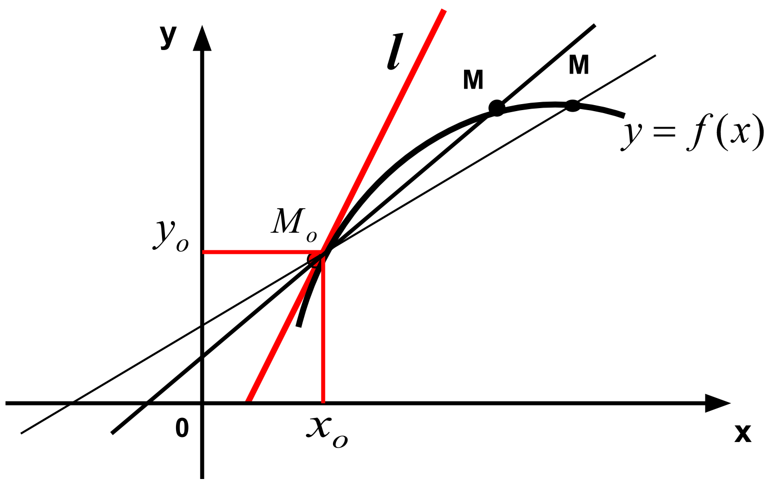
Производная функции (1)

- **Пусть** функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x (включая точку x).
- **Определение 1.**

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}}$$

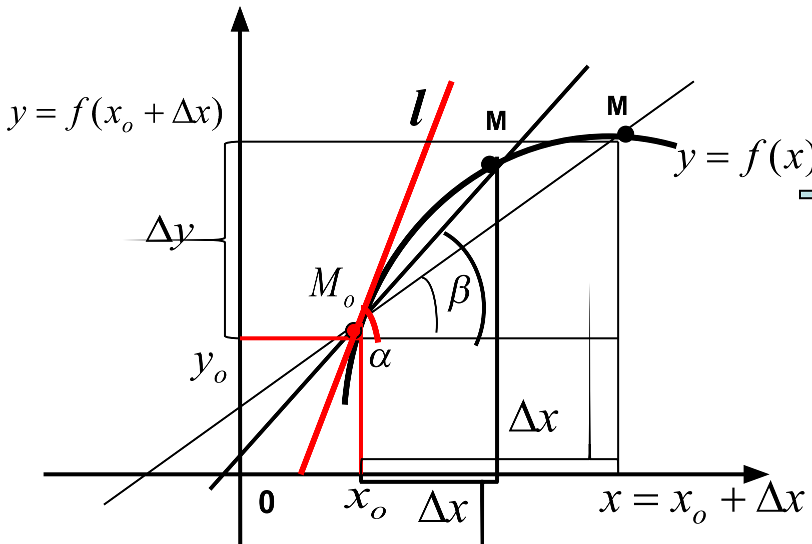
Производной функции $f(x)$ называется предел отношения **приращения функции** к **приращению аргумента**, когда **приращение аргумента** стремится к нулю.

- **Определение 2.**
- **Касательной** прямой l к графику функции
- $y = f(x)$ в точке x_o называется **предельное положение секущей** M_oM когда $M \to M_o$



Производная функции (2)

- **Геометрический смысл производной.**



$$M \to M_o \Leftrightarrow \Delta x \to 0$$

$$\angle\beta \to \angle\alpha$$

$$tg\beta \to tg\alpha$$

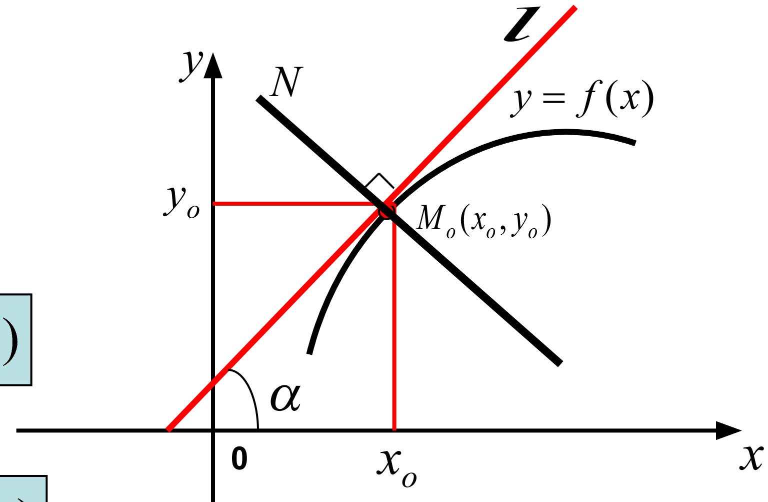
$$k_{сек.} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \to k_{кас.}$$

