

Правила построения рядов динамики

Основным условием для получения правильных выводов при анализе рядов динамики и прогнозирования его уровней является сопоставимость уровней динамического ряда между собой.

- *Сопоставимость по территории* предполагает одни и те же границы территории.
- *Сопоставимость по кругу охватываемых объектов* означает сравнение совокупности с равным числом элементов.
- *Сопоставимость по времени регистрации* для интервальных рядов обеспечивается равенством периодов времени, за которые приводятся данные; для моментных рядов динамики показатели следует приводить на одну и ту же дат
- *Сопоставимость по ценам.*
- *Сопоставимость по методологии расчета.*

Смыкание рядов динамики.

При изучении динамики какого-либо явления может получиться, что данные за какой-либо период промежуток времени несопоставимы в результате изменившихся условий (территории, методология расчета и т.п.). Поэтому получают два динамических ряда:

- до изменения условий;
- после изменения условий.

Пример. Данные об урожайности области, границы которой были изменены в 2000 г.

	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
До изменения границ	19	21	22	24				
После изменения границ				26	27	28	29	29
До изменения границ	79	87	91	100				
После изменения границ				100	104	107	111	111
Сомкнутый ряд	79	87	91	100	104	107	111	111

$$19 - 24 \left. \begin{array}{l} x \\ x \end{array} \right\} 100 \quad x = 19 \cdot 100 / 24$$

Таким образом величину показателей за период времени, в котором произошло изменение принимают за базу сравнения и затем рассчитывают относительную величину динамики. В результате получается непрерывный ряд относительных величин за весь рассматриваемый период.

Методы выявления общей тенденции развития

- **Основной тенденцией развития (*трендом*)** называется плавное и устойчивое изменение уровня явления во времени, свободное от случайных колебаний.
- Задача состоит в том, чтобы выявить общую тенденцию в изменении уровней ряда, освобожденную от действия различных случайных факторов.

1. Укрупнение периодов времени

- Метод основан на укрупнении периодов времени, к которым относится уровни ряда динамики (одновременно уменьшается количество интервалов).
- **Пример.** Динамика производства продукции одного предприятия.

	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
Продукция	125	103	135	120	125	131	140	107	152	121
	228		255			256	247		273	
	608					651				
	114	128		128		124		137		

Недостаток метода заключается в том, что при анализе показателей не используются данные первоначального динамического ряда, а учитываются произвольные значения показателей.

2. Метод скользящей средней

- Сущность этого метода в том, что последовательно исчисляется средний уровень из определенного числа, обычно нечетного (3, 5, 7 и т.д.) первых по счету уровней ряда, затем находят средние значения членов ряда начиная со второго и т.д. нечетное число периодов берется для того, чтобы иметь середину периода, к которому относят рассчитанную среднюю величину.
- То есть при расчете скользящей средней скользят от начала динамического ряда к его концу, при этом каждый раз отбрасывается один уровень в начале ряда и добавляется последующий.

Метод скользящей средней основан на том свойстве средних величин, что в средних случайные величины взаимно погашаются.

Месяц	Отчет	Усредненная величина
Январь	51	-
Февраль	53	52
Март	52	53
Апрель	54	53
Май	52	54
Июнь	54	55
Июль	55	56
Август	56	56
Сентябрь	56	59
Октябрь	60	60
Ноябрь	59	60
Декабрь	60	-

Аналитическое выравнивание ряда динамики.

- Основным содержанием метода аналитического выравнивания в рядах динамики является то, что общая тенденция развития рассчитывается как функция времени:

$$y_t = f(t) \quad \text{где}$$

y_t – уровни динамического ряда, вычисленные по соответствующему аналитическому уравнению на момент времени t .

Определение расчетных уровней y_t производится на основе ***адекватной математической модели.***

Простейшими моделями, выражающими тенденцию развития, являются:

- *Линейная функция – прямая* $y_t = a_0 + a_1 \times t$, где a_0, a_1 – параметры уравнения; t – время.
- *Показательная функция* $y_t = a_0 \times a_1^t$
- *Степенная функция – парабола* $y_t = a_0 + a_1 \times t + a_2 \times t^2$

Расчет параметров функции обычно производится методом наименьших квадратов, в котором в качестве решения принимается точка минимума суммы квадратов отклонений между теоретическими и эмпирическими уровнями:

$\sum (y_t - y_i)^2 \rightarrow \min$, где
 y_t – выровненные (расчетные) уровни, y_i – фактические уровни.

