -w\frac{dw}{dx}\rho dV$$

откуда
$$\frac{dp}{dx} = -w\rho\frac{dw}{dx}$$
или
$$-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = \frac{dw}{dt}$$

и
$$-dp = \rho w dw = \rho d\frac{w^2}{2}$$

С учетом соотношения $\rho=1/v$ последнее уравнение получает вид:

$$-vdp = d\frac{w^2}{2}$$

где v – удельный объем.

<u>Вывод</u>: Полученное уравнение показывает, что *dp* и *dw* имеют всегда разные алгебраические знаки. Это свидетельствует о том, что скорость одномерного потока газа возрастает только в направлении уменьшения давления.

Случай многомерного движения

Выделим в потоке идеальной жидкости (несжимаемой и без вязкости) элементарную массу в форме параллелепипеда и запишем уравнение основного закона механики в проекциях по осям:

$$dF_X = dm(a\cos\alpha) = dma_X;\ dF_Y = dm(a\cos\beta) = dma_Y;\ dF_Z = dm(a\cos\gamma) = dma_Z$$

Тогда, для первого уравнения имеем:

$$dm = \rho dxdydz;\quad a_X = \frac{dw_X}{dt};\qquad \frac{dw_X}{dt} = \frac{\partial w_X}{\partial t} + w_X\frac{\partial w_X}{\partial x} + w_Y\frac{\partial w_X}{\partial y} + w_Z\frac{\partial w_X}{\partial z}$$

$$dma_X = \rho dxdydz a_X = \rho dxdydz\cdot\left(\frac{\partial w_X}{\partial t} + w_X\frac{\partial w_X}{\partial x} + w_Y\frac{\partial w_X}{\partial y} + w_Z\frac{\partial w_X}{\partial z}\right)$$

Определим силу dF_x, полагая, что внешними являются поверхностные силы (силы давления жидкости, окружающей выделенную элементарную массу, на ее боковые грани) и силы объемные (или массовые).

Замечание: Проекции сил давления на боковые грани, перпендикулярные оси ***OX***, равны: $dP_1 = pdydz$ - по оси (знак плюс),

$dP_2 = p'dydz$ - против оси (знак минус), где p и p’ - средние гидродинамические давления для граней:

$$p' = p + \frac{\partial p}{\partial x}dx$$

Случай многомерного движения

Таким образом, сумма проекций на боковые грани равна:

$$dP_1 - dP_2 = pdydz - (p + \frac{\partial p}{\partial x}dx)dydz = -\frac{\partial p}{\partial x}dxdydz$$

Проекцию объемной силы определим в виде:

$$dR_X = dR\cos\alpha = \rho dxdydzX$$

где X - **проекция ускорения объемной силы**.

Тогда проекция равнодействующей:

$$dF_X = dP_1 - dP_2 + dR_X = -\frac{\partial p}{\partial x}dxdydz + \rho dxdydzX$$

и $$-\frac{\partial p}{\partial x}dxdydz + \rho dxdydzX = \rho dxdydz \cdot \left(\frac{\partial w_X}{\partial t} + w_X \frac{\partial w_X}{\partial x} + w_Y \frac{\partial w_X}{\partial y} + w_Z \frac{\partial w_X}{\partial z} \right)$$

и после отнесения к единице массы имеем:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + X = \left(\frac{\partial w_X}{\partial t} + w_X \frac{\partial w_X}{\partial x} + w_Y \frac{\partial w_X}{\partial y} + w_Z \frac{\partial w_X}{\partial z} \right)$$

Случай многомерного движения

В результате получаем три уравнения:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+X=\left(\frac{\partial w_X}{\partial t}+w_X\frac{\partial w_X}{\partial x}+w_Y\frac{\partial w_X}{\partial y}+w_Z\frac{\partial w_X}{\partial z}\right)$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+Y=\left(\frac{\partial w_Y}{\partial t}+w_X\frac{\partial w_Y}{\partial x}+w_Y\frac{\partial w_Y}{\partial y}+w_Z\frac{\partial w_Y}{\partial z}\right)$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+Z=\left(\frac{\partial w_Z}{\partial t}+w_X\frac{\partial w_Z}{\partial x}+w_Y\frac{\partial w_Z}{\partial y}+w_Z\frac{\partial w_Z}{\partial z}\right)$$

или $-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+X=\frac{dw_X}{dt}; -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+Y=\frac{dw_Y}{dt}; -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+Z=\frac{dw_Z}{dt};$ $\boxed{\frac{d\vec{w}}{dt}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\,grad p=\frac{\partial\vec{w}}{\partial t}+(\vec{w}\cdot\nabla)\vec{w}}$

где $dw_x=\frac{\partial w_x}{\partial t}dt+\frac{\partial w_x}{\partial x}dx+\frac{\partial w_x}{\partial y}dy+\frac{\partial w_x}{\partial z}dz$. После деления на dt получаем:

$$\frac{dw_x}{dt}=\frac{\partial w_x}{\partial t}+\frac{\partial w_x}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w_x}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial w_x}{\partial z}\frac{dz}{dt}; \qquad \frac{dw_x}{dt}=\frac{\partial w_x}{\partial t}+w_x\frac{\partial w_x}{\partial x}+w_y\frac{\partial w_x}{\partial y}+w_z\frac{\partial w_x}{\partial z}$$

Вывод: **Полная производная $dw_x/dt=a_x$ представляет собой полное ускорение движения данной частицы в направлении оси OX, она обычно направлена по скорости (но можно и произвольно) и иногда называется – субстанционной (индивидуальной, материальной и т. п.) производной по времени.**

Частная производная $\partial w_x/\partial t$, представляет собой ускорение **в данной точке**, обусловленное неустановившимся движением жидкости ее часто называют **локальной производной**.

Сумма $w_x\partial w_x/\partial x+w_y\partial w_x/\partial y+w_z\partial w_x/\partial z$ представляет собой ускорение, связанное с неравномерностью движения при перемещении частицы жидкости в пространстве – **конвективной производной**.

Случай многомерного движения

Замечание: Полная (субстанционная) производная равна сумме локальной и конвективной. При установившемся движении локальная производная $\partial w_x/\partial t=0$, но конвективная может и не быть равной нулю – случай **неравномерного установившегося движения**. Аналогично для других производных.