Значение производной функции $f(x)$ в точке x_o равно **угловому коэффициенту касательной** к графику этой функции в точке $M_o(x_o, y_o)$ где $y_o = f(x_o)$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k_{кас.}$$

Производная функции (3)

- **Уравнение касательной**
- **к графику функции.**



$$k_l = f'(x_o) \Longrightarrow y - y_o = f'(x_o) \bullet (x - x_0)$$

$$y = f(x_o) + f'(x_o) \bullet (x - x_0)$$

? $y - y_o = k(x - x_o)$

- **Определение 3.**
- **Нормалью** к графику функции $y = f(x)$ в точке x_o
- называется **прямая N**, проходящая через точку $M_o(x_o, y_o)$
- **перпендикулярно** касательной прямой l

- **Уравнение нормали к графику функции.**

$$k_N = -\frac{1}{k_l} \Rightarrow k_N = -\frac{1}{f'(x_o)} \Longrightarrow y = f(x_o) - \frac{1}{f'(x_o)} \bullet (x - x_0)$$

Производная функции (4)

- **Связь между существованием производной**
  - **и непрерывностью функции.**
  - **Теорема.**

$$\exists\ f'(x) \Rightarrow f(x) - \textit{непрерывна в т.} x$$

  - **Доказательство.**

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \Rightarrow \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$$

?

$$\textit{где } \alpha \to 0 \textit{ при } \Delta x \to 0$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x) \bullet \Delta x$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Delta f(x) \to 0 \textit{ при } \Delta x \to 0}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f(x) - \textit{непрерывна в т. } x}$$

?

Производная функции (5)

- **Правила дифференцирования.**
- **Пусть** $\exists f'(x)\ и\ \exists g'(x)$
- **Тогда**
- **1.** $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- **2.** $(f(x) \bullet g(x))' = f'(x) \bullet g(x) + f(x) \bullet g'(x)$
- **3.** $(C \bullet f(x))' = C \bullet f'(x)$
- **4.** $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \bullet g(x) - f(x) \bullet g'(x)}{(g(x))^2}$ $,\ если\ \ g(x) \neq 0$

Доказательство 1 правила (для суммы).

1 шаг. $\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g$

2 шаг. $\dfrac{\Delta(f+g)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta f}{\Delta x} + \dfrac{\Delta g}{\Delta x}$

3 шаг.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(f+g)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}$$

то есть

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Производная функции (6)

- **Таблица производных основных элементарных функций.**
- **1.** $(C)' = 0$
- **2.** $(x^n)' = n x^{n-1}$
- **3.** $(a^x)' = a^x \ln a$
- **4.** $(e^x)' = e^x$
- **5.** $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
- **6.** $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$$(x)' = 1$$

$$(x^2)' = 2x$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

- **7.** $(\sin x)' = \cos x$
- **8.** $(\cos x)' = -\sin x$
- **9.** $(tg\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- **10.** $(ctg\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

14. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Производная функции (7)

- **Вывод формулы 7:** $(\sin x)' = \cos x$
- **1.** $\Delta \sin x = \sin(x + \Delta x) - \sin x =$

  $= 2\cos\left(\dfrac{2x + \Delta x}{2}\right) \bullet \sin\dfrac{\Delta x}{2}$
- **2.** $$\frac{\Delta \sin x}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \bullet \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$
- **3.** $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \bullet \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

  ?

  1

  $(\sin x)' = \cos x$?

Производная функции (8)

- **Производная сложной функции.**
- **Теорема.**
- **1. y(x) –** сложная функция, то есть
  $$y = f(u)\ , u = \varphi(x) \Rightarrow$$
  $$y(x) \equiv f(\varphi((x))$$
- **2.** $\exists\, \varphi'(x)\ в\ т.\, x$
- **3.** $\exists\, f'(u)\ в\ т.\, u\ ,\ \ причем$
  $значение\quad u = \varphi(x)$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} y'(x) &= f'(u) \bullet \varphi'(x) \\ где\ u &= \varphi(x) \end{aligned}}$$

- **Доказательство.**
- 1..Возьмем $\Delta x \neq 0 \Rightarrow \Delta u \Rightarrow \Delta y$
- (предполагаем, что $\Delta u \neq 0$)
- 2. $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \bullet \frac{\Delta u}{\Delta x}$$
- 3. $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \bullet \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} =$$
  $$= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \bullet \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$ **(ч.т.д.)**

?