Типы развития социально-экономических явлений во времени:

- 1) **Равномерное развитие.** Для этого типа динамики присущи постоянные абсолютные приросты:

$$\Delta y_t \cong const$$

Основная тенденция развития в рядах динамики со стабильными абсолютными приростами отображается уравнением

прямолинейной функции
$$y_t = a_0 + a_1 \times t$$

Параметр a_1 является коэффициентом регрессии, определяющим направление развития.

Если $a_1 > 0$, то уровни ряда динамики равномерно возрастает, а при $a_1 < 0$ происходит их равномерное снижение.

2) **Равноускоренное (равнозамедленное) развитие.**

Этому типу динамики свойственно постоянное во времени увеличение (замедление) развития. Уровни таких рядов динамики изменяются с постоянными темпами прироста:

$$T_{np\ u} \cong const$$

Основная тенденция развития в рядах динамики со стабильными темпами прироста отображается функцией параболы второго порядка

$$y_t = a_0 + a_1 \times t + a_2 \times t^2$$

Параметр a_2 характеризует **постоянное изменение интенсивности развития** (в единицу времени). При $a_2 > 0$ происходит ускорение развития, а при $a_2 < 0$ идет процесс замедления роста.

3) **Развитие с переменным ускорением (замедлением).** Для этого типа динамики основная тенденция развития выражается функцией параболы третьего порядка

$$y_t = a_0 + a_1 \times t + a_2 \times t^2 + a_3 t^3$$

Параметр a_3 отображает изменение ускорения.

При $a_3 > 0$ ускорение возрастает, а при $a_3 < 0$ ускорение замедляется.

4) **Развитие по экспоненте.** Этот тип динамики характеризуют стабильные темпы роста:

$$T_{p_u} \cong const$$

Основная тенденция в рядах динамики с постоянными темпами роста отображается показательной функцией

$$y_t = a_0 \times a_1^t$$

где a_1 – темп роста (снижения) изучаемого явления в единицу времени, т.е. интенсивность развития.

Пример: применения метода аналитического выравнивания при статистическом изучении тренда. По данным о розничном товарообороте региона в 1999-2004 г.г.:

Год	Объем розничного товарооборота, млрд.руб.	Темп роста по годам, %	Абсолютный прирост по годам, млрд.руб.
1999	11,18	-	-
2000	12,23	109,4	1,05
2001	13,28	108,6	1,05
2002	14,31	107,7	1,03
2003	15,36	107,3	1,05
2004	16,40	106,8	1,04
В среднем	14,32	107,9	1,04

Из таблицы видно, что развитие товарооборота происходило с затухающими темпами роста и относительно стабильными абсолютными приростами. Поскольку при среднем абсолютном приросте, равном 1,04 млрд.руб., величина их изменений незначительная (+0,01 млрд.руб.), то анализируемый ряд динамики можно считать с равномерным развитием. Поэтому для аналитического выравнивания применяется функция $y_t = a_0 + a_1 \times t$

- Для вычисления параметров функции на основе требований метода наименьших квадратов составляется система нормальных уравнений:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum t = \sum y; \\ a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 = \sum t \times y \end{cases}$$

- Для решения системы уравнений обычно применяется способ определителей, позволяющий получать более точные результаты за счет сведения к минимуму ошибки из-за округлений в расчетах параметров:

$$a_0 = \frac{\sum y \sum t^2 - \sum ty \sum t}{n \sum t^2 - \sum t \sum t};$$

$$a_1 = \frac{n \sum ty - \sum t \sum y}{n \sum t^2 - \sum t \sum t}.$$

Составляем матрицу расчетных показателей:

Год	Y_i	t_i	t_i^2	$t_i y_i$	$Y t_i$
1999	11,18	1	1	11,18	11,183
2000	12,23	2	4	24,46	12,226
2001	13,28	3	9	39,84	13,269
2002	14,31	4	16	57,24	14,312
2003	15,36	5	25	76,80	15,355
2004	16,40	6	36	98,40	16,398
Σ	82,76	21	91	307,92	82,743

Тогда

$$a_0 = \frac{82,76 \times 91 - 307,92 \times 21}{6 \times 91 - 21 \times 21} = 10,14 \text{ млрд.руб.};$$

$$a_1 = \frac{6 \times 307,92 - 21 \times 82,76}{6 \times 91 - 21 \times 21} = 1,043 \text{ млрд.руб.}$$

- По вычисленным параметрам производим синтезирование трендовой модели функции:

$$y_t = 10,14 + 1,043 \times t$$

- На основе модели определяются теоретические уровни тренда для каждого года анализируемого ряда динамики. Например,

$$y_{1999t} = 10,14 + 1,043 \times 1 = 11,183 \text{ млрд.руб.}$$

- Правильность расчета проверяется по равенству

$$\sum y_i = \sum y_{ti} \Rightarrow 82,76 \approx 82,743$$

- Несовпадение в на 0,017 млрд.руб. объясняется округлениями в расчете. Параметр a_1 показывает, что объем розничного товарооборота региона возрастал в среднем на 1,043 млрд.руб. в год.