Краткая форма записи уравнения движения

При постоянной массе:

$$\rho \frac{d\vec{w}}{dt} = \rho\vec{F} + divP$$

При переменной массе:

$$\rho \frac{d\vec{w}}{dt} = \rho\vec{F} + divP - J\vec{w}$$

где P – тензор напряжений; $J\vec{w}$ - плотность распределения реактивных сил, т.е. реактивные силы, отнесенные к единице объема.

Замечание: Возможны два подхода к получению исходных уравнений интегральных законов сохранения. Первый из которых рассматривает изменение во времени массы в переменном объеме $\omega(t)$, а второй – в фиксированном (не зависящем от времени) объеме ω, что дает возможность получения законов сохранения в виде балансовых уравнений.

Первый подход:

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{\omega(t)} \rho\vec{w}\,d\omega = -\iint\limits_{\gamma(t)} p\vec{n}\,d\gamma = \vec{F}$$

Второй подход:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{\omega} \rho\vec{w}\,d\omega = -\iint\limits_{\gamma} (p\vec{n} + \rho\vec{w}(\vec{w}\cdot\vec{n}))\,d\gamma$$

Вывод: Полученные уравнения относятся к движению как капельной, так и газообразной среды. В систему трех уравнений входят пять неизвестных: составляющие скорости – w_x, w_y, w_z, давление - p и плотность ρ. Поэтому потребуется дополнительно еще два уравнения.

Основные уравнения тепло- и массообмена в биосфере

Семинар 2. *Уравнение неразрывности*

Внимание! Вывод уравнения неразрывности основывается на законе сохранения массы.

Область $\omega(t) \subset R^3$, состоящая при всех t из одних и тех же частиц, называется **движущимся объемом**.

Если масса – $\iiint\limits_{\omega(t)} \rho d\omega$, то закон сохранения массы может быть записан в виде:

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{\omega(t)} \rho d\omega = 0$$

Случай одномерного движения

Скорость прохождения массы газа (массовая скорость) w_m через единицу площади поперечного сечения F определяется произведением ρw, где ρ – плотность газа, w – его скорость.

Если учесть, что по мере перемещения газа в канале изменение массовой скорости составляет $\partial(\rho w)/\partial x$, то элементарный расход массы dM газа за время dt можно записать в виде соотношения:

$$dM_x = \frac{\partial}{\partial x}(\rho w)dx \cdot F \cdot dt$$

Замечание: Изменение F на длине dx при этом не учитывается.

Случай одномерного движения

Газ занимает весь предоставленный ему объем, что подтверждается и в действительности, поэтому изменение расхода массы dM_x на длине dx можно объяснить только изменением плотности газа в элементарном объеме dV за тот же промежуток времени dt, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho w)dx \cdot F \cdot dt = -\frac{\partial \rho}{\partial t}dtdV$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho w) = 0$$

Вывод: Полученное уравнение и является уравнением неразрывности.

Для одномерного потока частную производную $\partial(\rho w)/\partial x$ можно заменить на полную. Тогда изменение массовой скорости может быть записано в виде: $d(\rho w)/dx$.

Для стационарного потока $\rho w = const$ и $\rho w = M/F$.

В рассматриваемых условиях уравнение неразрывности получает вид:

$$M = \rho w F = const$$

Последнее уравнение можно представить в дифференциальной форме:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dw}{w} + \frac{dF}{F} = 0$$

или

$$\frac{dw}{w} + \frac{dF}{F} = \frac{dv}{v}$$

где v – удельный объем.

Случай многомерного движения

Построим внутри потока неподвижный объем, в форме параллелепипеда, и будем рассматривать его как некоторое пространство, через которое протекает поток.

Если поток не претерпевает разрыва, то для несжимаемой среды количество массы жидкости, входящей в объем и выходящей из него должны быть равны между собой.

Для сжимаемой среды разность между этими количествами должна равняться приращения массы внутри объема, обусловленному изменением плотности.

В направлении *OX*, через боковые грани, перпендикулярные этой оси, за время внутрь параллелепипеда поступит масса:

$$\delta M'_x = \rho w_x \, dxdydz$$

а выйдет

$$\delta M''_x = \rho' w'_x \, dxdydz$$

, где плотность и скорость на выходе могут быть определены в виде:

$$\rho' = \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx$$

и

$$w'_x = w_x + \frac{\partial w_x}{\partial x} dx$$

Поскольку втекание и вытекание происходит одновременно, их изменение обуславливается только изменением координаты *x*.

Следовательно, выходящая масса равна:

$$\delta M''_X = \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx\right)\left(w_X + \frac{\partial w_X}{\partial x} dx\right) dtdydz = \left[\rho w_X + \rho \frac{\partial w_X}{\partial x} dx + w_X \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial w_X}{\partial x} (dx)^2\right] dtdydz$$

Случай многомерного движения

Поскольку $\frac{\partial(\rho w_X)}{\partial x}dx = \rho\frac{\partial w_X}{\partial x}dx + w_X\frac{\partial \rho}{\partial x}dx$

пренебрегая бесконечно малыми величинами высших порядков,

получаем: $\delta M''_X = \left(\rho w_X + \frac{\partial(\rho w_X)}{\partial x}dx\right)dtdydz$

Если за время dt масса жидкости внутри параллелепипеда увеличилась за счет притока на $\delta M'_x$, а уменьшилась за счет вытекания $\delta M''_x$, то приращение массы вследствие движения вдоль оси OX будет:

$$\delta M_X = \delta M'_X - \delta M''_X = \rho w_X dtdydz - \left(\rho w_X + \frac{\partial(\rho w_X)}{\partial x}dx\right)dtdydz = -\frac{\partial(\rho w_X)}{\partial x}dtdxdydz$$

Аналогично получаем для других осей:

$$\delta M_Y = -\frac{\partial(\rho w_Y)}{\partial y}dtdxdydz \qquad \delta M_Z = -\frac{\partial(\rho w_Z)}{\partial z}dtdxdydz$$

и полное приращение равно:

$$\delta M = \delta M_X + \delta M_Y + \delta M_Z = -\left(\frac{\partial(\rho w_X)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_Y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w_Z)}{\partial z}\right)dtdxdydz$$

Замечание: Это изменение массы при условии неразрывности движения должно равняться изменению массы, обусловленному изменением плотности.