Производная функции (9)

- **Примеры.**
- **1.** $y = \ln \sin x$

  $y = \ln u\,,\; u = \sin x$

  $$y' = \frac{1}{u} \bullet \cos x = \frac{1}{\sin x} \bullet \cos x = ctgx$$

- **2.** $y = \ln^2 \sin x$

  $y = u^2,\; u = \ln t\,,\; t = \sin x$

  $$y' = 2u \bullet \frac{1}{t} \bullet \cos x = 2\ln \sin x \bullet \frac{1}{\sin x} \bullet \cos x =$$

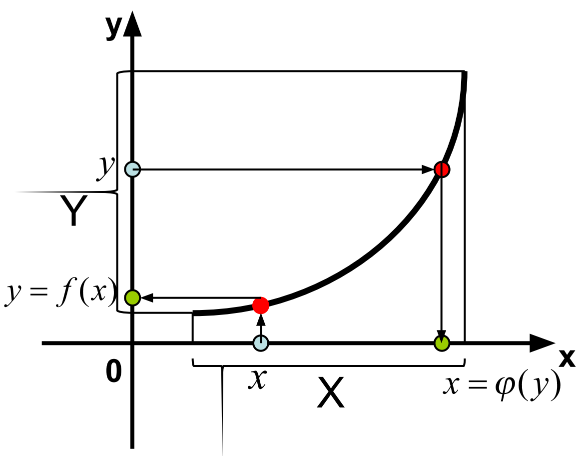
  $$= 2ctgx \bullet \ln \sin x$$

Производная функции (10)

- **Обратная функция.**
- **Определение.**
- Пусть $y = f(x) : X \to Y$

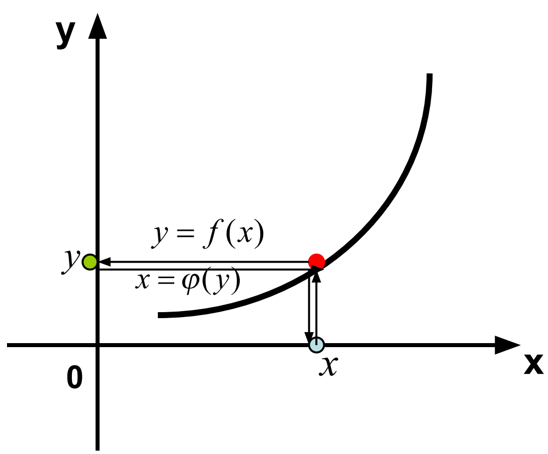
  $x = \varphi(y) : Y \to X$

  Функции $y = f(x) \text{ и } x = \varphi(y)$
- называются **взаимно обратными**,
- если $f(\varphi(y)) \equiv y \text{ всюду в } Y$
- или $\varphi(f(x)) \equiv x \text{ всюду в } X$



Функция $x = \varphi(y)$ называется **обратной к** $y = f(x)$

Функция $y = f(x)$ называется **обратной к** $x = \varphi(y)$



Графиками **взаимно обратных** функций является **одна и та же линия.**

Производная функции (13)

- **Производная обратной функции.**
- **Теорема.**
- **1.** $y = f(x) - \textit{непрерывная на } [a,b];$
- **2.** $y = f(x) - \textit{монотонная на } [a,b];$
- **3.** $\exists\ f'(x) \textit{ при } x \in (a,b) \textit{ и } f'(x) \neq 0$

$\Rightarrow$

1. $\exists\ x = \varphi(y) - \textit{обратная к } y = f(x);$

2. $x = \varphi(y) - \textit{непрерывная и монотонная};$

3. $(\exists)\quad \varphi'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$

- **Пример.**
- Вывод формулы 11 :

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- 1. $y = \arcsin x \Rightarrow x = \sin y$
- 2. $x' = \cos y \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x'} = \dfrac{1}{\cos y}$
- 3. $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$

$\Rightarrow$ $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos y \geq 0$$

Производная функции (14)

- **Функции, заданные параметрически.**
- **Определение 1.**
- Говорят, что **функция задана параметрически**,
- если задана пара функций

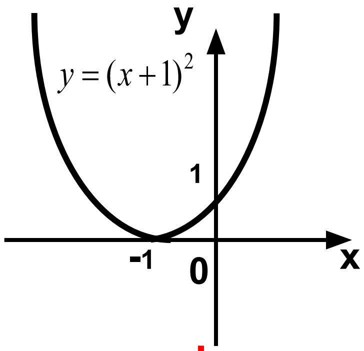
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \ t \in [t_1, t_2], \end{cases}$$

- ***t*** называется **параметром.**
- **Пример.**

$$\begin{cases} x = t - 1, \\ y = t^2, \quad t \in (-\infty, \infty) \end{cases}$$

1. *Функция* $y(x)$:

$$t = x + 1 \Rightarrow y = (x+1)^2$$



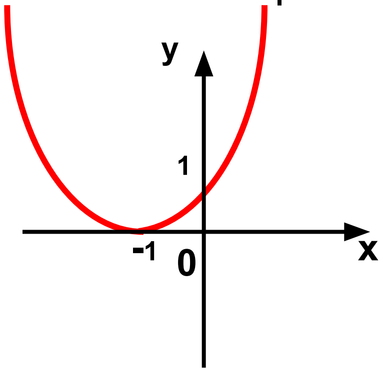
2. *Функция* $x(y)$:

$$t \in [0, \infty) \Rightarrow t = \sqrt{y}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{y} - 1;$$

$$t \in (-\infty, 0] \Rightarrow t = -\sqrt{y}$$

$$\Rightarrow x = -\sqrt{y} - 1.$$



Производная функции (16)

