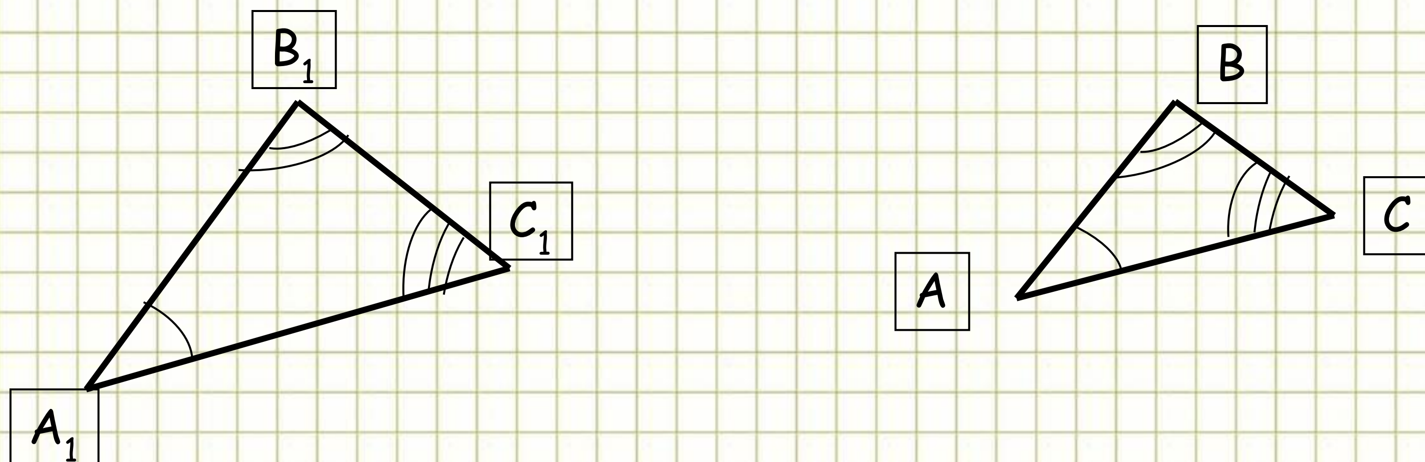
Решение задач по теме: «Признаки подобия треугольников»

Высшее назначение математики - находить порядок в хаосе, который нас окружает.

Н. Винер (1894 - 1964)

Треугольники называются подобными, если углы одного треугольника равны углам другого треугольника и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого.

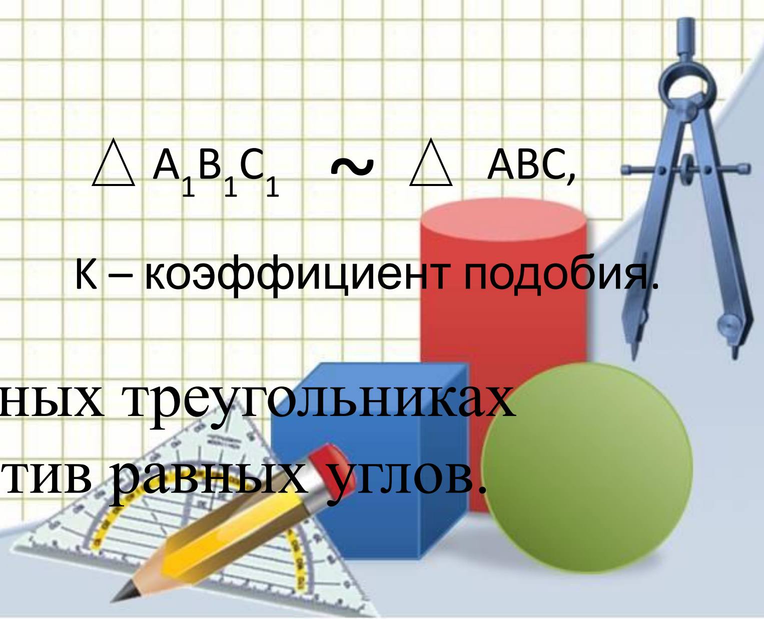


$\angle A_1 = \angle A,\ \angle B_1 = \angle B,\ \angle C_1 = \angle C,$

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = k.$$

$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC,$

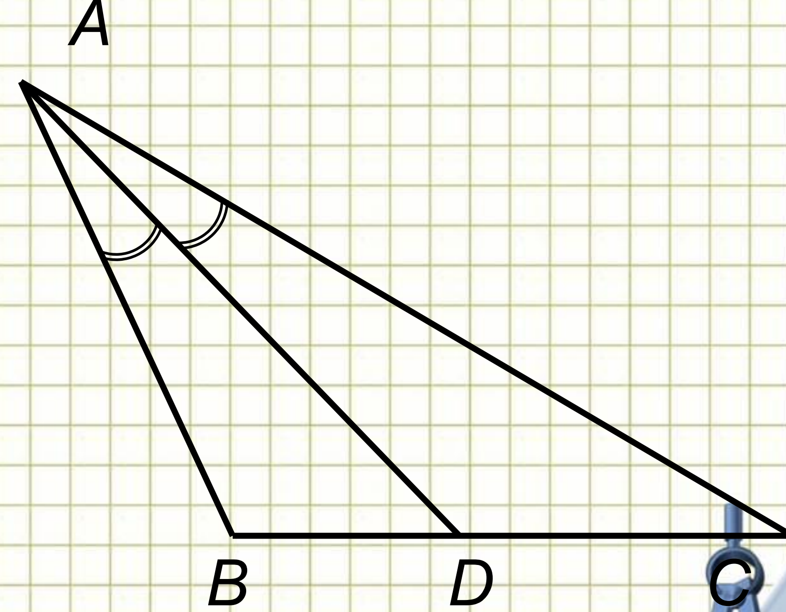
К – коэффициент подобия.



Сходственными сторонами в подобных треугольниках называются стороны, лежащие против равных углов.

Свойство биссектрисы треугольника

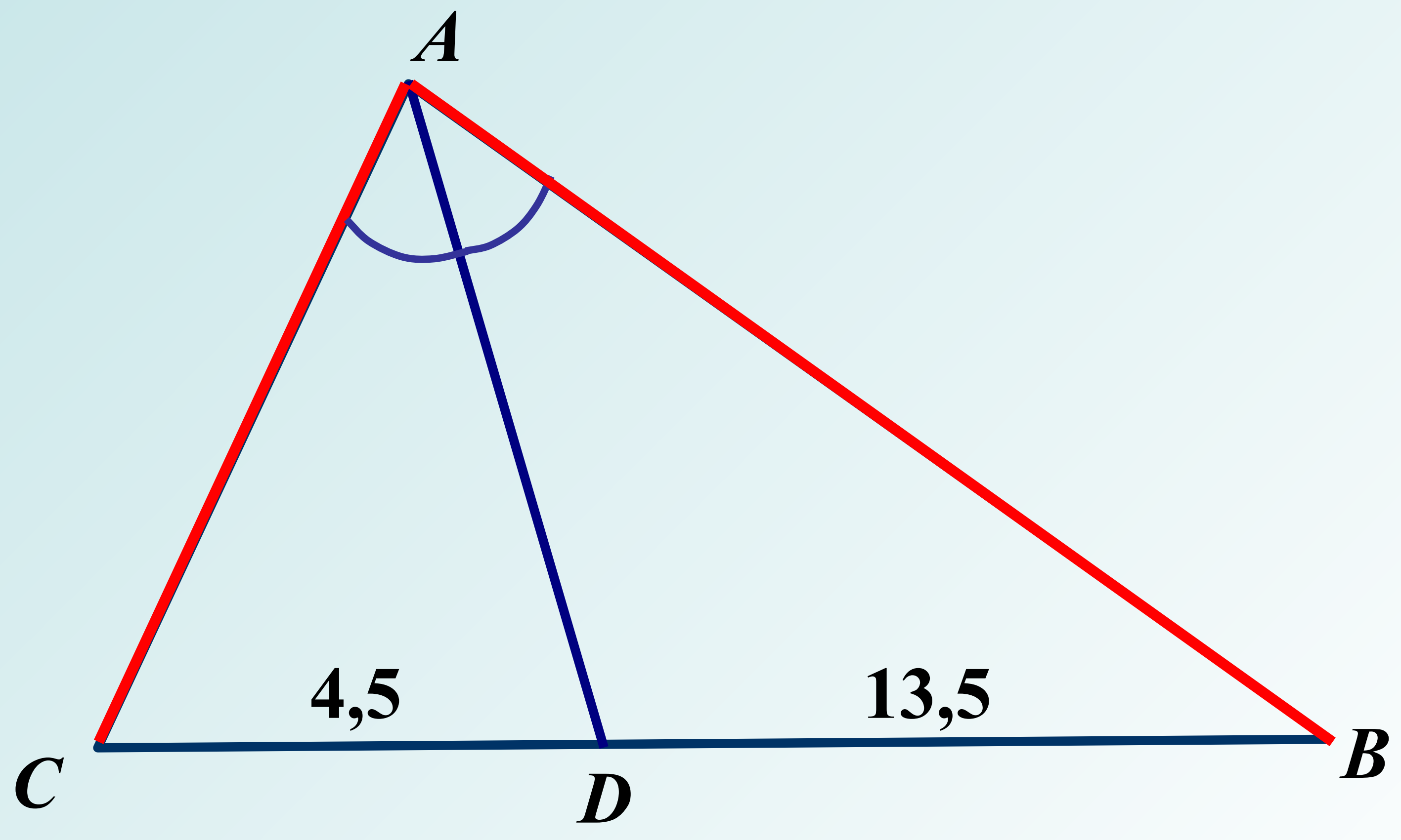
Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.



$$\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$$ или $$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