Случай многомерного движения

В начальный момент времени t масса внутри параллелепипеда равна $\delta m_t = \rho dxdydz$, а в конечный времени $t+dt$ средняя для объема плотность ρ изменится и будет равна ρ', это изменение происходит независимо от координат, поскольку параллелепипед неподвижен.

Поэтому: $\rho' = \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt$,

и в конечный момент времени масса жидкости в объеме составит: $\delta m_{t+dt} = \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \right) dxdydz$

Таким образом, приращение массы за время dt равно:

$$\delta m = \delta m_{t+dt} - \delta m_t = \frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz$$

но из условия неразрывности: $\delta m = \delta M$, т.е.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz = -\left(\frac{\partial (\rho w_X)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho w_Y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w_Z)}{\partial z} \right) dtdxdydz$$

После сокращения окончательно получаем:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{\partial (\rho w_X)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho w_Y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w_Z)}{\partial z} \right) = 0$$

Вывод: Это и есть искомое уравнение неразрывности.

Случай многомерного движения

В частном случае, при стационарном (установившемся) движении, плотность ρ, как и все остальные параметры движения, не зависит от времени и $\partial\rho/\partial t=0$. Поэтому уравнение неразрывности принимает вид:

$$\left(\frac{\partial(\rho w_X)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho w_Y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w_Z)}{\partial z}\right)=0$$

Для несжимаемой жидкости $\rho=const$ и <u>как при установившемся, так и при неустановившемся движении</u>, уравнение неразрывности записывается в виде:

$$div\vec{w}=\left(\frac{\partial(w_X)}{\partial x}+\frac{\partial(w_Y)}{\partial y}+\frac{\partial(w_Z)}{\partial z}\right)=0$$

Внимание!!! Поскольку по физическому смыслу частные производные, которые входят в последнее уравнение, представляют собой соответствующие скорости линейных деформаций растяжения или сжатия в направлении осей, это уравнение неразрывности показывает, что в условиях сплошности движения несжимаемой жидкости сумма скоростей относительных линейных деформаций ребер параллелепипеда равна нулю, т.е. коэффициент объемного расширения равен нулю.

Другими словами, это уравнение показывает, что движение жидкости осуществляется таким образом, что данная масса все время занимает один и тот же объем.

Краткие формы записи уравнения неразрывности

Для постоянной массы:

Для несжимаемой жидкости:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot div\vec{w} = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial w_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0$$

Для сжимаемой жидкости (газа):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\rho\vec{w} = 0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w_\alpha)}{\partial x_\alpha} = 0$$

Для переменной массы:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot div\vec{w} = J$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\rho\vec{w} = J$$

$$\frac{d}{dt}(\delta m) = \frac{d}{dt}(\rho\delta\tau) = J\delta\tau$$

Замечание: Возможны и другие формы записи этих уравнений, в том числе и для случая динамики переменной массы

Вывод: **Здесь также возможны два подхода к получению исходных уравнений интегральных законов сохранения. Первый из которых рассматривает изменение во времени массы в переменном объеме *ω(t)*, а второй – в фиксированном (не зависящем от времени) объеме *ω*, что дает возможность получения законов сохранения в виде балансовых уравнений.**

Первый подход

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{\omega(t)} \rho d\omega = 0$$

Второй подход

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{\omega} \rho d\omega = -\iint\limits_{\gamma} \rho\vec{w} \cdot \vec{n} d\gamma$$

Здесь $\gamma(t)$ – поверхность $\omega(t)$ и $\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали к $\gamma(t)$

Семинар 3. *Уравнения распространения теплоты в вещественной среде*

Для тепловых процессов закон сохранения и превращения энергии выражается в виде **первого начала термодинамики**, которое для единицы объема движущейся среды можно записать в виде уравнения:

$$Q_v dt + L_v dt = \rho\left[dU + d\left(w^2/2\right)\right]$$

где $\boldsymbol{Q_v}$ – количества теплоты, поступающей в единицу объема среды в единицу времени, Вт/м^3; $\boldsymbol{L_v}$ – работа, **совершаемая** внешними силами над единицей объема среды за единицу времени, Вт/м^3; $\boldsymbol{U}$ – внутренняя энергия одного килограмма среды, Дж/кг; $\boldsymbol{w}$ – скорость движения (течения) среды, м/с.

Замечание: Это уравнение выражает то обстоятельство, что изменение полной энергии тела, которое складывается в данном случае из изменения его внутренней энергии $\boldsymbol{\rho U}$ и изменения кинетической энергии $\boldsymbol{\rho w^2/2}$, обусловлено количеством теплоты, подводимой к телу, и внешней работой, **совершенной над телом**.

Поскольку рассматривается движение элемента потока жидкости (газа), то работа в данном случае связана с изменением давления и внутренним трением текущей среды, а изменение внутренней энергии связанно с изменением ее теплосодержания, т.е. **энтальпии,** уравнением:

$$dU = di - d\left(P/\rho\right)$$

Уравнения распространения теплоты в вещественной среде

Для идеального газа имеем: $di = c_p dT$ что приводит к следующему выражению:

$$dU + d\left(\frac{w^2}{2}\right) = di + d\left(\frac{w^2}{2}\right) - \frac{dP}{\rho} + \frac{Pd\rho}{\rho^2}$$

Выделяя, объем ***V***, ограниченный поверхностью ***F***, запишем уравнение теплового баланса этого объема, отнесенное к единице времени в виде:

$$\int_V Q_V dV + \int_F \vec{q} dF = \int_V q_V dV$$

Первый член этого уравнения представляет собой изменение теплосодержания рассматриваемого объема ***V***; **второй** – количество теплоты, ушедшее через поверхность ***F*** путем теплопроводности; **третий** – количество теплоты, выделенное внутренними источниками (имеет знак минус, если в теле находятся стоки теплоты).

Замечание: Внутренние источники теплоты могут возникать вследствие излучения, объемных химических реакций, радиоактивного распада вещества, прохождения электрического тока, работы трения и т.д.

Между потоком вектора через замкнутую поверхность F, ограничивающую объем V, и расходимостью (диверегенцией) вектора существует связь, выражаемая **формулой Остроградского-Гаусса**:

$$\int_F \vec{q} dF = \int_V div\vec{q} dV$$

Замечание: Формула справедлива, если в объеме ***V*** нет сильных разрывов функции. В тепловой задаче это означает, что область ***V*** не должна включать границы раздела фаз.