- **Производная функции, заданной параметрически.**
- **Теорема.**
- Пусть
  - **1.** $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \ \ t \in [t_1, t_2]; \end{cases}$
  - **2.** $\varphi(t) - \textit{непрерывная}$, $\textit{монотонная} \ \ \textit{на} \ [t_1, t_2];$
  - **3.** $\exists \, \varphi'(t_0), t_0 \in (t_1, t_2),$ $\varphi'(t_0) \neq 0$;
  - **4.** $\psi(t) - \textit{непрерывная}$ $\textit{на} \ [t_1, t_2];$
  - **5.** $\exists \ \psi'(t_0)$

$\Rightarrow$

$\textit{В точке} \ x_0 = \varphi(t_o)$

$$\exists \ y'(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$$

Производная функции (17)

- **Производные высших порядков.**
- **Определение 1.**
- Производная $y' = f'(x)$
- называется производной
- **первого порядка** функции $y = f(x)$

- **Определение 2.**
- **Производная** от производной первого порядка
- называется **производной второго порядка**
- функции

$$y = f(x)\ :\quad y'' = (f'(x))'$$

- **Определение 3.**
- **Производная** от производной (n-1) -порядка
- называется **производной n – порядка**
- функции

$$y = f(x)\ :\quad y^{(n)} = (f^{(n-1)}(x))'$$

Пример.

$$y = a^x \Rightarrow \quad y' = a^x \ln a\ ;$$

$$y'' = a^x (\ln a)^2\ ;$$

$$\ldots$$

$$y^{(n)} = a^x (\ln a)^n$$

Производная функции (4)

- **Связь между существованием производной и непрерывностью функции.**
  - **Теорема.**

$$\exists\ f'(x) \Rightarrow f(x) - \textit{непрерывна в т.}\, x$$

  - **Доказательство.**

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$$

$$\textit{где}\ \alpha \to 0\ \textit{при}\ \Delta x \to 0$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x) \bullet \Delta x$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Delta f(x) \to 0\ \textit{при}\ \Delta x \to 0}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f(x) - \textit{непрерывна в т.}\, x}$$

- **Связь между существованием производной**

- **Замечание.** Обратное утверждение теоремы неверно, т.е. из непрерывности функции $y = f(x)$ в точке x_0 не следует существование производной функции $y = f(x)$ в этой точке.

  Пример.
$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

  Эта функция непрерывна в точке $x = 0,$ но в этой точке функция не имеет производной.

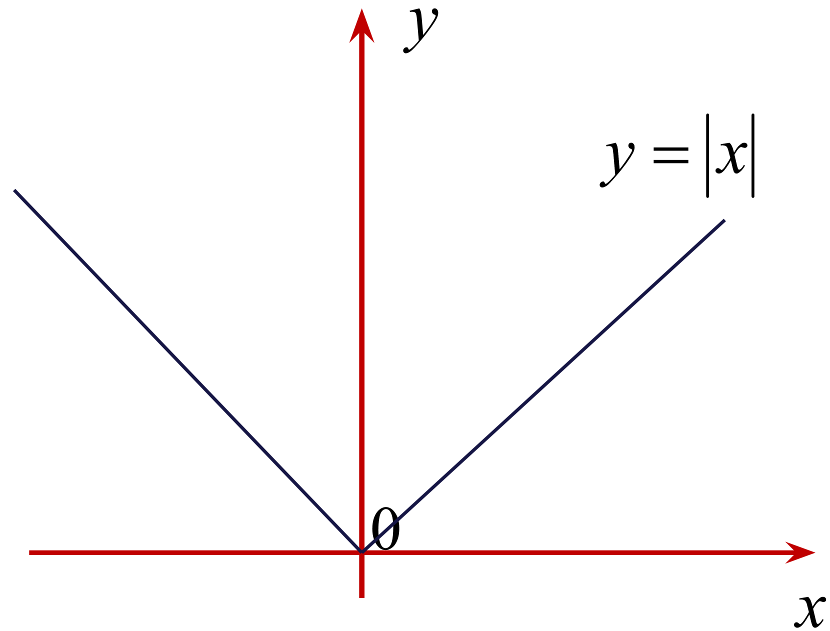
Действительно, для функции

$y = |x|$ в точке x_0 имеет

место

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \Delta x \geq 0, \\ -1, & \Delta x < 0. \end{cases}$$



$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} -$$

не существует, ⇒

т.е. функция не имеет производную в этой точке.