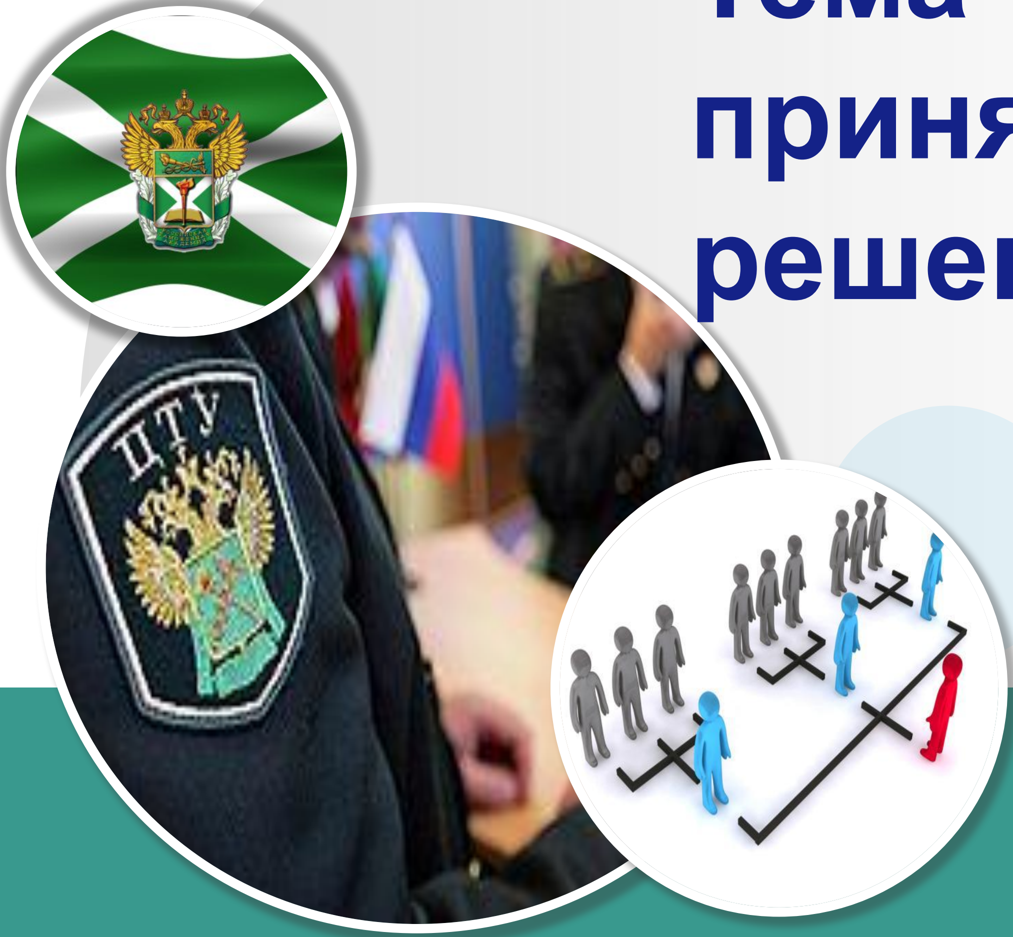
Тема «Теория игр и принятие решений»



Учебные вопросы:

- 1. Предмет и задачи теории игр.
- 2. Матричные игры. Равновесная ситуация.
- 3. Смешанные стратегии матричных игр.
- 4. Игры с природой.

1. Предмет и задачи теории игр.

Построением математических моделей конфликтных ситуаций и разработкой методов решения возникающих в этих ситуациях задач занимается теория игр.

Методы и рекомендации теории игр применимы к многократно повторяющимся конфликтным ситуациям. Если конфликтная ситуация реализуется ограниченное число раз, то рекомендации теории игр теряют смысл.

Игра – это упрощенная математическая модель конфликтной ситуации.

Игра ведется по определенным правилам. Суть игр состоит в том, что каждый участник принимает такое решение, которое, как он полагает, обеспечит ему наилучший исход. Исходом игры называется значение некоторой функции, называемой *функцией выигрыша (платежной функцией*), которая может задаваться в матричном или аналитическом виде.

1. Предмет и задачи теории игр.