Дано: $\Delta ABC,\ P_{ABC} = 42$

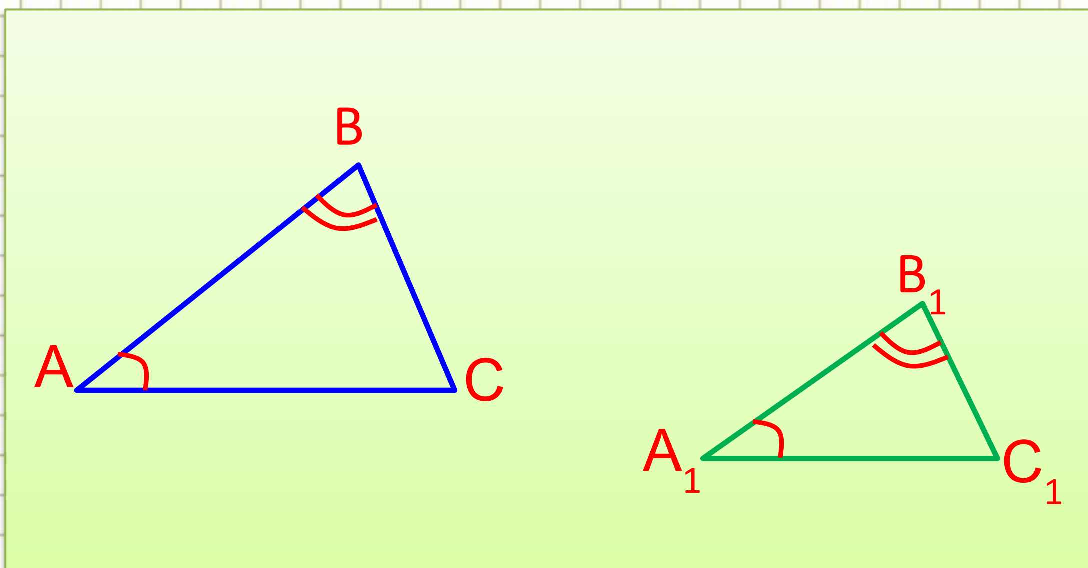
Найти: $AC,\ AB$



Вспомним:

Первый признак подобия треугольников:

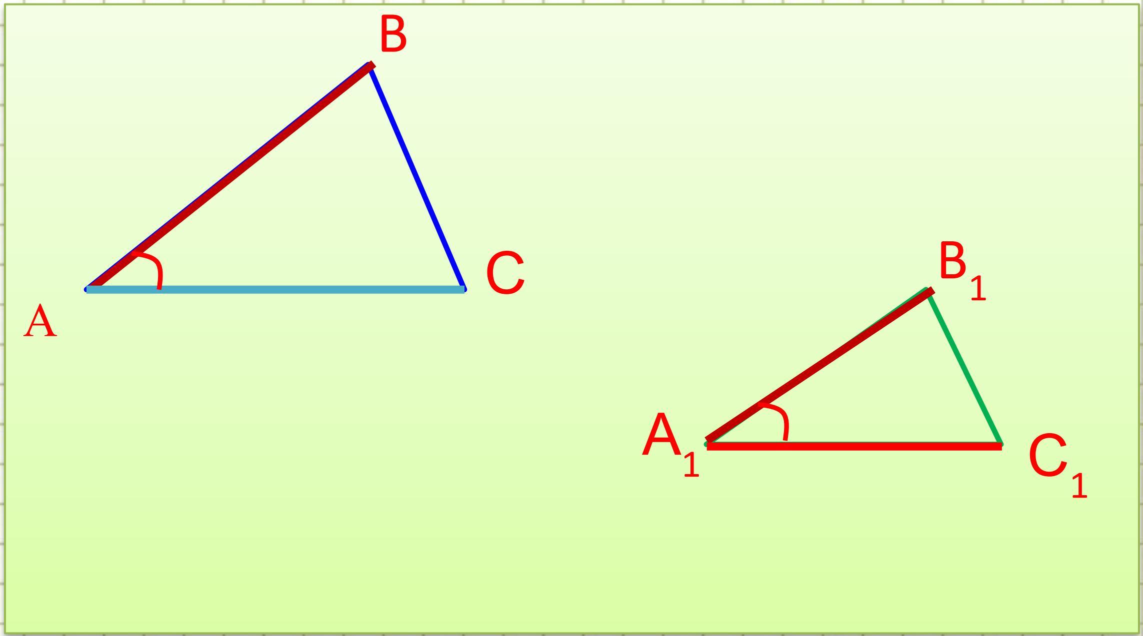
1. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

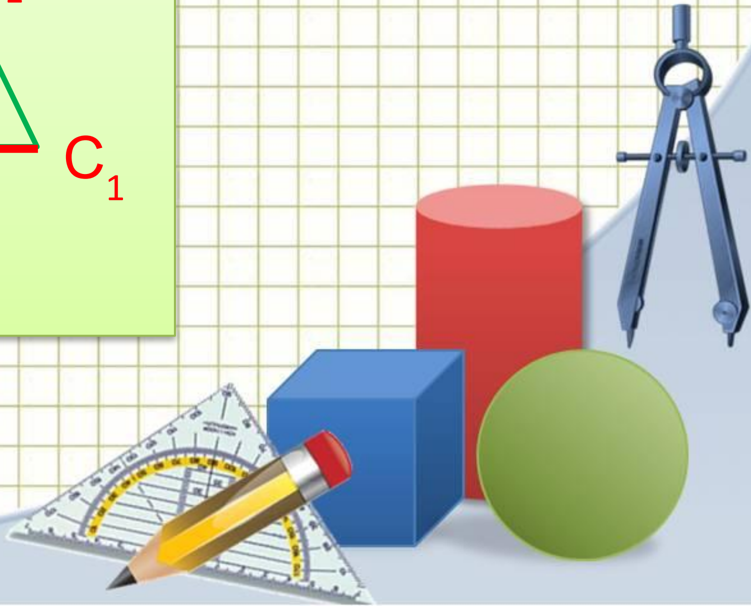


Вспомним:

Второй признак подобия треугольников:

2. Если **две стороны** одного треугольника **пропорциональны двум сторонам** другого треугольника и **углы, заключенные между** этими **сторонами равны**, то такие треугольники подобны.

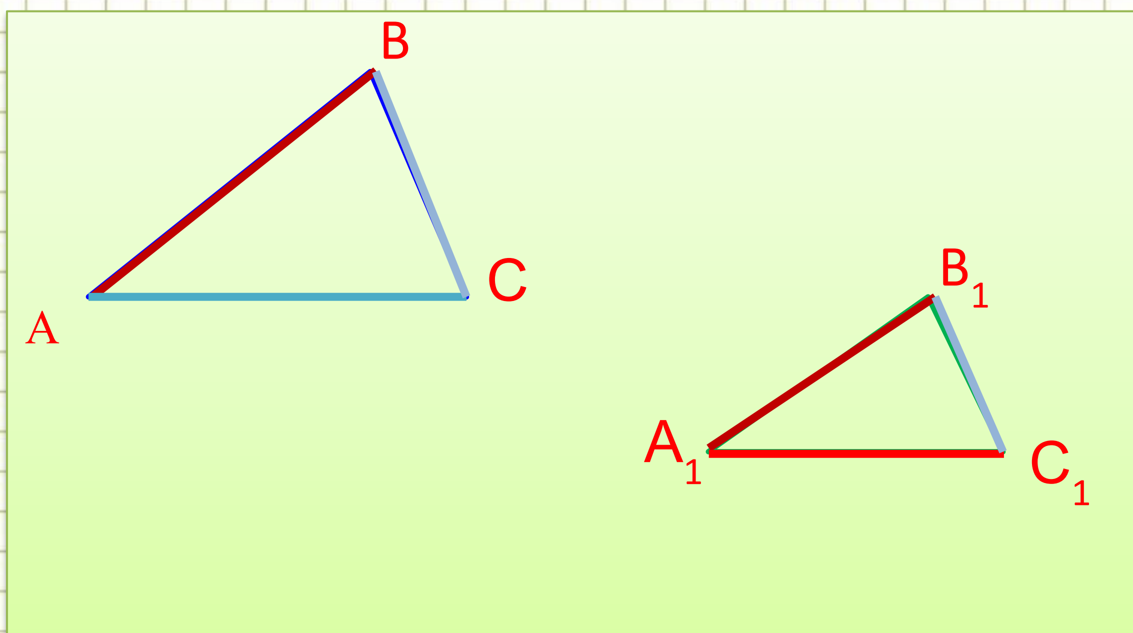




Вспомним:

Третий признак подобия треугольников:

3.Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.



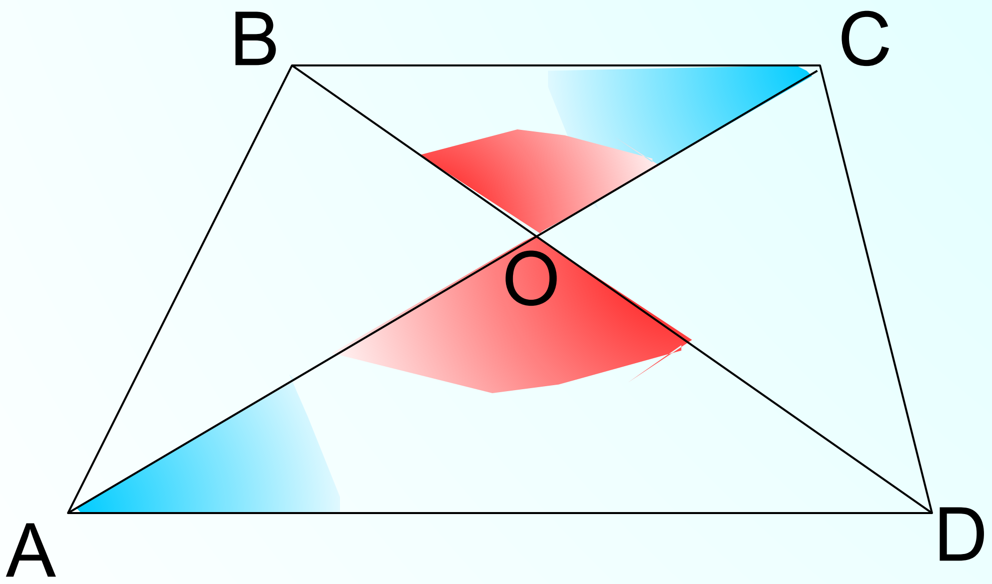
Блиц-опрос

ABCD – трапеция. Найдите пары подобных треугольников и докажите их подобие.

$$\angle BOC = \angle AOD, \qquad \angle OAD = \angle OCB$$

$\triangle$ AOD $\sim$ $\triangle$ COD по 1 признаку

Запишите равенство отношений соответствующих сторон.



$$\frac{BC}{AD} = \frac{OB}{OD} = \frac{AO}{OC}$$

?

Блиц-опрос Докажите подобие треугольников.