Уравнения распространения теплоты в вещественной среде

Это позволяет записать: $Q_V = div(\lambda gradT) + q_V$

Тогда в прямоугольных координатах, принимая гипотезу: $q_i = -\lambda \partial T / \partial x_i$ с учетом $div\vec{q} = \partial q_x / \partial x + \partial q_y / \partial y + \partial q_z / \partial z$, для количества теплоты Q_V, поступающей в единицу объема среды в единицу времени, получаем:

$$Q_V = \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial z} + q_V$$

где λ - коэффициент теплопроводности, q_v - интенсивность выделения теплоты внутренним источником.

В результате получаем известное **уравнение Фурье-Кирхгофа**:

$$\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial z} + q_V + L_V + \frac{dP}{dt} - \frac{P}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \rho\left[\frac{di}{dt} + \frac{d(w^2/2)}{dt}\right]$$

Вывод: Это уравнение параболического типа. Известно, что оно имеет нестационарные решения при допущении о бесконечно большой скорости распространения тепловых возмущений.

Замечание: Реальная скорость распространения тепловых возмущений в вещественной среде имеет порядок не более средней скорости теплового движения структурных частиц, а для излучения равна скорости распространения электромагнитных волн. Однако, во многих практических приложениях, подобное допущение находится в пределах точности инженерных расчетов и использование нестационарных решений уравнения Фурье-Кирхгофа **следует признать допустимым**.

Уравнения распространения теплоты в вещественной среде

Внимание! **Уравнение Фурье-Кирхгофа** содержит давление $\boldsymbol{P}$, скорость течения среды $\boldsymbol{w}$ и плотность $\boldsymbol{\rho}$.

Замечание: Для общего решения задачи о теплообмене в движущейся вещественной среде к этому уравнению необходимо присоединить ещё уравнения, определяющие поле скоростей и связь между термодинамическими параметрами состояния среды.

Вывод: Замыкание системы дифференциальных уравнений теплообмена в движущейся вещественной среде, достигается присоединением к уравнению распространения тепла уравнений движения и неразрывности потока жидкости и уравнения состояния. Тем самым вновь прослеживается связь между гидродинамикой и тепло- и массообменом.

Справочно: Проводя аналогии между этими процессами можно констатировать, что полные производные по времени от давления, теплосодержания (энтальпии), квадрата скорости и плотности являются функциями координат и времени, в связи с чем полный дифференциал любой из них равен:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t}dt + \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz$$

Уравнения распространения теплоты в вещественной среде

Отсюда:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

где $dx/dt=w_x$; $dy/dt=w_y$; $dz/dt=w_z$ представляют собой проекции вектора скорости течения среды на соответствующие координаты.

С физической точки зрения, рассматриваемая полная производная, распадается на две разные части. **<u>Первый член</u>** правой части характеризует изменение данной величины, связанное с изменением поля этой величины во времени, а **<u>сумма остальных трех членов</u>** характеризует изменение данной величины, происходящее в связи с перемещением рассматриваемого элемента среды из одной точки пространства в другую.

Иными словами, частная производная **$\partial\varphi/\partial t$** представляет собой скорость изменения **φ** во времени в той точке пространства, в которой элементарный объем среды находится в данный момент времени, а сумма:

$$w_x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + w_y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + w_z\frac{\partial\varphi}{\partial z} = (\vec{w}, grad\varphi)$$

представляет собой скорость изменения, которое обусловлено перемещением элементарного объема среды dV из точки со значением $\varphi=\varphi_1$ в точку со значением $\varphi=\varphi_2$. При этом величина **$\partial\varphi/\partial t$** – обычно называется местным (локальным) изменением, а величина $(\vec{w}, grad\varphi)$ - изменением перемещения или <u>конвективным изменением</u>.

Уравнения распространения теплоты в вещественной среде

Внимание! Для того чтобы подчеркнуть непосредственную связь между производной **dφ/dt** с движущейся средой (субстанцией), часто её обозначают специальным символом **Dφ/dt** и называют **субстанционной** производной:

$$\frac{D\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + w_X\frac{\partial\varphi}{\partial x} + w_Y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + w_Z\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{w}\cdot\nabla\right)\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \left(\vec{w}, grad\varphi\right), \text{ т.к. } \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{w}grad$$

Вводя значение субстанционной производной в уравнение Фурье-Кирхгофа, в векторной форме получаем:

$$div(\lambda gradT) + q_V + L_V + \frac{DP}{dt} - \frac{P}{\rho}\frac{D\rho}{dt} = \rho\frac{Di}{dt} + \rho\frac{D\,w^2/2}{dt}$$

В прямоугольной системе координат **уравнение Фурье-Кирхгофа** имеет вид:

$$\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial z} +$$

$$+\frac{\partial P}{\partial t} + w_X\frac{\partial P}{\partial x} + w_Y\frac{\partial P}{\partial y} + w_Z\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{P}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + w_X\frac{\partial\rho}{\partial x} + w_Y\frac{\partial\rho}{\partial y} + w_Z\frac{\partial\rho}{\partial z}\right) + q_V + L_V =$$

$$= \rho\left(\frac{\partial i}{\partial t} + w_X\frac{\partial i}{\partial x} + w_Y\frac{\partial i}{\partial y} + w_Z\frac{\partial i}{\partial z}\right) + \rho\left(\frac{\partial\, w^2/2}{\partial t} + w_X\frac{\partial\, w^2/2}{\partial x} + w_Y\frac{\partial\, w^2/2}{\partial y} + w_Z\frac{\partial\, w^2/2}{\partial z}\right)$$

Вывод: Решение системы уравнений, включающей в себя уравнения движения, неразрывности и распространения теплоты не является тривиальным, поэтому практика инженерных расчетов обуславливает необходимость введения обоснованных упрощающих допущений.

Семинар 4. *Частные случаи закона сохранения энергии и уравнений теплопроводности*

Модель невязкого нетеплопроводного газа

Поскольку энергия системы меняется за счет работы внешних сил и дополнительного потока энергии, ее производная по времени t равна мощности W, развиваемой действующими силами, плюс скорость притока дополнительной энергии Q, т.е. можно записать:

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{\omega(t)}\rho\left(\frac{1}{2}|w|^2+\varepsilon\right)d\omega=W+Q$$

где $\omega(t)$ – объем, ε – удельная внутренняя энергия.