Стратегия – это совокупность правил, однозначно определяющих последовательность действий игрока в каждой конкретной ситуации, складывающейся в процессе игр.

Оптимальной называется стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает данному игроку максимально возможный средний выигрыш. Количество стратегий у каждого игрока может быть конечным или бесконечным. В зависимости от этого игры подразделяются на *конечные* и *бесконечные.*

Игра состоит из отдельных партий.

Партия – это каждый вариант реализации игры.

В партии игроки совершают ходы.

Ход – это выбор и реализация игроком одного из допустимых вариантов поведения.

2. Матричные игры:

- Пусть в игре участвуют два игрока. Игрок A имеет m стратегий, а игрок B – n стратегий.
- Обозначим стратегии игрока A как $A1, A2, ..., Am$, а стратегии игрока B – как $B1$,$B2$ ...,Bn .
- Если игрок A выбрал стратегию A_i , а игрок B – стратегию B_k , то выигрыш игрока A составит a_{ik} , а игрока B – b_{ik} , причем

$$\boldsymbol{a_{ik} = -b_{ik}} \quad (1)$$

2. Матричные игры:

- Поэтому при анализе такой игры достаточно рассмотреть выигрыш только одного игрока, например выигрыш a_{ik} игрока А. Зная выигрыш a_{ik} по формуле (1) легко определить выигрыш b_{ik}.
- Матричные игры называются *парными играми с нулевой суммой*, в которых выигрыш одного игрока равен проигрышу другого.
- Если известны все значения a_{ik} для каждой пары стратегий $\{A_i\, B_k\}$, i $=1, 2, \ldots, m$, k $= 1, 2, \ldots, n$, то их удобно записать в виде прямоугольной таблицы, строки которой соответствуют стратегиям игрока А , а столбцы – стратегиям игрока В (табл. 1).

2. Матричные игры:

Таблица 1.

	B1	B2	…	Bn
A1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
A m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

Чаще эти выигрыши записывают в виде платежной матрицы (матрицы игр) размера , поэтому такие игры называются матричными играми :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Чаще
выигр

2. Матричные игры:

Равновесная ситуация

- Пусть матричная игра m×n задана платежной матрицей

- $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Строки этой матрицы соответствуют стратегиям игрока , а столбцы – стратегиям игрока . В теории игр предполагается, что оба игрока действуют разумно, т.е. стремятся к получению максимального выигрыша, считая, что соперник действует наилучшим для себя образом.

2. Матричные игры:

- Определим оптимальные стратегии каждого из игроков. Начнем с анализа стратегий игрока A . На стратегию Ai игрока A игрок B ответит такой стратегией Bk, при которой выигрыш игрока A будет минимальным. Аналогично игрок B будет отвечать на все m стратегий игрока A . Другими словами, найдем в каждой строке матрицы минимальный элемент (минимальные выигрыши игрока A)

$$\alpha_i = \min_k a_{ik}, \; i = 1, 2, \ldots, n$$

и запишем их в правом столбце табл. 2.

2. Матричные игры:

	B_1	B_2	…	B_k	…	B_n	*Минимальные выигрыши игрока A*
A_1 A_2 … A_i … A_m	a_{11} a_{21} ⋮ a_{i1} ⋮ a_{m1}	a_{12} a_{22} ⋮ a_{i2} ⋮ a_{m2}	⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮	a_{1k} a_{2k} ⋮ a_{ik} ⋮ a_{mk}	⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮	a_{1n} a_{2n} ⋮ a_{in} ⋮ a_{mn}	α_1 α_2 ⋮ α_i ⋮ α_m
Максимальные выигрыши игрока A	β_1	β_2	⋮	β_k	⋮	β_n	

Действуя разумно, игрок остановится на той стратегии , для которой окажется максимальным. Поэтому среди чисел выбираем максимальное число

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_k a_{ik} \qquad \textbf{(3)}$$

2. Матричные игры:

- Принцип построения стратегии игрока А, основанный на максимизации минимальных выигрышей, называется **принципом максимина (maxmin).**

- Проведем анализ стратегий игрока В. Для этого найдем в каждом столбце матрицы максимальный элемент (максимальные выигрыши игрока А):

$$\beta_k = \max_i a_{ik}, \; k = 1, 2, \ldots, n$$

- И запишем их в нижней строке табл. 2. Действуя разумно, игрок В остановится на той стратегии β_k , для которой $\beta_k = \max_i a_{ik}$

выбираем минимальное число

$$\beta_k = \min_k \beta_k = \min_k \max_i a_{ik} \qquad \textbf{(4)}$$

- Число β называется *верхней ценой игры*.