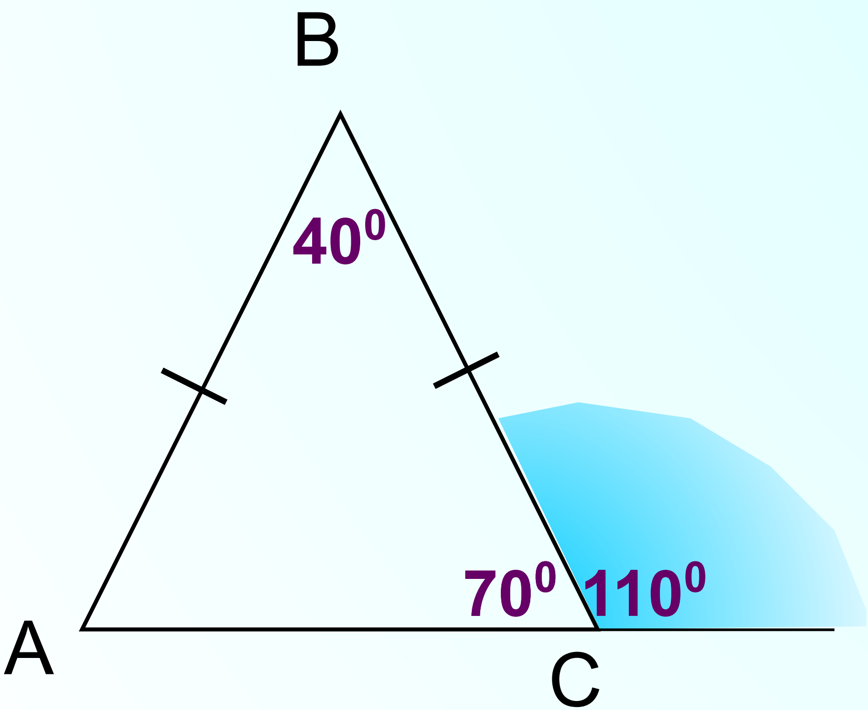
Запишите равенство отношений соответствующих сторон.

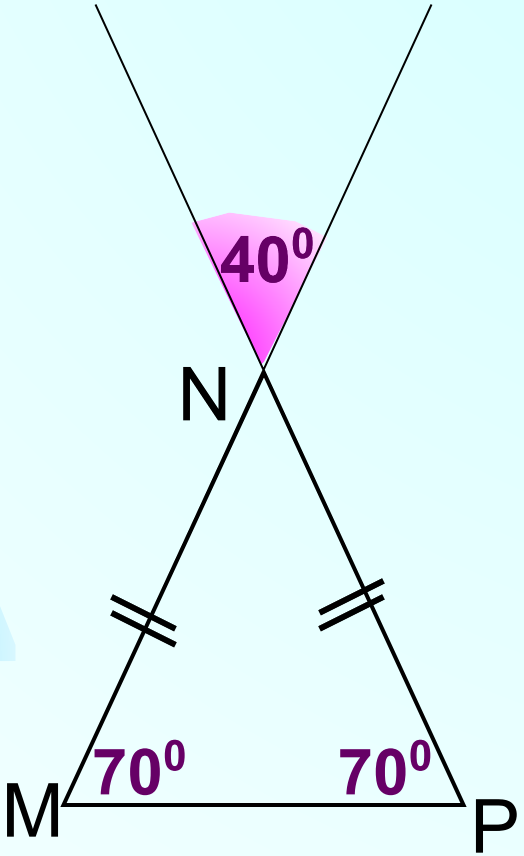
$\angle B = \angle N, \quad \angle A = \angle M$

Δ ABC $\sim$ ΔMNP по 1 признаку

$$\frac{AC}{MP} = \frac{AB}{MN} = \frac{PN}{BC}$$

?



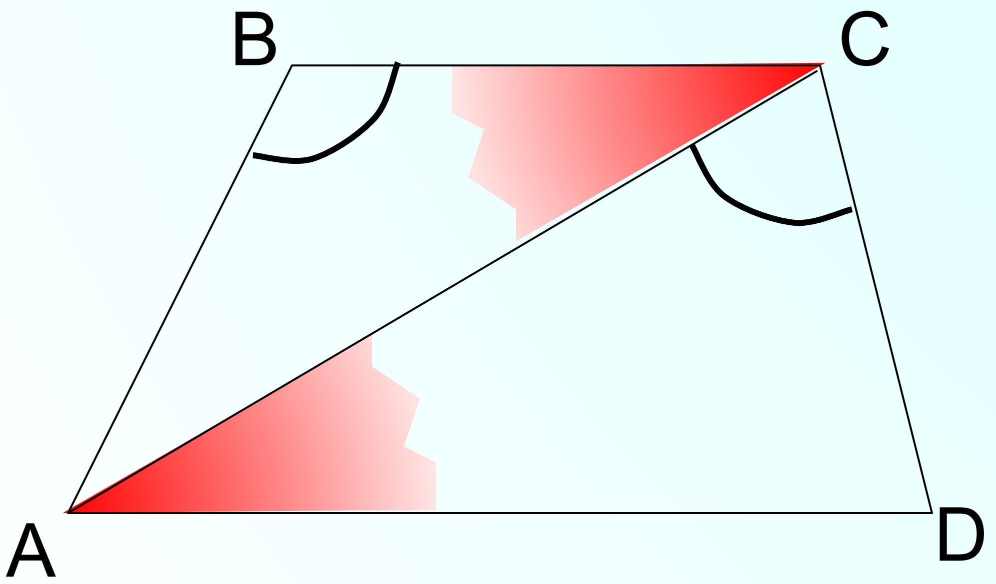


Блиц-опрос ABCD – трапеция. Найдите пары подобных треугольников и докажите их подобие.

$\angle B = \angle ACD,$ $\angle BCA = \angle CAD$

Δ ACD $\sim$ ΔCBA по 1 признаку

Запишите равенство отношений соответствующих сторон.



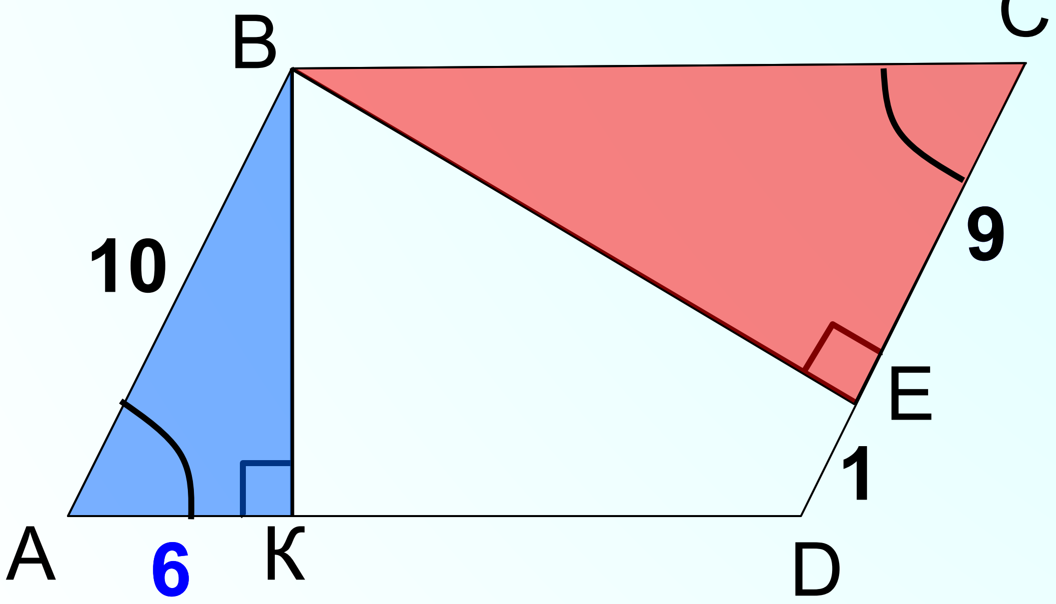
$$\frac{BA}{CD} = \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{AC}$$

Блиц-опрос ABCD – параллелограмм. Найдите пары подобных треугольников и докажите их подобие.
Найти BC.

$$\angle A = \angle C, \qquad \angle BKA = \angle BEC$$

$\Delta ABK \sim \Delta CBE$
по 1 признаку

Запишите равенство отношений соответствующих сторон.



$$\frac{BA}{CB} = \frac{BK}{BE} = \frac{AK}{CE}$$

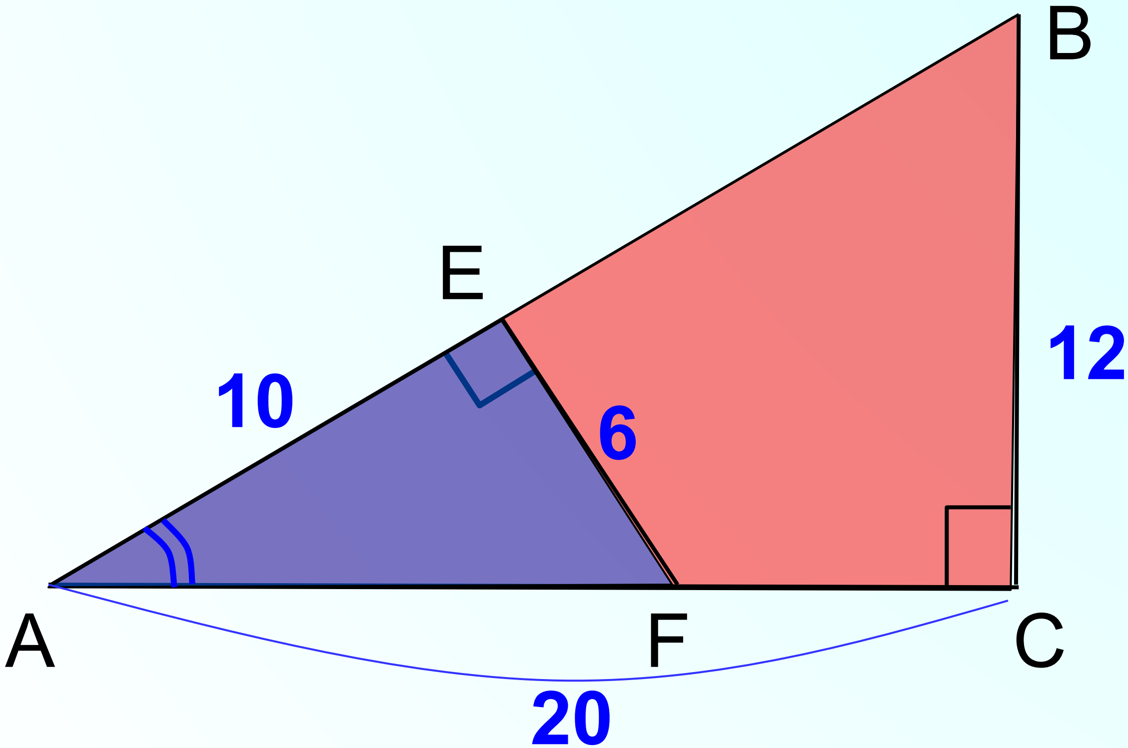
$$\frac{10}{CB} = \frac{6}{9}$$

Блиц-опрос Найдите пары подобных треугольников и докажите их подобие. Найти AB.