В рамках данной модели, газ движется в отсутствии внешних силовых полей и внешних источников энергии. При этом, силами, действующими на объем $\omega(t)$ будут только поверхностные силы давления, направленные по нормали к поверхности этого объема. Это позволяет записать:

$$\vec{F}=-\iint\limits_{\gamma(t)}p\vec{n}\,d\gamma$$

где $\gamma(t)$ поверхность $\omega(t)$, n – единичный вектор внешней нормали к $\gamma(t)$.

Кроме того, в этой модели $Q=0$, а W есть мощность, развиваемая силами давления на $\gamma(t)$, т.е. $-p\vec{n}$

$$W=-\iint\limits_{\gamma(t)}p\vec{n}\cdot\vec{w}\,d\gamma$$

Частные случаи законов сохранения

Внимание! Вывод уравнения распространения теплоты основывается на законе сохранения энергии.

Область $\omega(t) \subset R^3$, состоящая при всех t из одних и тех же частиц, называется **движущимся объемом**.

Если энергия – $\iiint\limits_{\omega(t)} \rho\left(\frac{1}{2}|\vec{w}|^2 + \varepsilon\right)d\omega$, то закон сохранения энергии может быть записан в виде:

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{\omega(t)} \rho\left(\frac{1}{2}|\vec{w}|^2 + \varepsilon\right)d\omega = -\iint\limits_{\gamma(t)} p\vec{w}\cdot\vec{n}\,d\gamma$$

где полная энергия равна сумме кинетической и внутренней энергии.

Интегральные законы сохранения массы, импульса и энергии в рассматриваемой модели имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{\omega(t)} \rho\,d\omega = 0;\quad \frac{d}{dt}\iiint\limits_{\omega(t)} \rho\,d\omega = -\iint\limits_{\gamma(t)} \rho\vec{w}\cdot\vec{n}\,d\gamma;\quad \frac{d}{dt}\iiint\limits_{\omega(t)} \rho\left(\frac{1}{2}|\vec{w}|^2 + \varepsilon\right)d\omega = -\iint\limits_{\gamma(t)} p\vec{w}\cdot\vec{n}\,d\gamma$$

Соответственно, балансовые уравнения интегральных законов сохранения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{\omega} \rho\vec{w}\,d\omega = -\iint\limits_{\gamma} \rho\vec{n}\,d\gamma \qquad \frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{\omega} \rho\vec{w}\,d\omega = -\iint\limits_{\gamma} p\vec{n} + \rho\vec{w}(\vec{w}\cdot\vec{n})\,d\gamma$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{\omega} \rho\left(\frac{1}{2}|\vec{w}|^2 + \varepsilon\right)d\omega = -\iint\limits_{\gamma}\left(p + p\left(\frac{1}{2}|w|^2 + \varepsilon\right)\right)\vec{w}\cdot\vec{n}\,d\gamma$$

Замечание: Введенное здесь обозначение оператора дифференцирования ∂/∂t (вместо d/dt) подчеркивает, что ввиду независимости $\boldsymbol{\omega}$ от $\boldsymbol{t}$ этот оператор может быть внесен под знак интеграла как оператор частной производной по $\boldsymbol{t}$.

Модель невязкого нетеплопроводного газа

Внимание! Очевидно, что интегральные законы сохранения и балансовые уравнения равносильны, т.к. они выражают одни и те же физические законы применительно к газовой среде. Образующая их система уравнений содержит пять скалярных законов сохранения и связывают шесть искомых основных величин: три компонента вектора скорость и плотность, давления и внутреннюю энергию.

Вывод: Представленные системы уравнений являются неопределенными и для их дополнения требуется привлечение термодинамических и характеристических свойств среды.

Термодинамические свойства

При термодинамическом рассмотрении статистически равновесных процессов в атмосфере, наряду с введенными выше параметрами состояния: $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ обычно используют еще два основных параметра состояния: температуру $\boldsymbol{T}$ и удельную (отнесенную к единице массы) энтропию $\boldsymbol{S}$.

Вывод: Фактически при рассмотрении атмосферных явлений, обычно допускают, что атмосферный воздух как термодинамическая система является двухпараметрической средой. Это означает, что его состояние вполне определяется заданием каких-либо двух параметров. Следовательно упомянутые пять параметров должны быть связана тремя соотношениями.

Модель невязкого нетеплопроводного газа

Первый закон термодинамики

Фундаментальное свойство эквивалентности тепловой и механической энергии выражается в виде: $TdS = d\varepsilon + pdV$, где $V = 1/\rho$ – удельный объем.

Левая часть данного равенства равна количеству тепла, сообщенному единице массы, а **правая** – приращению внутренней энергии плюс работа расширения этой порции газа.

Замечание: Для двухпараметрических сред данное соотношение является определением энтропии.

Если рассматривать внутреннюю энергию как функцию удельного объема и энтропии, т.е. положить $\varepsilon = E(V,S)$, то данное равенство эквивалентно двум соотношениям: $p = E_v(V,S)$, $T = E_s(V,S)$.

Вывод: Задание функции *E(V,S)* полностью описывает всю термодинамику двухпараметрической среды. Однако на практике такое задание не всегда удобно и термодинамические свойства среды описываются другими соотношениями, в том числе характеристическими, основными из которых являются соотношения:

- *Идеального газа:* $pV=RT$;
- *Политропного газа:* $p=A(S)\rho^n$;
- *Нормального газа:* $p=f(\rho,S)$, $\varepsilon= e(V,p)$;
- *Нормальной жидкости:* $\rho =\varphi(p,t)$;
- *Несжимаемой изотермической жидкости (газа):* $\rho=const$; $T=const$.

Модель невязкого нетеплопроводного газа

<u>Вывод:</u> Даже при решении относительно простой задачи о движении идеальной, гомогенной среды <u>в пространстве</u> необходимо располагать как минимум <u>пятью</u> уравнениями, лишь после этого можно считать составление общей системы уравнений (обычно называемой системой уравнений Эйлера) <u>законченной</u>.

<u>Замечание</u>: В простейшем случае, **<u>одной</u>** пространной переменной, без введения дополнительных упрощающих допущений, количество таких уравнений может быть сокращено только до **<u>трех</u>**.