2. Матричные игры:

- Принцип построения стратегии игрока B, основанный на минимизации максимальных выигрышей, называется **принципом минимакса (minmax).**

- Нижняя цена игра α и верхняя цена игра β связаны неравенством

$$\alpha \le \beta. \qquad (5)$$

- Если $\max\limits_{i} \min\limits_{k} a_{ik} = \min\limits_{k} \max\limits_{i} a_{ik} = a_{i,opt,k,opt}$ или

$$\alpha = \beta = a_{i,opt,k,opt} \qquad (6)$$

- то ситуация $\left(A_{i,opt,} \; B_{k,opt}\right)$ оказывается **равновесной**, и ни один игрок не заинтересован в том, чтобы ее нарушить. В том случае, когда верхняя цена игры равна нижней, их называют просто *ценой игры.*

- Если α=β, то такую игру называют также *игрой с седловой точкой*, а пара оптимальных стратегий $\left(A_{i,opt,} \; B_{k,opt}\right)$ *седловой точкой матрицы*. Цена $v = a_{i,opt,k,opt}$

3. Смешанные стратегии матричных игр

- Если платежная матрица не имеет седловой точки, т.е. $\alpha < \beta$, то поиск решения игры приводит к применению сложной стратегии, состоящей в случайном применении двух и более стратегий с определенными частотами. Такая сложная стратегия называется *смешанной*.
- В табл. 4 приведен пример, когда нижняя цена игры α не совпадает с верхней ценой игры β.

3. Смешанные стратегии матричных игр

Таблица 4.

	B1	B2	B3	Минимальные выигрыши игрока А
A_1	4	1	-3	-3
A_2	-2	1	3	-2
A_3	0	2	-3	-3
Максимальные выигрыши игрока В	4	2	3	

Здесь $\alpha = -2$, а $\beta = 2$

3. Смешанные стратегии матричных игр

- Обратимся к общему случаю матричной игры, представленной в табл. 2. Обозначим через $p_1, p_2, \dots, p_m$ вероятности, с которыми игрок *A* использует в ходе игры свои чистые стратегии $A_1, A_2, \dots, A_m$
- Для этих вероятностей выполняются условия:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1;\ p_1 \geq 0,\ p_2 \geq 0, \dots, p_m \geq 0 \qquad (8)$$

- Вектор $\bar{p} = \bar{p}(p_1, p_2, \dots, p_m)$, проекция которого удовлетворяет условиям (8), полностью определяет характер игры игрока *A* и называется его ***смешанной стратегией***. Механизм случайного выбора чистых стратегий, которым пользуется игрок *A*, обеспечивает ему бесконечное множество смешанных стратегий.

3. Смешанные стратегии матричных игр

- Аналогично, вектор $\bar{q} = \bar{q}(q_1, q_2, \ldots, q_m)$, проекция которого удовлетворяет условиям (9),

$$\sum_{k=1}^{n} q_{ki} = 1; q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, \ldots, q_n \geq 0 \qquad (9)$$

- полностью определяет характер игры игрока *B* и называется *смешанной стратегией игрока B*. Игрок *B*, как и игрок *A*, располагает бесконечным множеством смешанных стратегий.

3. Смешанные стратегии матричных игр

- Пусть игроки *A* и *B* применяют и смешанные стратегии p и q соответственно, т.е. игрок *A* использует стратегию A_i с вероятностью p_i, а игрок *B* – стратегию B_k с вероятностью q_k. Поскольку события A_i B_k и независимы, то вероятность появления комбинации (A_i, B_k) равна произведению вероятностей p_i и q_k, т.е. . При использовании смешанных стратегий игра приобретает случайный характер, случайными становятся и величины выигрышей игроков.