$\angle A - общий,$ $\angle AEF = \angle C$

Δ AEF $\sim$ ΔACB по 1 признаку

Запишите равенство отношений соответствующих сторон.

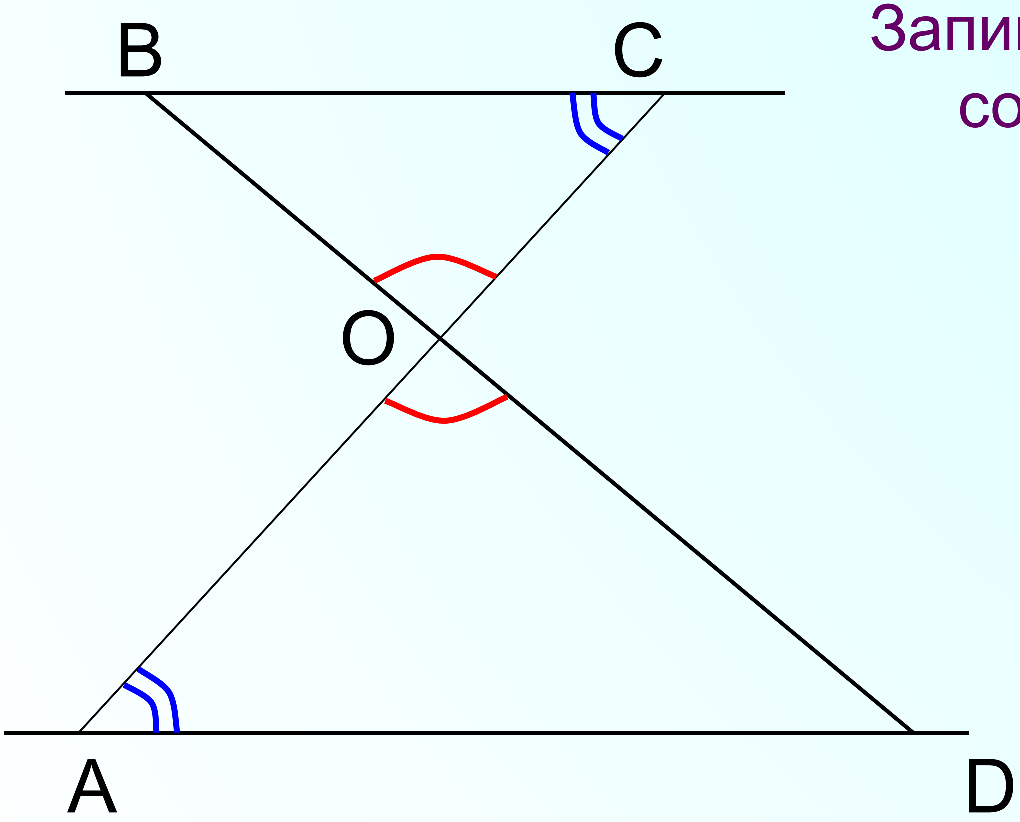


$$\frac{EF}{BC} = \frac{AF}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

Блиц-опрос BC II AD. Найдите пары подобных треугольников и докажите их подобие.

$$\angle BOC = \angle AOD, \qquad \angle BCO = \angle OAD$$

Δ COB $\backsim$ ΔAOD

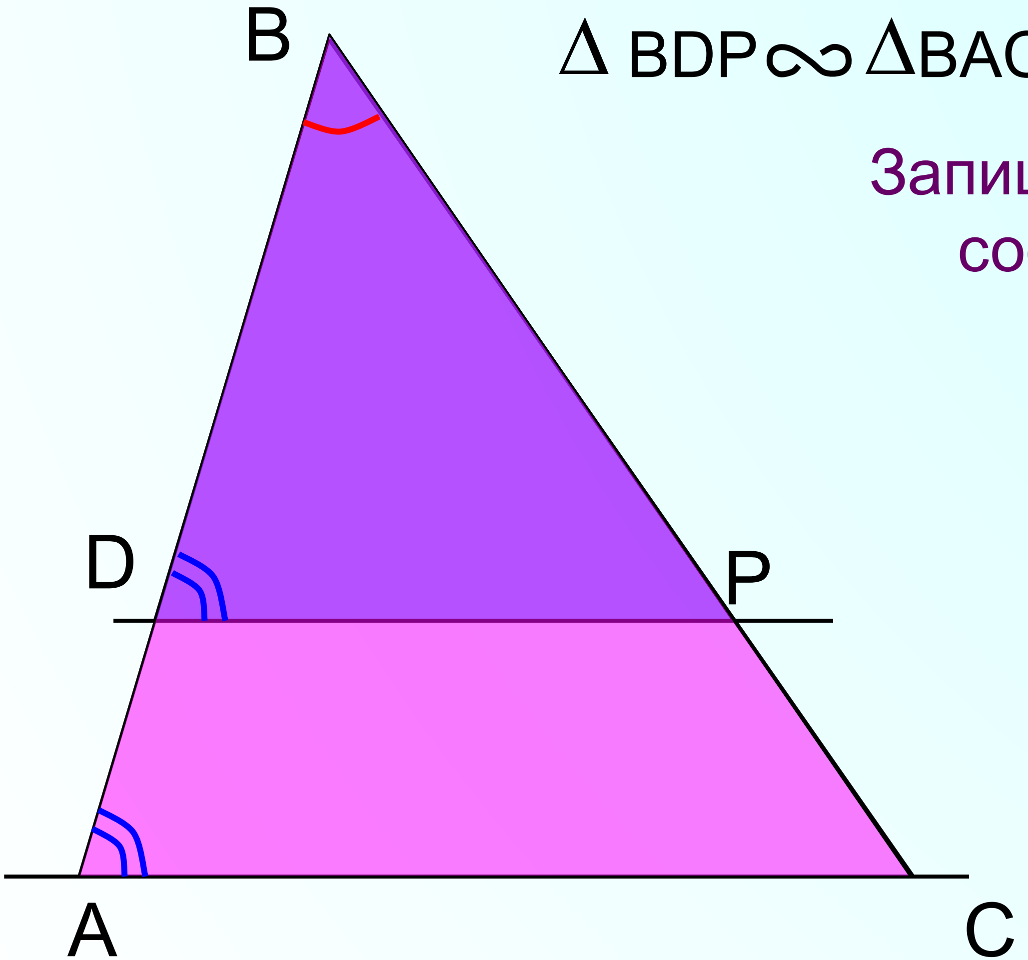


Запишите равенство отношений соответствующих сторон.

$$\frac{BC}{AD} = \frac{BO}{OD} = \frac{OC}{OA}$$

Блиц-опрос АС II DP. Найдите пары подобных треугольников и докажите их подобие.

$\angle B - общий,$ $\angle BDP = BAC$



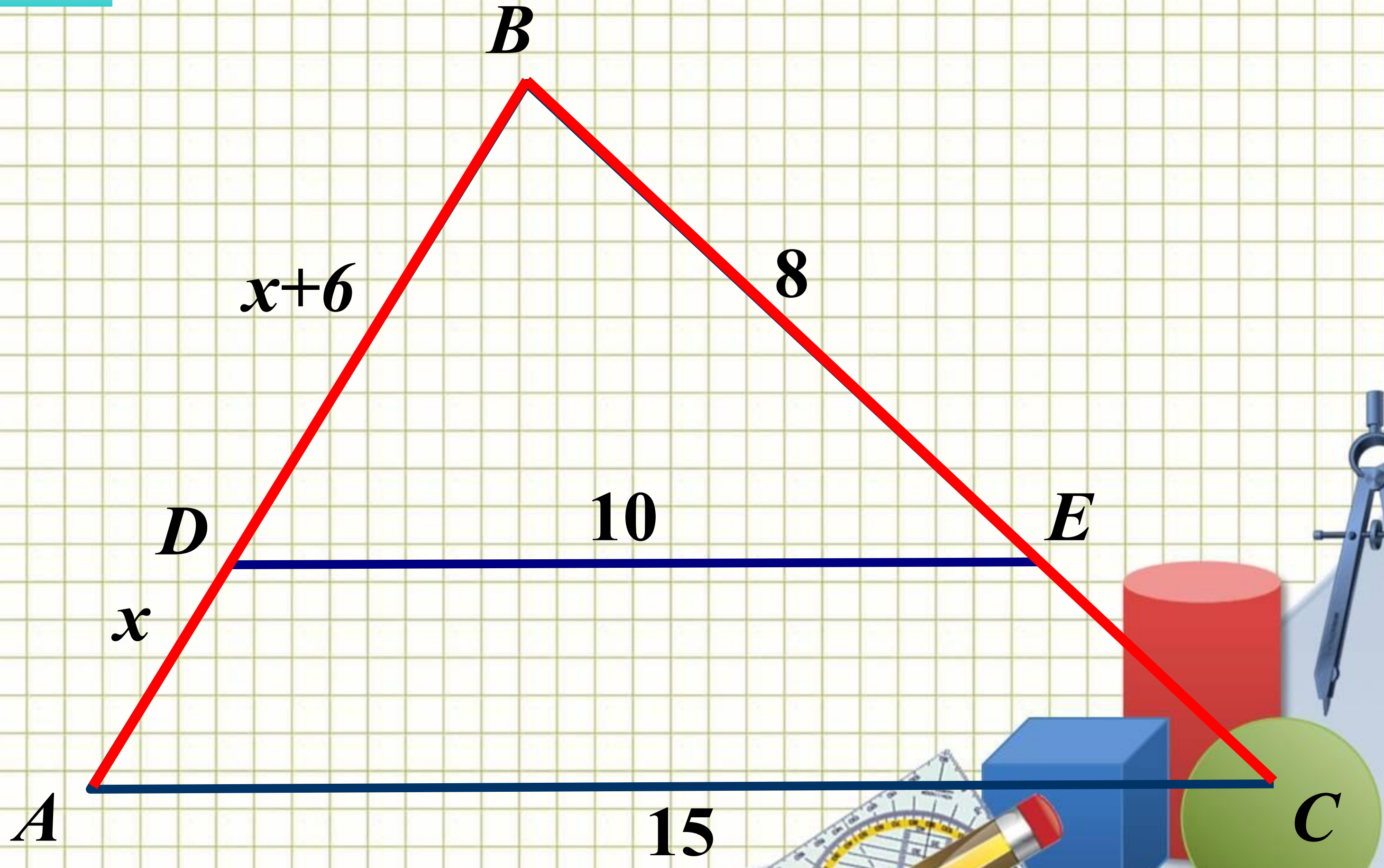
Δ BDP $\backsim$ ΔBAC по 1 признаку

Запишите равенство отношений соответствующих сторон.