<u>Внимание</u>! Применительно к процессам в гидросфере, вместо уравнений Эйлера зачастую используются уравнения движения вязкой жидкости (уравнения Навье-Стокса):

$$X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dw_X}{dt} - \nu_X\left(\frac{\partial^2 w_X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_X}{\partial z^2}\right)$$

$$Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{dw_Y}{dt} - \nu_Y\left(\frac{\partial^2 w_Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_Y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_Y}{\partial z^2}\right)$$

$$Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dw_Z}{dt} - \nu_Z\left(\frac{\partial^2 w_Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_Z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_Z}{\partial z^2}\right)$$

<u>Вывод</u>: В практике инженерных расчетов для вязкой жидкости в пространстве, необходимо введение в систему либо дополнительных уравнений, либо обоснованных упрощающих допущений.

<u>Справочно</u>: Для реальных процессов тепломассообмена в биосфере, даже без учета дисперсности системы, количество необходимых уравнений может достигать **17 и более (обычно 14)**.

Семинар 5. *Основные уравнения кинематики и динамики невязкой жидкости*

Два метода исследования движения жидкости – метод Лагранжа и метод Эйлера

Замечание: Оба метода являются кинематическими, они математически связаны друг с другом и возможен переход от уравнений составленных по одному методу, к уравнениям составленным по другому.

Основные различия методов:

- По методу Лагранжа предусматривается изучение законов движения каждой индивидуальной частицы.
- В методе Эйлера задача заключается в изучении поля скоростей, ускорений и других параметров движения. При этом вопрос о том, как движется та или иная индивидуальная частица остается в стороне.

Основное допущение методов - жидкость (газ) рассматривается как легкодеформируемая непрерывная среда. В качестве мельчайшего структурного элемента среды принимается "частица" бесконечно малых размеров.

Метод Лагранжа

Движение одной какой-либо частицы жидкости определяется системой трех уравнений:

$$x = f_1(t); \; y = f_2(t); \; z = f_3(t)$$

где t – время, а x, y, z - координаты данной частицы, являющиеся функциями времени.

Внимание! Для описания движения всех частиц потока потребовалось бы бесконечное множество таких уравнений, что невозможно.

Замечание: Это затруднение можно устранить следующим образом: пусть в начальный момент времени t_0 (принятый за начало отсчета) каждая частица находится в определенной точке пространства, положение которой определяется координатами $x_0=a$, $y_0=b$, $z_0=c$, где a, b, c - начальные координаты.

Вывод: В результате выбор численных значений *a*, *b* и *c* является выбором конкретной частицы. Её текущие координаты будут другими, нежели текущие координаты частицы с другими начальными координатами. Поэтому для потока в целом текущие координаты зависят не только от времени, но и начальных координат.

Метод Лагранжа

Тогда, движение всей массы жидкости будет известным, если известна система:

$$x = f_1(a,b,c,t);\ y = f_2(a,b,c,t);\ z = f_3(a,b,c,t)$$

где начальные координаты ***a, b*** и ***c*** могут рассматриваться как независимые переменные, а текущие координаты ***x, y, z*** являются функциями четырех независимых переменных ***a,b,c,t***.,называемыми **координатами Лагранжа**.

Замечание: Если система известна (задана или найдена), то движение определяется в полной мере.

Здесь, составляющие скорости ***w*** любой частицы определяются как первые производные по времени от ***x, y, z*** и записываются в виде частных производных системы:

$$w_x = \frac{\partial f_1(a,b,c,t)}{\partial t};\ w_y = \frac{\partial f_2(a,b,c,t)}{\partial t};\ w_z = \frac{\partial f_3(a,b,c,t)}{\partial t}$$

ускорения как вторые:

$$a_x = \frac{\partial^2 f_1(a,b,c,t)}{\partial t^2};\ a_y = \frac{\partial^2 f_2(a,b,c,t)}{\partial t^2};\ a_z = \frac{\partial^2 f_3(a,b,c,t)}{\partial t^2}$$

полная скорость и ускорение в виде:

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2};\ a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

а направление ***w*** будет определено по косинусам углов ***α, β, γ***.

$$\cos\alpha = \frac{w_x}{w};\ \cos\beta = \frac{w_y}{w};\ \cos\gamma = \frac{w_z}{w}$$

Вывод: **При исследовании движения по методу Лагранжа геометрические характеристики движения являются траектории и линии отмеченных точек.**

Метод Лагранжа

Справочно: Траектория – линия, по которой движется некоторая частица, в частности жидкости.

Линия тока – кривая, проходящая через такие частицы, скорости которых в данный момент времени направлены по касательной к этой линии. Линии тока не пересекаются между собой.

Замечание: При **неустановившемся** движении линии тока и траектории не совпадают друг с другом. Они также могут не совпадать в гетерогенных системах.

Линия отмеченных точек – линия, на которой в данный момент времени лежат частицы жидкости прошедшие в свое время через одну и ту же начальную точку.

Замечание: При **установившемся** движении все эти три линии совпадают между собой.

Вывод: В методе Лагранжа траектория выбранной частицы N по выбранным (a_N, b_N, c_N) определяется либо непосредственно исходной системой, путем вычисления x, y, z для ряда моментов времени $t_1, \ldots t_2$, либо путем исключения из системы времени t, что приводит к двум уравнениям:

совместное решение которых дает траекторию.

$$\Phi_1(a,b,c,x,y,z)=0; \Phi_2(a,b,c,x,y,z)=0,$$

Метод Лагранжа

Пример 1. Пусть задана основная система уравнений движения некоторого потока:

$$x = a + wt; a = 0; y = b = 2; z = c = 3$$

Определить характер движения и его кинематические параметры.

Зная положение начальной частицы $M(t_0)$, определим для частицы $M(t)$ величину и направление скорости и ускорения.

1. Проекции полной скорости:

$$w_x = \frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{\partial (a + wt)}{\partial t} = w; w_y = \frac{\partial f_2}{\partial t} = \frac{\partial (b)}{\partial t} = 0; w_z = \frac{\partial f_3}{\partial t} = \frac{\partial (c)}{\partial t} = 0$$

2. Полную скорость:

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}$$

3. Направление движения:

$$\cos\alpha = \frac{w_x}{w} = 1, \alpha = 0; \cos\beta = \frac{w_y}{w} = 0, \beta = \frac{\pi}{2}; \cos\gamma = \frac{w_z}{w} = 0, \gamma = \frac{\pi}{2}$$

4. Составляющие ускорения:

$$a_x = \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 (a + wt)}{\partial t^2} = 0; a_y = \frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 (b)}{\partial t^2} = 0; a_z = \frac{\partial^2 f_3}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 (c)}{\partial t^2} = 0$$

Вывод: Движение потока является равномерным и прямолинейным.