3. Смешанные стратегии матричных игр

- Поэтому выигрыш игрока *A* (проигрыш игрока *B*) определяют его математическим ожиданием, рассчитываемым по формуле $E\left(A,\bar{p},\bar{q}\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}p_i q_k$ **(10)**
  Функция (10) называется *платежной функцией игры с матрицей*, заданной в табл. 5.
- *Нижней ценой игры* называется число α, рассчитываемое по формуле: $\alpha=\max_{\bar{p}}\min_{\bar{q}}E\left(A,\bar{p},\bar{q}\right)$ **(11)**
- *Верхней ценой игры* называется число β, рассчитываемое по формуле: $\beta=\min_{\bar{q}}\max_{\bar{p}}E\left(A,\bar{p},\bar{q}\right)$ **(12)**

3. Смешанные стратегии матричных игр

Таблица 5.

	B_1	B_2	…	B_k	…	B_n	Вероятности использования чистых стратегий игроком А
A_1	a_{11}	a_{12}	$\vdots$	a_{1k}	$\vdots$	a_{1n}	p_1
A_2	a_{21}	a_{22}	$\vdots$	a_{2k}	$\vdots$	a_{2n}	p_2
…	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_i	a_{i1}	a_{i2}	$\vdots$	a_{ik}	$\vdots$	a_{in}	p_i
…	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\vdots$	a_{mk}	$\vdots$	a_{mn}	p_m
Вероятности использования чистых стратегий игроком В	q_1	q_2	…	q_k	…	q_n	

3. Смешанные стратегии матричных игр

Оптимальными смешанными стратегиями называются стратегии, удовлетворяющие соотношению (сравнить с формулой (6)).

$$\max_{p} \min_{q} E\left(A, \overline{p}, \overline{q}\right) = \min_{q} \max_{p} E\left(A, \overline{p}, \overline{q}\right) = E\left(A, \overline{p}_{opt}, \overline{q}_{opt}\right). \quad (13)$$

Величину $v = E\left(A, \overline{p}_{opt}, \overline{q}_{opt}\right)$ определенную соотношением (13), называют *ценой игры*.

Векторы $\overline{p}_{opt}$ и $\overline{q}_{opt}$ называются ***оптимальными смешанными стратегиями***, если они образуют седловую точку платежной функции игры $E\left(A, \overline{p}, \overline{q}\right)$, т.е. удовлетворяют неравенству (сравнить с неравенством (7))

$$E\left(A, \overline{p}, \overline{q}_{opt}\right) \le E\left(A, \overline{p}_{opt}, \overline{q}_{opt}\right) \le E\left(A, \overline{p}_{opt}, \overline{q}\right). \quad (14)$$

Из соотношения (14) следует, что в седловой точке $(\overline{p}_{opt}, \overline{q}_{opt})$ платежная функция $E\left(A, \overline{p}, \overline{q}\right)$ достигает максимума по смешанным стратегиям $\overline{p}$ игрока A и минимума по смешанным стратегиям $\overline{q}$ игрока B.

3. Смешанные стратегии матричных игр

Теорема 1

Теорема 1. Основная теорема теории матричных игр. (Дж. фон Нейман).

Для матричной игры с любой матрицей A величины $\max\limits_{\overline{p}} \min\limits_{\overline{q}} E\left(A,\overline{p},\overline{q}\right)$ и $\min\limits_{\overline{q}} \max\limits_{\overline{p}} E\left(A,\overline{p},\overline{q}\right)$ существуют и равны между собой:

$$\max_{\overline{p}} \min_{\overline{q}} E\left(A,\overline{p},\overline{q}\right) = \min_{\overline{q}} \max_{\overline{p}} E\left(A,\overline{p},\overline{q}\right).$$

Более того, существует хотя бы одна ситуация в смешанных стратегиях $(\overline{p}_{opt}, \overline{q}_{opt})$, для которой выполняется соотношение

$$E(A,\overline{p}_{opt},\overline{q}_{opt}) = \max_{\overline{p}} \min_{\overline{q}} E\left(A,\overline{p},\overline{q}\right) = \min_{\overline{q}} \max_{\overline{p}} E\left(A,\overline{p},\overline{q}\right).$$