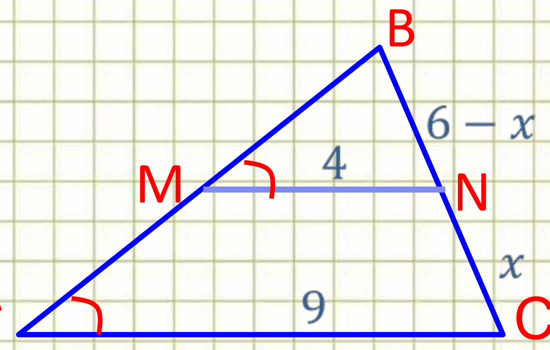
$$\frac{DP}{AC} = \frac{BP}{BC} = \frac{BD}{BA}$$

Дано: $\Delta ABC,\ DE \parallel AC$

Найти: $AB,\ BC$



Через точки M и N, принадлежащие сторонам AB и BC треугольника ABC соответственно, проведена прямая MN, параллельная стороне AC. Найдите длину CN, если $BC = 6, MN = 4, AC = 9$.



<u>Дано:</u> $\triangle ABC, MN \parallel AC, M \in AB, N \in BC,$
$BC = 6, MN = 4, AC = 9.$

<u>Найти:</u> CN

<u>Решение:</u>

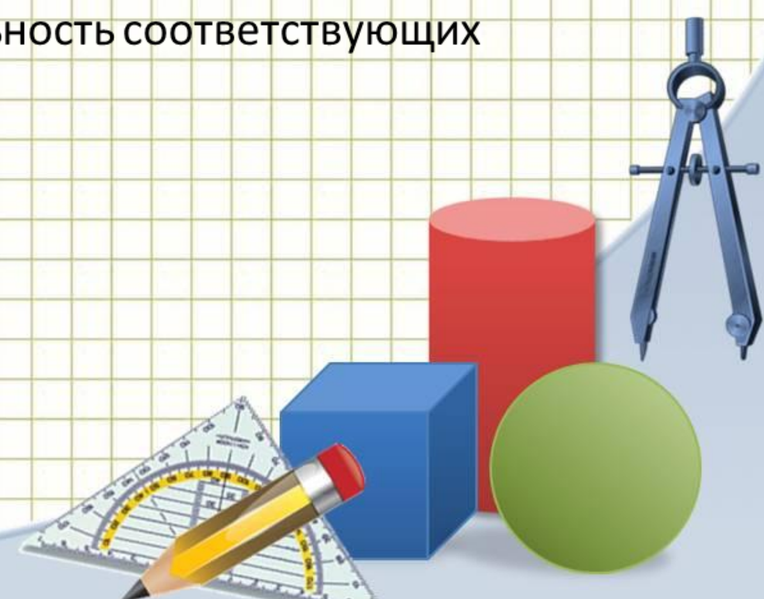
1. $\triangle ABC \sim \triangle MBN$ по первому признаку, т.к. $\angle B$ –общий, $\angle BMN = \angle BAC$ как соответственные при параллельных прямых MN и AC и секущей AM.

2. Из подобия треугольников следует пропорциональность соответствующих сторон. Пусть $CN = x$, тогда $BN = 6 - x$.

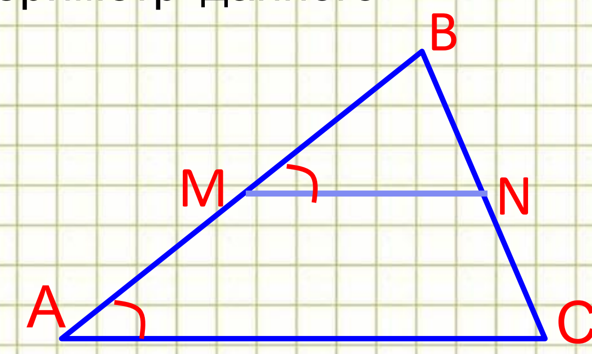
$$\frac{BN}{BC} = \frac{BM}{AB} \Leftrightarrow \frac{6-x}{6} = \frac{4}{9}.$$

Тогда по свойству пропорции получим: $9(6 - x) = 6 \cdot 4$, откуда $x = \frac{10}{3}$

Ответ: $\frac{10}{3}$



Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его на треугольник и трапецию, площади которых относятся как 4:5. Периметр образовавшегося треугольника равен 20 . Найдите периметр данного треугольника.



Дано: $\triangle ABC, MN \parallel AC, \frac{S_{MBN}}{S_{AMNC}} = \frac{4}{5}, P_{MBN} = 20$

Найти: P_{ABC}.

Решение:

По условию $\frac{S_{MBN}}{S_{AMNC}} = \frac{4}{5}$, тогда

$$\frac{S_{MBN}}{S_{ABC}} = \frac{S_{MBN}}{S_{MBN}+S_{AMNC}} = \frac{4}{4+5} = \frac{4}{9}.$$

Треугольники MBN и ABC подобны по двум углам (B –общий, $\angle BMN = \angle BAC$ как соответственные при параллельных прямых MN и AC и секущей AM) .

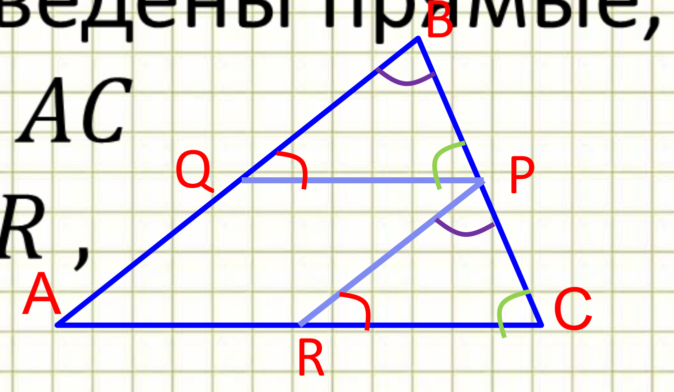
Т.к. $\frac{S_1}{S_2} = k^2$, то k $= \frac{2}{3}$. Периметры подобных треугольников находятся в том же отношении, что и их соответствующие стороны, значит

$\frac{P_{MBN}}{P_{ABC}} = \frac{2}{3}$; Так как $P_{MBN} = 20$, то $\frac{20}{P_{ABC}} = \frac{2}{3}$, откуда $P_{ABC} = 30$.

Ответ: 30.

Солнышко, запомни !!!

Если в треугольнике ABC через точку P, лежащую на стороне BC, проведены прямые, пересекающие стороны AB и AC соответственно в точках Q и R, параллельные AC и AB.

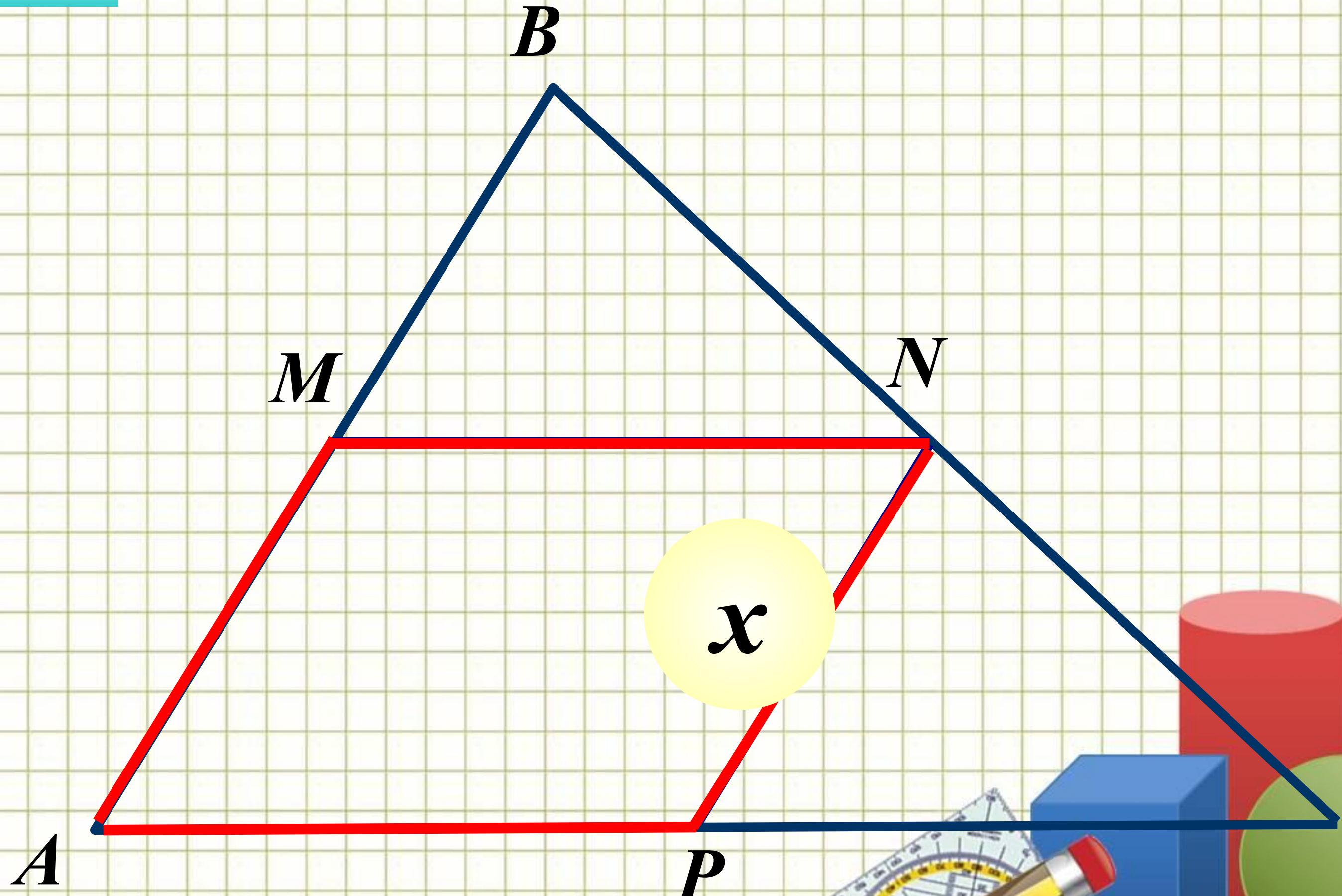


То $PQ \cdot PR = BQ \cdot CR$.