- Расчет параметров значительно упрощается, если за начало отсчета времени ($t=0$) принять центральный интервал (момент).
- При четном числе уровней (например, 6), значения t – условного обозначения времени будут такими:

1999	2000	2001	2002	2003	2004
-5	-3	-1	+1	+3	+5

- При нечетном числе уровней (например, 7) значения устанавливаются по-другому:

1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
-3	-2	-1	0	+1	+2	+3

- В обоих случаях $\sum t = 0$ так что система нормальных уравнений принимает вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} na_0 = \sum y \\ a_1 \sum t^2 = \sum t \times y \end{array} \right. \quad a_0 = \frac{\sum y}{n}; \quad a_1 = \frac{\sum yt}{\sum t^2}$$

Год	y_i	ti	ti^2	ty_i
1999	11,18	-5	25	-55,90
2000	12,23	-3	9	-36,69
2001	13,28	-1	1	-13,28
2002	14,31	+1	1	14,31
2003	15,36	+3	9	46,08
2004	16,40	+5	25	82,00
Σ	82,76	0	70	36,52

$$a_0 = \frac{82,76}{6} = 13,79$$

$$a_1 = \frac{36,52}{70} = 0,522$$

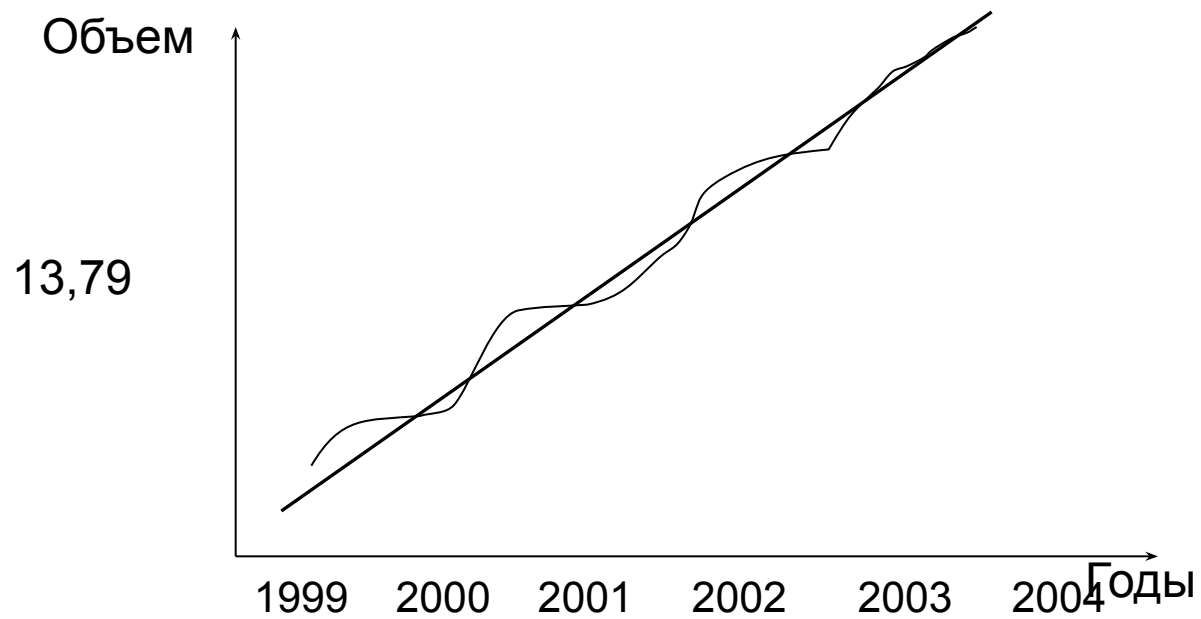
$$y_t = 13,79 + 0,522 \times t$$

$$y_{1999t} = 13,79 + 0,522 \times (-5) = 11,18 \text{ млрд.руб.}$$

Правильность расчета проверяется по равенству

$$\Sigma y_i = \Sigma y_{ti}$$

Фактические и расчетные показатели представим в виде графика:



Методы изучения сезонных колебаний

- **Индексами сезонности** являются процентные отношения фактических (эмпирических) внутригрупповых уровней к теоретическим (расчетным) уровням, выступающим в качестве базы сравнения.
- Для того, чтобы выявить устойчивую сезонную волну, на которой не отражались бы случайные условия одного года, индексы сезонности вычисляются за ряд лет.

$$I_{сез} = \frac{y_i}{y_{выр}} \times 100\%$$

Пример.