3. Смешанные стратегии матричных игр

Теорема 2

- Пусть $\overline{p}_{opt} = \overline{p}_{opt}(p_{1,opt}, p_{2,opt}, \ldots, p_{m,opt})$, $\overline{q}_{opt} = \overline{q}_{opt}(q_{1,opt}, q_{2,opt}, \ldots, q_{n,opt})$ - оптимальные смешанные стратегии и $v = E(A, \overline{p}_{opt}, \overline{q}_{opt})$ - цена игры.
  - Оптимальная смешанная стратегия $\overline{p}_{opt}$ игрока A складывается только из тех чистых стратегий $A_i, i = 1,2,\ldots,m$

  (т.е. только те вероятности , могут отличаться от нуля), для которых $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} q_{k,opt} = v$
- Аналогично, только те вероятности q_k, $k = 1,2,\ldots,n$ могут отличаться от нуля, для которых $\sum_{i=1}^{m} a_{ik} p_{i,opt} = v$

Графические решения матричных игр

- Графический метод применим к тем играм, в которых хотя бы один игрок имеет две стратегии.

- Рассмотрим игру $2\times n$, представленную в табл. 6. Эта игра не имеет седловой точки. Согласно теореме имеем

$$v = \min_{1\le k\le n}\sum_{i=1}^{2} a_{ik}P_{i,opt} = \min_{1\le k\le n}(a_{1k}P_{opt} + a_{2k}(1-p_{opt})) =$$

$$= \max_{p}\min_{1\le k\le n}(a_{1k}p + a_{2k}(1-p)) \qquad (15)$$

3. Смешанные стратегии матричных игр

- Максимум функции $\min\limits_{1\le k\le n}(a_{1k}p + a_{2k}(1-p))$ **(16)** найдем, построив ее график. Для этого поступаем следующим образом. Построим графики прямых

$$w_k = a_{1k}p + a_{2k}(1-p) = (a_{1k} - a_{2k})p + a_{2k} \quad (17)$$

для каждого $к = 1, 2, ..., n$ в системе координат pOw (рис.1). В соответствии с требованием (16) на каждой из построенных прямых определяются и отмечаются наименьшие значения. На рис. 2 эти значения выделены полужирной ломаной линией. Эта ломаная огибает снизу все семейство построенных прямых и называется *нижней огибающей семейства.*

3. Смешанные стратегии матричных игр

Пример 3. Найти решение игры вида $2 \times n$, приведенной в табл. 7.

Таблица 7.

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	*Вероятности использования чистых стратегий игроком А*
A1	6	4	3	1	-1	0	p
A2	-2	-1	1	0	5	4	1-p
Вероятности использования чистых стратегий игроком В	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	

3. Смешанные стратегии матричных игр

Решение. Проведем анализ игры на наличие седловой точки. Нижняя цена игры равна -1, верхняя равна 1. Седловой точки нет. Решение надо искать в смешанных стратегиях.

Построим график нижней огибающей (16). Предварительно запишем уравнения прямых (17):

$$w_1 = 6p - 2(1-p) = 8p - 2;$$
$$w_2 = 4p - 1\cdot(1-p) = 5p - 1;$$
$$w_3 = 3p + (1-p) = 2p + 1;$$
$$w_4 = p + 0\cdot(1-p) = p;$$
$$w_5 = -p + 5\cdot(1-p) = -6p + 5;$$
$$w_6 = 0\cdot p + 4(1-p) = -4p + 4.$$

3. Смешанные стратегии матричных игр

Графики данных прямых, построенных в системе координат pOw, представлены на рис.3.

Нижняя огибающая выделена на рис. 3 полужирной ломаной линией. Точка максимума нижней огибающей лежит на пересечении прямых w_4 и w_5. Решая уравнение $p - 6p + 5$, получим $p_{opt} = \frac{5}{7}$. Цена игры, являющаяся математическим ожиданием выигрыша игрока A, равна $v = E\left(A, \overline{p}_{opt}, \overline{q}_{opt}\right) = \frac{5}{7}$

Таким образом, цена игры и оптимальная стратегия игрока A равны:

$$v = \frac{5}{7};\ \overline{P}_{opt} = \left(\frac{5}{7}; \frac{2}{7}\right)$$