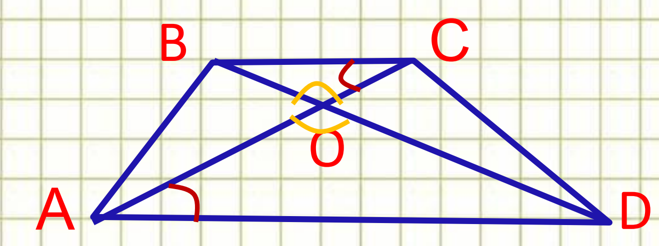
Дано: $AB = 10см, AC = 15см$

$MN \parallel AC, NP \parallel AB, PN : MN = 2 : 3$

Найти: AM, MN, NP, AP



Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O . Площади треугольников BOC и AOD относятся как 1:9. Сумма оснований BC и AD равна 4,8. Найдите основания трапеции.



<u>Дано:</u> $ABCD$ – трапеция, $AC \cap BD =$ т. O,

$$\frac{S_{BOC}}{S_{AOD}} = \frac{1}{9}, BC + AD = 4{,}8.$$

<u>Найти:</u> BC, AD.

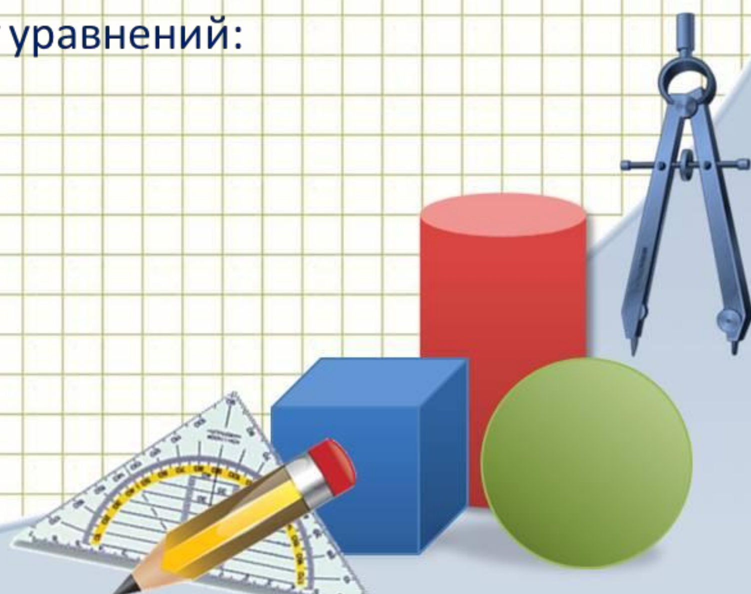
<u>Решение:</u>

$\Delta BOC \sim \Delta AOD$ по двум углам ($\angle BOC = \angle AOD$ как вертикальные, $\angle OAD = \angle OCB$ как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей AC.

Значит $\frac{S_{BOC}}{S_{AOD}} = k^2 = \frac{1}{9}, k = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{3}$. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{1}{3} \\ BC + AD = 4{,}8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} BC = \dfrac{1}{3} AD \\ \dfrac{4}{3} AD = 4{,}8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AD = 3{,}6 \\ BC = 1{,}2 \end{cases}.$$

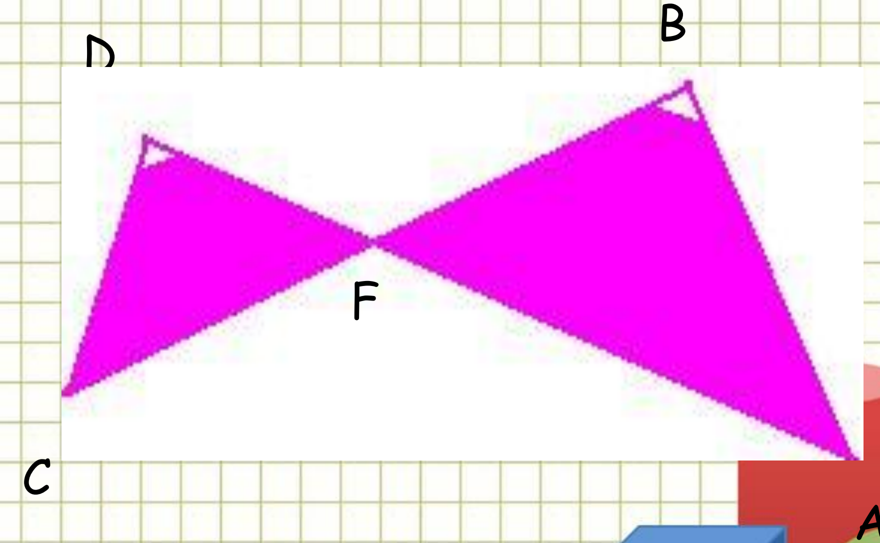
Ответ: $BC = 1{,}2$; $AD = 3{,}6$.

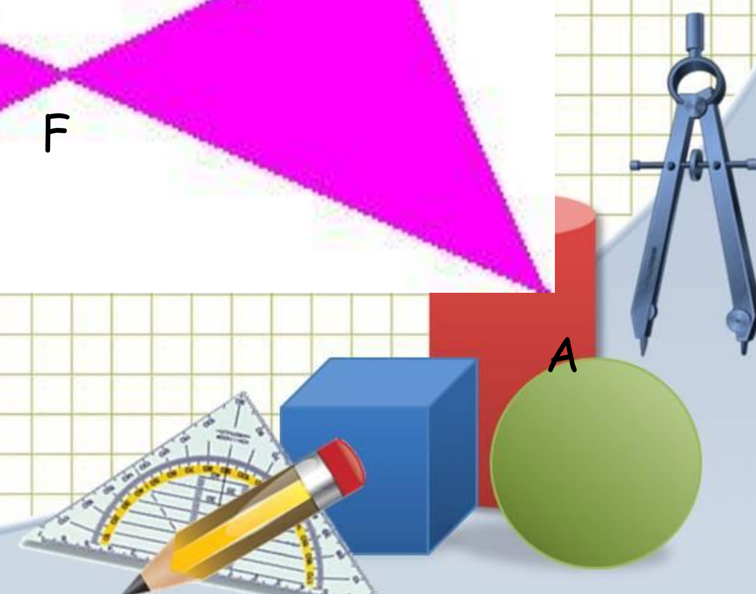


Решить задачу.

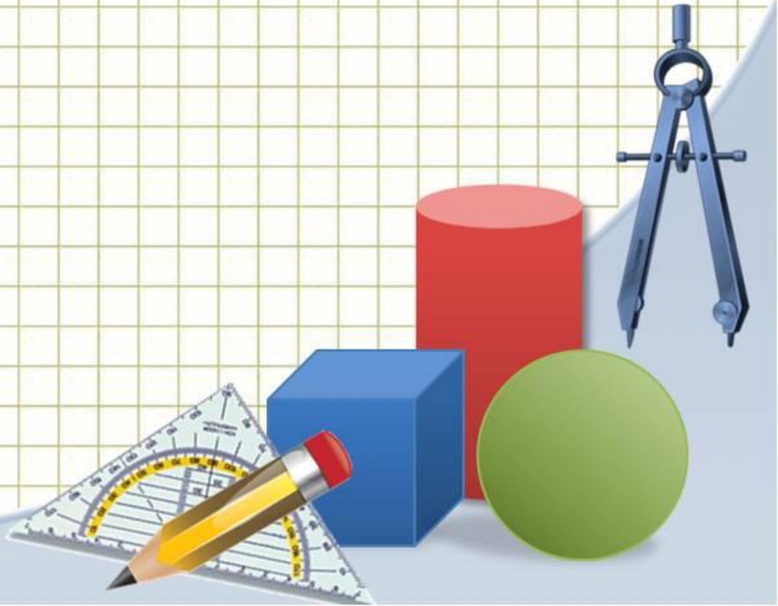
- На рисунке $\angle B = \angle D, \quad \dfrac{AF}{CF} = \dfrac{3}{2}, \quad BF = 15 см.$

Найдите DF

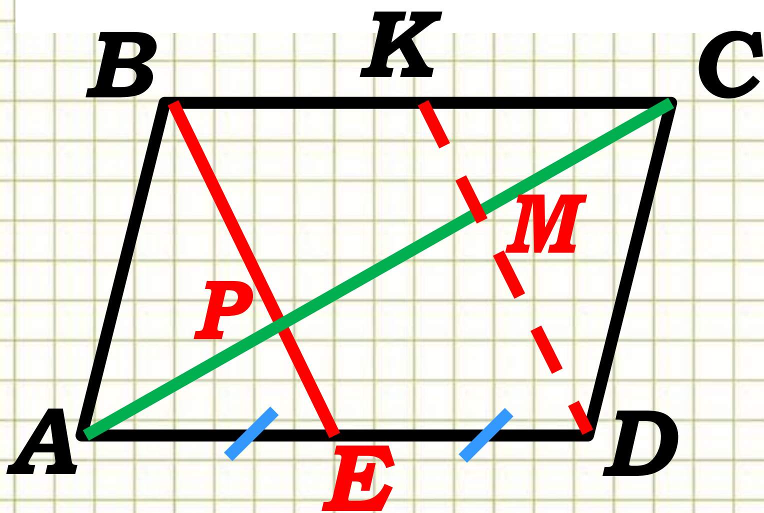




Для тех, кому интересно



Точка E – середина стороны AD параллелограмма $ABCD$. В каком отношении прямая BE делит диагональ AC параллелограмма? Найдите отношение площади треугольника ABE и четырехугольника $BCDE$.



Проведём KD║BE, тогда KDEB-параллелограмм и ED=BK=KC.