Замечание: Этот простейший пример иллюстрирует последовательность решения задачи.

Метод Лагранжа

Пример 2. Составить общие уравнения движения и определить скорости и ускорения для случая вращения жидкости с постоянной угловой скоростью ω относительно оси **0z**, одинаковой для всех частиц.

Выберем произвольную точку $M(t_0)$ с координатами $x_0=a$, $y_0=b$, $z_0=c$, таким образом, чтобы ее радиус-вектор равный $r=\sqrt{a^2+b^2}$, был направлен под углом α к оси **0x**.

За время t точка M переместилась в положение $M(t)$ и радиус-вектор повернулся на угол $\alpha' = \omega t$. Тогда определим:

1. Координаты точки: $x = f_1(a,b,c,t);\ y = f_2(a,b,c,t);\ z = f_3(a,b,c,t)$

$$x = r\cos(\alpha+\alpha') = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\alpha+\omega t);\ y = r\sin(\alpha+\alpha') = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\omega t) : z = c$$

Замечание: Полученная система трех уравнений - **основная система уравнений движения в форме Лагранжа**.

2. Проекции полной скорости: $w_x = \dfrac{\partial f_1}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t}\left[\sqrt{a^2+b^2}\cos(\alpha+\omega t)\right] = -\omega r\sin(\alpha+\omega t);$

$$w_y = \frac{\partial f_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\omega t)\right] = \omega r\cos(\alpha+\omega t);\ w_z = \frac{\partial f_3}{\partial t} = \frac{\partial(c)}{\partial t} = 0$$

3. Полную скорость:

$$w = \sqrt{w_x^2+w_y^2+w_z^2} = \omega r\sqrt{[-\sin(\alpha+\omega t)]^2+[\cos(\alpha+\omega t)]^2} = \omega r$$

Метод Лагранжа

4. Направляющие косинусы скоростей:

$$\cos\alpha = \frac{w_x}{w} = \frac{-\omega r\sin(\alpha+\omega t)}{\omega r} = -\sin(\alpha+\omega t); \cos\beta = \frac{w_y}{w} = \frac{\omega r\cos(\alpha+\omega t)}{\omega r} = \cos(\alpha+\omega t); \cos\gamma = \frac{w_z}{w} = 0, \gamma = \frac{\pi}{2}$$

Замечание: Для данной частицы они переменные и зависят от угловой скорости ω и времени t.

5. Составляющие ускорения: $$a_x = \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} = \frac{\partial w_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[-\omega r\sin(\alpha+\omega t)\right] = -\omega^2 r\cos(\alpha+\omega t)$$

$$a_y = \frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2} = \frac{\partial w_y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\omega r\cos(\alpha+\omega t)\right] = -\omega^2 r\sin(\alpha+\omega t); a_z = \frac{\partial^2 f_3}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 (c)}{\partial t^2} = 0$$

6. Полное ускорение: $$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \omega^2 r = \frac{w^2}{r} = w\omega$$

7. Направляющие косинусы ускорений: $$\cos\alpha' = \frac{a_x}{a} = \frac{-\omega^2 r\cos(\alpha+\omega t)}{\omega^2 r} = -\cos(\alpha+\omega t);$$

$$\cos\beta' = \frac{a_y}{a} = \frac{-\omega^2 r\sin(\alpha+\omega t)}{\omega^2 r} = -\sin(\alpha+\omega t); \cos\gamma' = \frac{a_z}{a} = 0, \gamma' = \frac{\pi}{2}$$

Замечание: Для данной частицы они переменные и зависят от угловой скорости ω и времени t.

Вывод: Таким образом, в данном случае полная скорость частицы $w=\omega r=f(r)$ является функцией радиуса, а полное ускорение a направлено по радиусу r к центру, т.е. является центростремительным ускорением.

Семинар 6. *Метод Эйлера*

Основные понятия и определения

- **Динамическая система** – совокупность взаимодействующих объектов, состояние которой изменяется во времени, а ее свойства определяются ее параметрами.
- **Состояние системы** - состояние, определяемое совокупностью значений, характерных для данной системы величин, которые обычно называют параметрами состояния.
- **Переходный процесс** – изменение во времени координат динамической системы, возникающее под влиянием воздействий, резко изменяющих её состояние, структуру и параметры.
- **Нестационарное движение –** движение жидкости, при котором в каждой точке потока скорость жидкости, её давление и другие характеристики изменяются во времени.
- **Стационарное движение –** движение жидкости, при котором в каждой точке потока скорость жидкости, её давление и другие характеристики не изменяются во времени.

Замечание: Вследствие не нулевых начальных условий переходный процесс часто представляет собой переход от одного установившегося и/или равновесного состояния системы к другому установившемуся и/или равновесному состоянию.

- **Стационарное состояние (решение)** – состояние системы, при котором значения некоторых существенных для него характеристик не изменяются со временем.
- **Установившиеся процессы = стационарные процессы** – процессы, протекающие в системе, не изменяющей при этом своего состояния.
- **Установившееся движение = установившейся режим** – состояние динамической системы после окончания переходного процесса, когда система находится в равновесии, совершает вынужденные колебания, автоколебания и т.п.
- **Режим** – условие или область существования процесса.
- **Автомодельный режим** – режим, не зависимый от какого-либо параметра.

Метод Эйлера

Рассмотрим движение жидкости в некоторой области. В каждой точки этой области в данный момент времени частицы жидкости имеют скорость $\boldsymbol{w}$.

Внимание! Вся совокупность векторов, изображающих соответствующие скорости составляет – **векторное поле скоростей**.

В общем случае (при неустановившемся движении) всё поле изменяется во времени и компоненты скорости являются функциями не только координат, но и времени. Тогда, **основная система уравнений** имеет вид:

$$w_x = F_1(x, y, z, t); w_y = F_2(x, y, z, t); w_z = F_3(x, y, z, t)$$

Метод Эйлера

Для установившегося движения поле скоростей остается неизменным:

$$w_x = F_1(x, y, z); w_y = F_2(x, y, z); w_z = F_3(x, y, z)$$

Аналитическим условием установившегося движения будет:

$$\frac{\partial w_x}{\partial t} = \frac{\partial w_y}{\partial t} = \frac{\partial w_z}{\partial t} = 0$$

Замечание: Для того, чтобы полная скорость оставалась одной и той же как по направлению, так и по значению надо соблюдать **аналитическое условие**, лишь в этом случае полная скорость остается одной и той же, как по направлению, так и по значению.