	я	ф	м	а	м	и	и	а	с	о	н	д
2001	0,1	0,1	0,2	0,8	0,9	0,1	0,7	0,6	0,9	0,9	0,3	0,1
2002	0,1	0,1	0,1	0,7	1,0	1,1	0,8	0,5	1,0	0,8	0,2	0,1
2003	0,1	0,1	0,2	0,9	1,1	1,2	0,6	0,6	1,1	0,6	0,1	0,1
Сумма	0,3	0,3	0,5	2,4	3	2,4	2,1	1,7	3	2,3	0,6	0,3
В среднем за месяц	0,1	0,1	0,16	0,8	1,0	0,8	0,7	0,56	1,0	0,76	0,2	0,1
В % к сред. Мес. за 3 года	18	18	29	148	185	203	129	103	185	140	13	18

$$\bar{X}_{мес} = (0,1 \times 3 + 0,16 + 0,8 + 1,0 \times 2 + 1,1 + 0,7 + 0,56 + 0,76 + 0,2) / 12 = 0,548$$

$$\text{В \% к ср.мес. за 3 года} = 0,1 / 0,58 \times 100 = 18\%$$

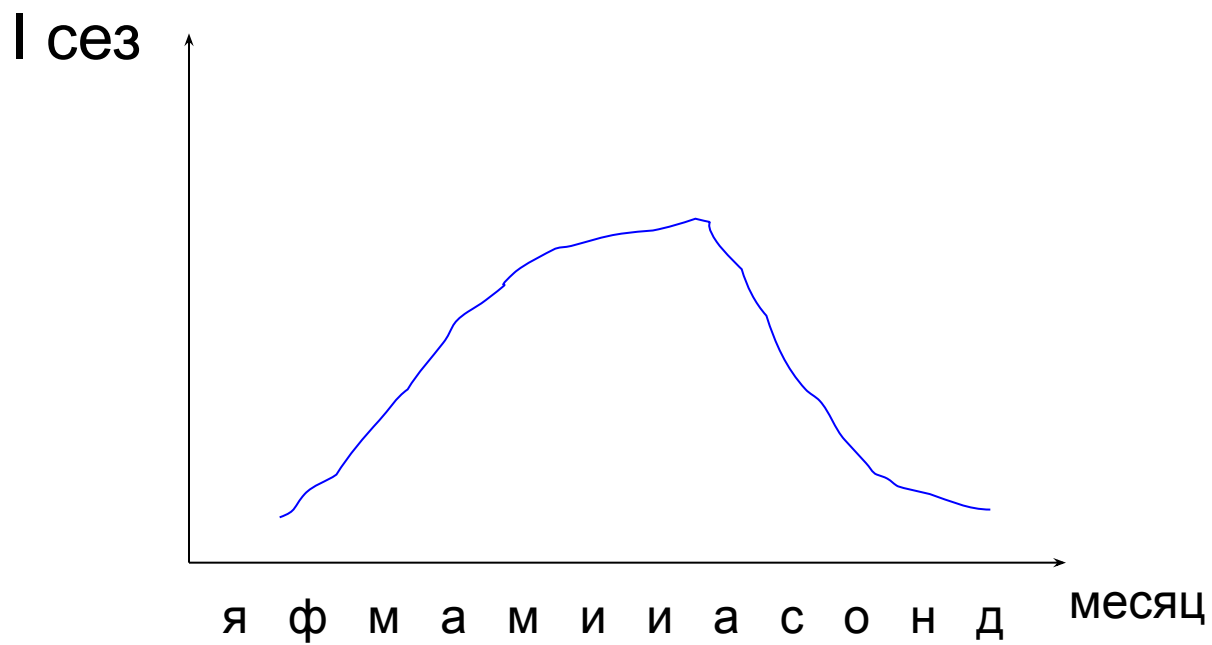


Рис. Сезонная волна

Интерполяция и экстраполяция

- **Интерполяция** – процесс нахождения неизвестного промежуточного члена ряда динамики.
- **Экстраполяция** – процесс нахождения уровня ряда за его пределами. Поскольку в действительности тенденция развития не остается неизменной, то данные, получаемые путем экстраполяции ряда, следует рассматривать как вероятностные оценки.

Зная уравнение для теоретических уровней и подставляя в него значения t за пределами исследованного ряда, рассчитывают для t вероятностные уровни.

Так, по данным таблицы на основе исчисленного ранее уравнения

$$y_t = 10,14 + 1,043 \cdot t$$

экстраполяция при $t = 12$, т.е. 2010 году розничный товарооборот составит:

$$y_t = 10,14 + 1,043 \times 12 = 22,656$$