По теореме Фалеса:

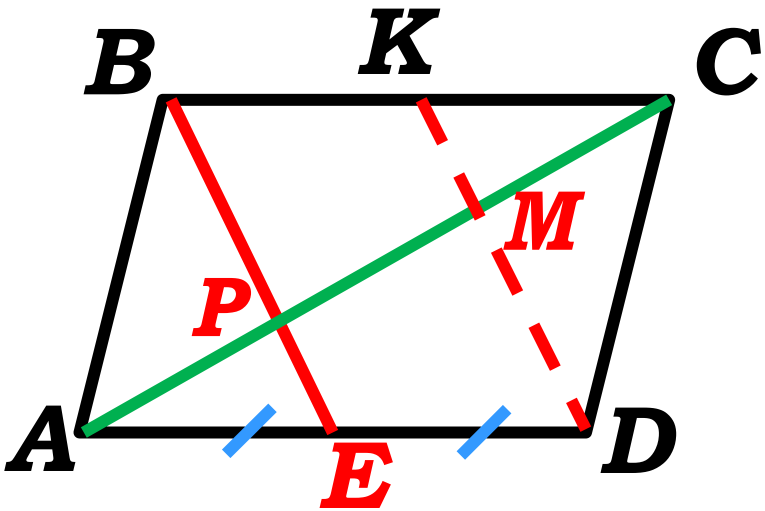
т.к. AE=ED, то AP=PM

т.к. BK=KC, то PM=MC

AP=PM=MC

AP:PC=1:2

Точка E – середина стороны AD параллелограмма $ABCD$. В каком отношении прямая BE делит диагональ AC параллелограмма? Найдите отношение площади треугольника ABE и четырехугольника $BCDE$.



Проведём KD‖BE, тогда KDEB-параллелограмм и ED=BK=KC.

По теореме Фалеса:

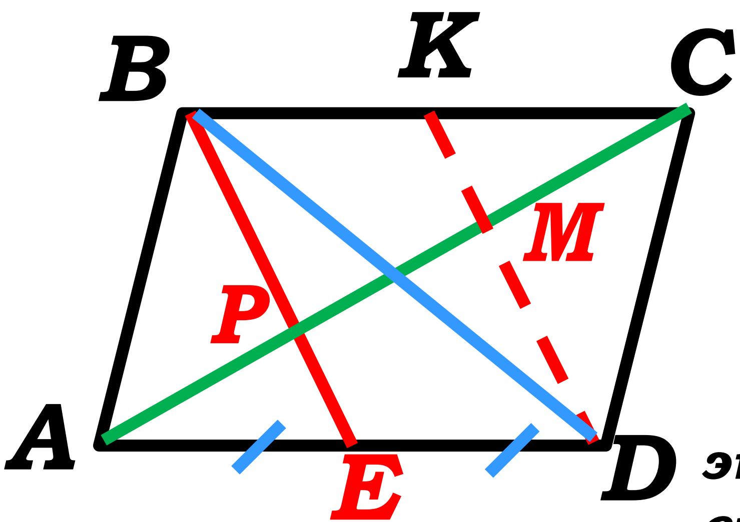
т.к. AE=ED, то AP=PM

т.к. BK=KC, то PM=MC

AP=PM=MC

AP:PC=1:2

Точка E – середина стороны AD параллелограмма $ABCD$. В каком отношении прямая BE делит диагональ AC параллелограмма? Найдите отношение площади треугольника ABE и четырехугольника $BCDE$.