Вывод: Равенства нулю частной производной полной скорости по времени $\partial w/\partial t=0$, ещё недостаточно.

Внимание! Строго говоря, для того чтобы движение было установившимся, т.к. частная производная $\partial w/\partial t$ определяет лишь изменение скорости во времени и если $\partial w/\partial t=0$, то это обозначает лишь, что w не изменяется **по величине**.

Однако при этом направление скорости может и изменяться, т.е. движение может быть и **неустановившимся**, **но стационарным**.

Метод Эйлера

Внимание! Если основная система уравнений движения известна, то можно определить полную скорость и по направлению и по значению.

При этом можно найти полное ускорение: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

где проекции ускорения по координатным осям будут равны:

$$a_x = a\cos\alpha = \frac{dw_x}{dt};\ a_y = a\cos\beta = \frac{dw_y}{dt};\ a_z = a\cos\gamma = \frac{dw_z}{dt}$$

Составим выражение полных производных $dw_x/dt,\ dw_y/dt,\ dw_z/dt$:

$$dw_x = \frac{\partial w_x}{\partial t}dt + \frac{\partial w_x}{\partial x}dx + \frac{\partial w_x}{\partial y}dy + \frac{\partial w_x}{\partial z}dz$$

После деления на dt получаем:

$$\frac{dw_x}{dt} = \frac{\partial w_x}{\partial t} + \frac{\partial w_x}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w_x}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w_x}{\partial z}\frac{dz}{dt};\ \frac{dw_x}{dt} = \frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x\frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y\frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z\frac{\partial w_x}{\partial z}$$

Полная производная $dw_x/dt=a_x$ представляет собой **полное ускорение** движения данной частицы в направлении оси **0x**. Она обычно направлена по скорости (но можно и произвольно) и иногда называется – **субстанционной (индивидуальной, материальной и т.п.) производной по времени**.

Частная производная $\partial w_x/\partial t$, представляет собой ускорение **в данной точке**, обусловленное неустановившимся движением жидкости ее часто называют **локальной производной**.

Метод Эйлера

Сумма - $w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z}$ представляет собой ускорение, связанное с неравномерностью движения при перемещении частицы жидкости в пространстве:

Вывод: Полная, т.е. субстанционная производная равна сумме локальной и конвективной.

Внимание! При установившемся движении локальная производная $\partial w_x/\partial t=0$, но конвективная может и не быть равной нулю – случай **неравномерного установившегося движения**.

Аналогично для других производных dw_y/dt, dw_z/dt.

Замечание: При исследовании движения жидкости по методу Эйлера геометрическими характеристиками движения являются **линии тока**, а не траектории, как в методе Лагранжа.

Пусть в данный момент времени имеем плоскую линию тока ab, её уравнение $y=f(x)$, где x, y - координаты точек данной линии. Тогда $w_y/w_x=tg\alpha$, где α - угол касательной к линии тока по отношению к оси **0x**. Поэтому:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = tg\alpha$$

и

$$\frac{dx}{w_x} = \frac{dy}{w_y}$$

или

$$\frac{dx}{F_1(x,y,z,t)} = \frac{dy}{F_2(x,y,z,t)}$$

Вывод: Это и есть дифференциальное уравнение линии тока на плоскости.

Метод Эйлера

При пространственном движении имеем:

$$\frac{dx}{w_x} = \frac{dy}{w_y} = \frac{dz}{w_z}$$

или более полно:

$$\frac{dx}{F_1(x, y, z, t)} = \frac{dy}{F_2(x, y, z, t)} = \frac{dz}{F_3(x, y, z, t)}$$

Внимание! Чтобы получить уравнение линии тока в конечной форме надо это уравнение проинтегрировать.

Принимая время t как параметр и интегрируя, получаем два уравнения:

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1(x, y, z, t) = C_1 \\ \Phi_2(x, y, z, t) = C_2\end{aligned}\right\}$$

Вывод: Совместное решение этих уравнений дает уравнение линии тока в конечной форме.

Замечание: Для установившегося движения линии тока совпадают с траекторией, а потому полученные уравнения будут одновременно и уравнениями траекторий.

Внимание! Переход от координат Лагранжа к координатам Эйлера производится дифференцированием, что всегда возможно. Обратный переход должен осуществляться путем интегрирования, что всегда сложнее, а иногда и невозможно.

Метод Эйлера

Пример 3. Составить общие уравнения движения, определить уравнения линий тока и скорости для случая вращения жидкости с постоянной угловой скоростью ω относительно оси **0z**, одинаковой для всех частиц.

Движение установившееся ($\omega = const$), не зависит от t, но неравномерное и основная система уравнений по Эйлеру может быть записана в виде:

$$w_x = F_1(x, y, z); w_y = F_2(x, y, z); w_z = F_3(x, y, z)$$

Для данного течения имеем:

$$w_x = F_1(x, y); w_y = F_2(x, y); w_z = F_3(x, y)$$

Полная скорость любой частицы: $w = \omega r = \omega\sqrt{x^2 + y^2}$

Тогда, основная система принимает вид:

$$w_x = -v\sin\alpha = -\omega\sqrt{x^2 + y^2}\sin\alpha; w_y = v\cos\alpha = \omega\sqrt{x^2 + y^2}\cos\alpha; w_z = 0$$

т.к. $\dfrac{dx}{w_x} = \dfrac{dy}{w_y}$ имеем: $\dfrac{dx}{-\omega\sqrt{x^2 + y^2}\sin\alpha} = \dfrac{dy}{\omega\sqrt{x^2 + y^2}\cos\alpha}$

После сокращения на $\omega\sqrt{x^2 + y^2}$ получаем: $\cos\alpha dx + \sin\alpha dy = 0$

с учетом: $\sin\alpha = y/r; \cos\alpha = x/r$ находим: $xdx + ydy = 0$

Окончательно после интегрирования имеем: $x^2 + y^2 = r^2$

Вывод: Уравнение линии тока – уравнение окружности.