$$S_{ABE} = S_{\mathrm{BED}} = S_{BKD} = S_{KDC}, т.к$$

эти треугольники имеют равные высоты и одинаковые основания

$$S_{ABE} : S_{\mathrm{BCDE}} = 1:3$$

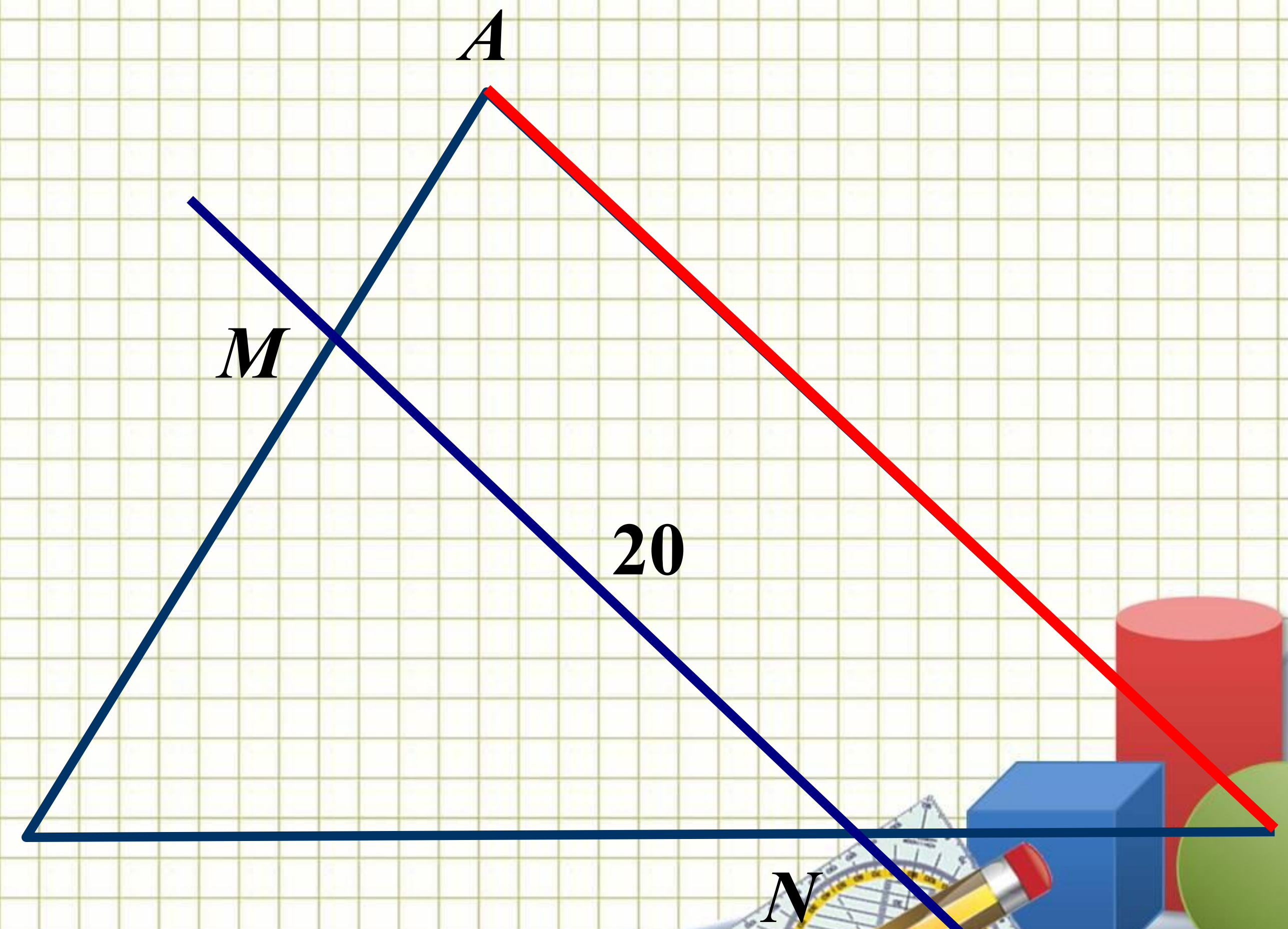
$$Ответ: 1:2;\ 1:3$$

Домашнее задание

Дано: $\Delta ABC,\ MN \parallel AC$

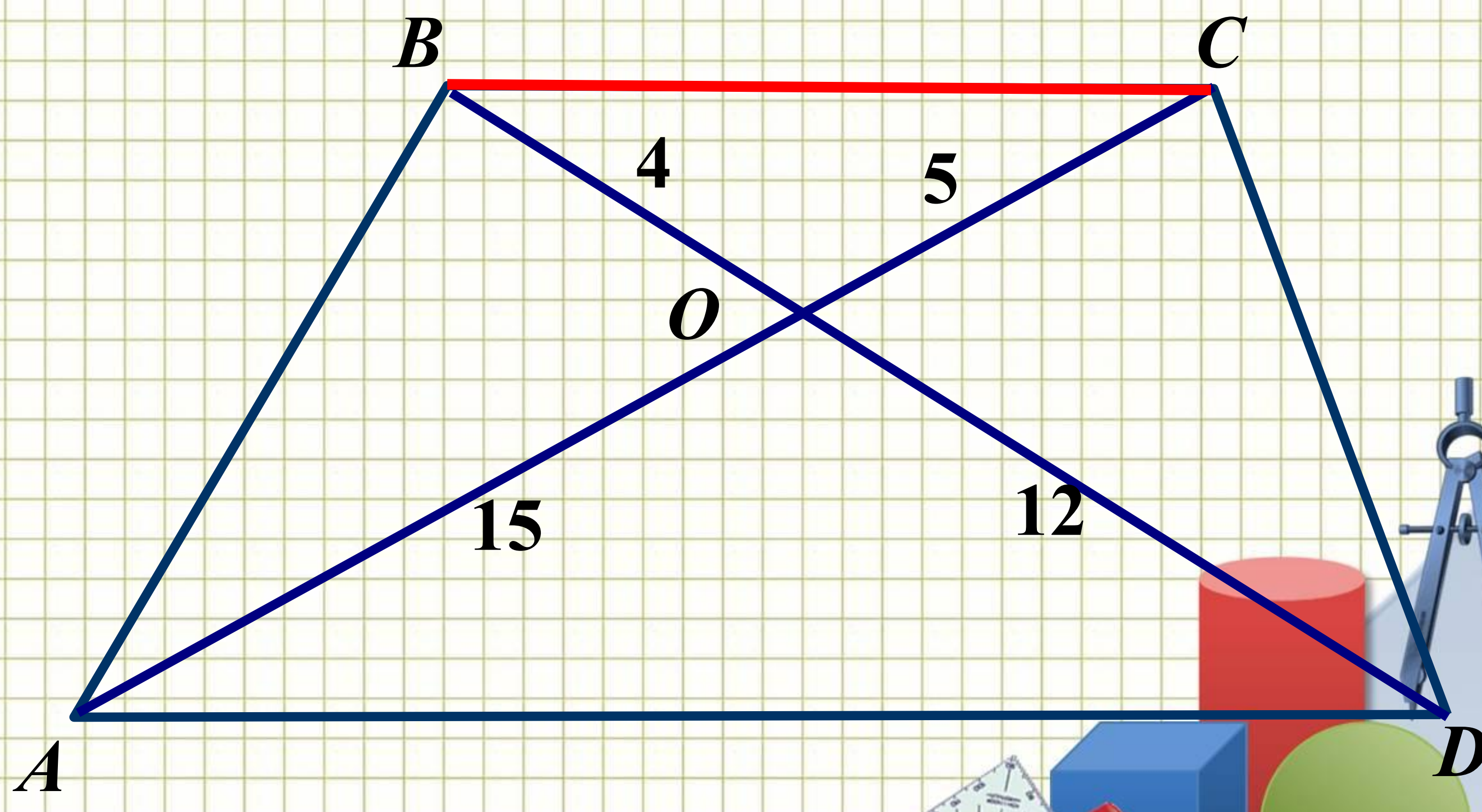
$$S_{ABC} : S_{BNM} = 49 : 25$$

Найти: AC



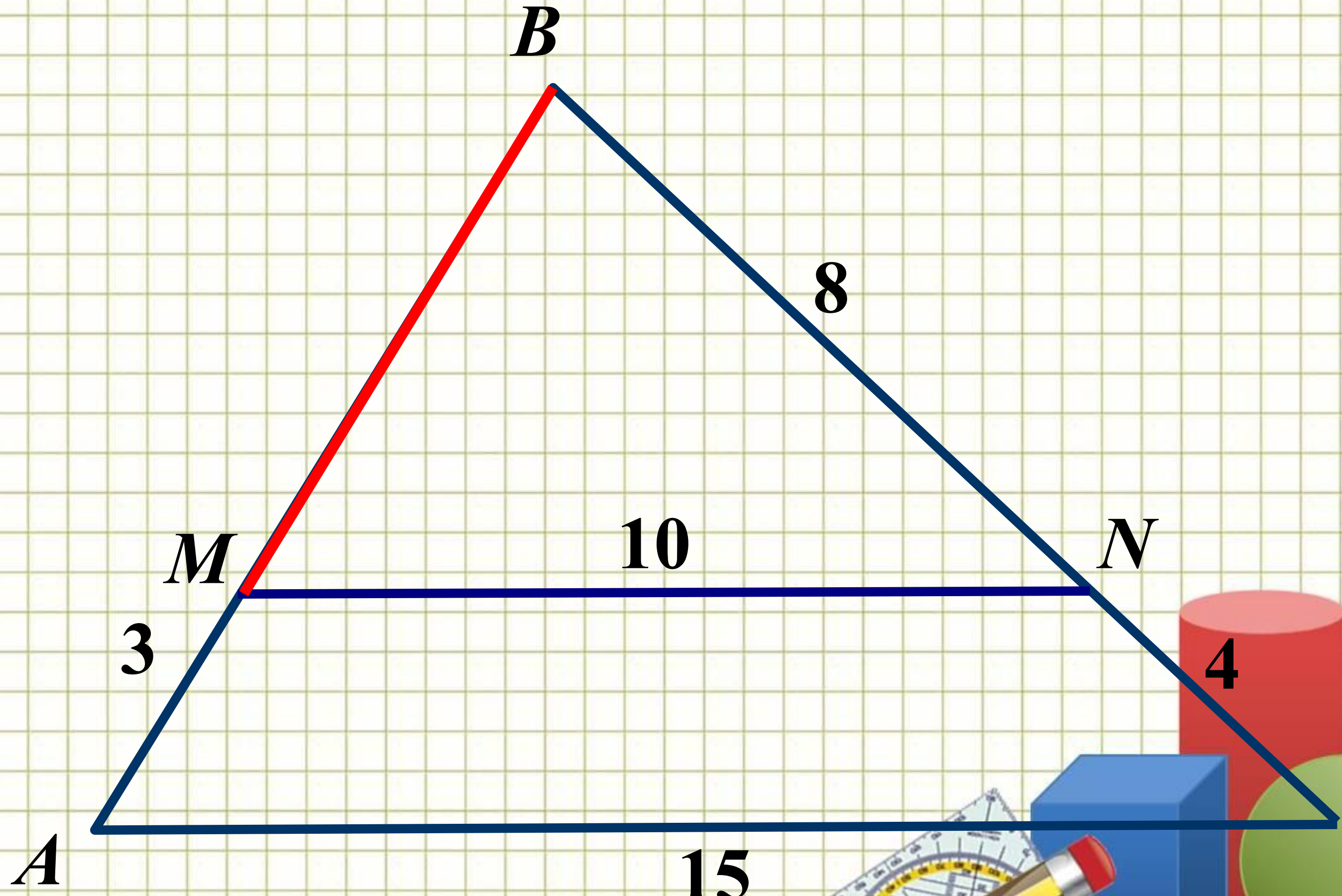
Дано: $ABCD$ – трапеция

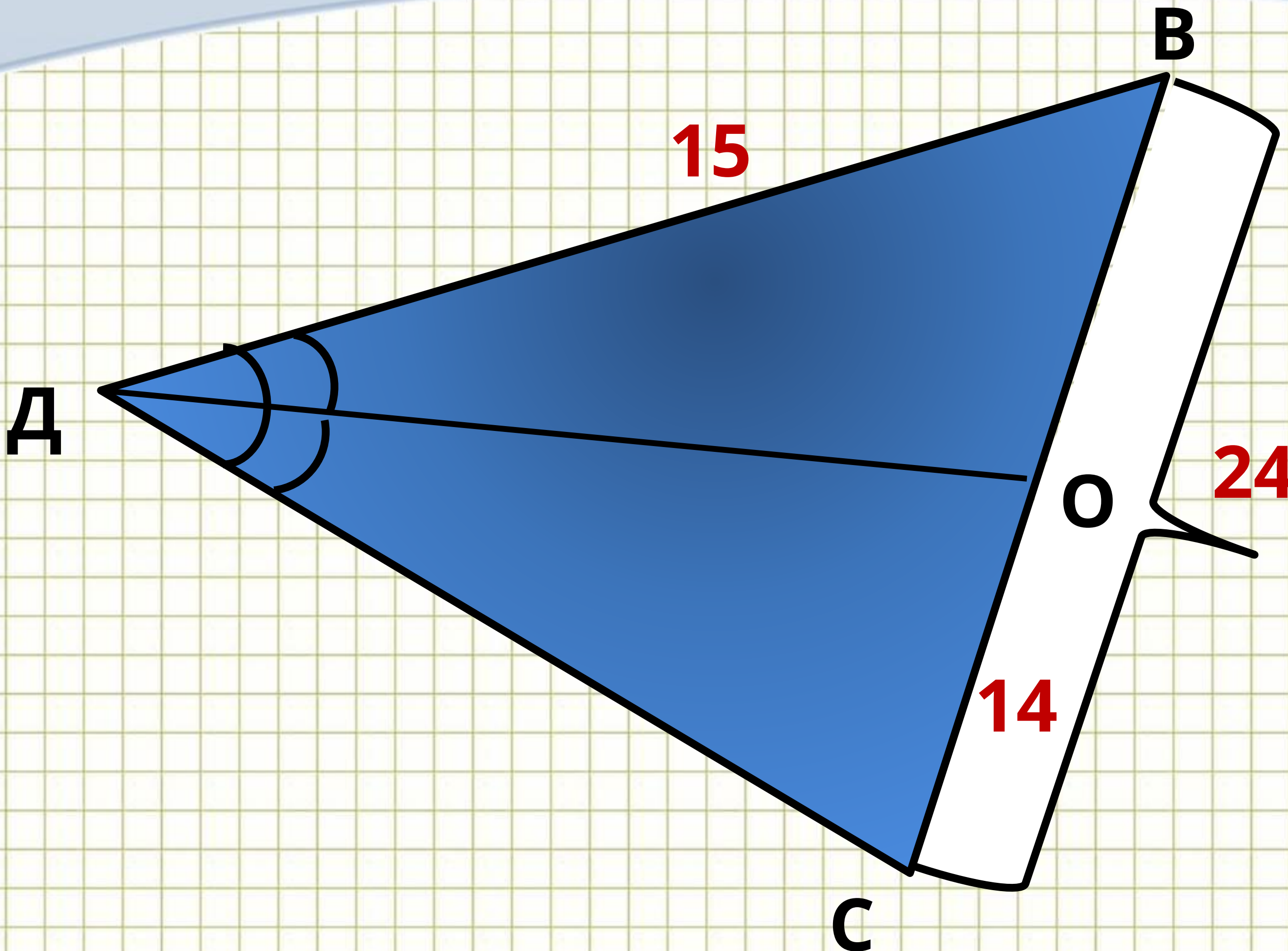
Найти: BC



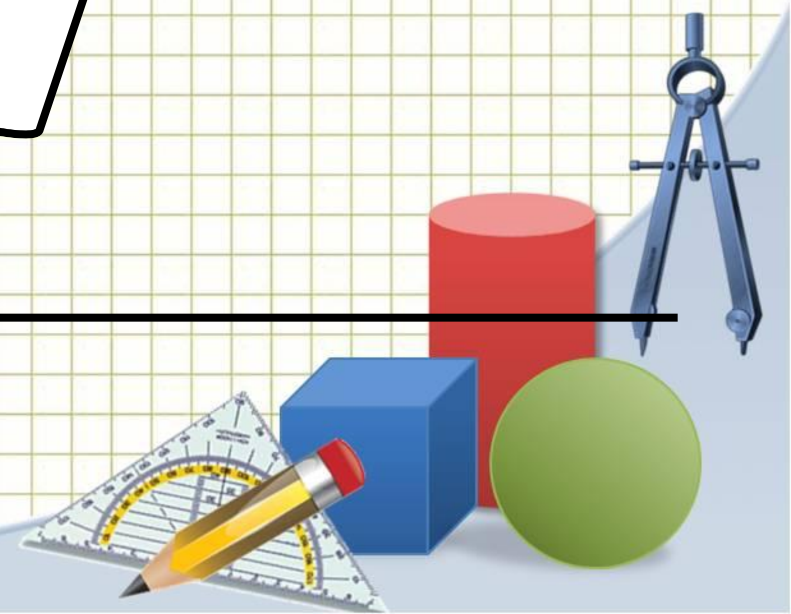
Дано: $\Delta ABC,\ \Delta MBN$

Найти: BM





Найти:
ДС



Спасибо за урок.

Хорошего настроения на весь день.