

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA



PROJETO PIBEG

Unidade VI

Solução Numérica de Equações Diferenciais Ordinárias

1
4 5 2

INTRODUÇÃO

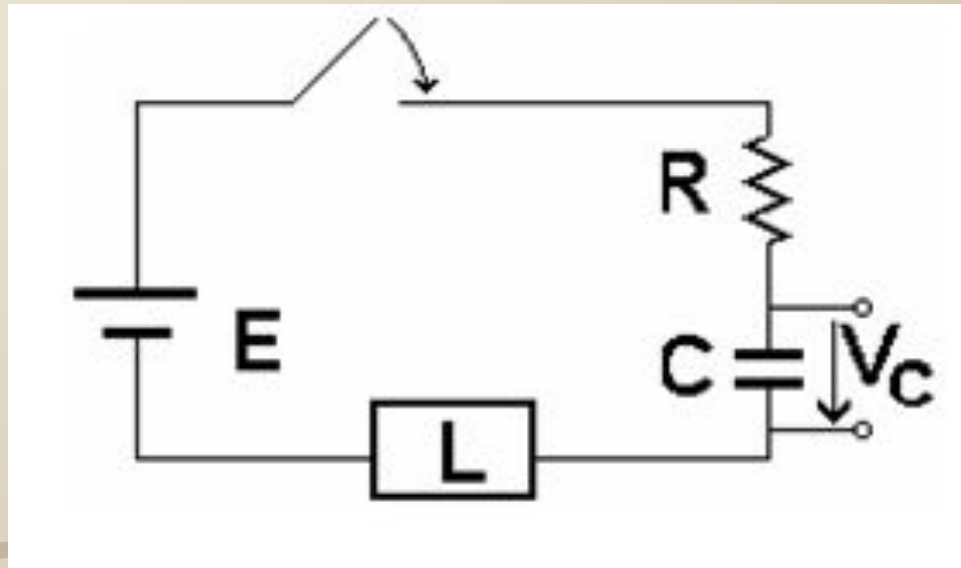
Uma equação diferencial ordinária é definida como uma equação que envolve uma função incógnita y e algumas de suas derivadas avaliadas em uma variável independente x , da forma:

$$y^{(n)}(x) = f[x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x)]$$

Nas ciências aplicadas a utilização de equações diferenciais tem como objetivo descrever o comportamento dinâmico de sistemas físicos. Por exemplo, o comportamento dinâmico de um circuito, mostrado na figura a seguir, pode ser descrito por uma equação diferencial.

CIRCUITOS ELÉTRICOS RLC

Circuitos elétricos mais complexos são basicamente formados por resistores de resistência R , indutores de indutância L , capacitores de capacitância C , carregado com uma diferença de potencial V_C e uma fonte elétrica cuja diferença de potencial é indicada $E(t)$.



Se $E(t)$ é a diferença de potencial da fonte de alimentação e $i(t)$ é a intensidade da corrente elétrica, então:

- V_L é a diferença de potencial nos terminais do indutor:

$$V_L(t) = L \frac{di}{dt}$$

- V_R é a diferença de potencial nos terminais do resistor:

$$V_R(t) = Ri(t)$$



- V_C é a diferença de potencial nos terminais do capacitor:

$$V_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(u) du$$

A lei de *Kirchoff* para tensões afirma que a soma algébrica de todas as tensões tomadas num sentido determinado (horário ou anti-horário), em torno de um circuito fechado é nula. Assim, quando for fechado o interruptor, obteremos:

$$V_L(t) + V_R(t) + V_C(t) = E(t)$$



Substituindo

$$V_L(t) = L \frac{di}{dt} \quad V_R(t) = Ri(t) \quad V_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(u) du$$

em

$$V_L(t) + V_R(t) + V_C(t) = E(t)$$

obtemos:

$$L \frac{di}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(u) du = E(t)$$

Se $E(t)$ é constante e derivarmos em relação à variável t , teremos

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = 0$$

e temos uma EDO de segunda ordem, linear e homogênea.

Se $E(t)$ é uma função diferenciável da variável t , então

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = \frac{dE}{dt}$$

e temos uma EDO linear não-homogênea.



TIPOS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS



0011 0010

1
4₅2

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

São equações diferenciais que possuem apenas uma variável independente.

Exemplos:

$$\frac{dy}{dx} = x + y \quad \longrightarrow \quad y \text{ é função de } x \text{ e } x \text{ é a única variável independente.}$$

$$\frac{dy}{dt} = x^2 + y^2 \quad \longrightarrow \quad y \text{ e } x \text{ são funções de } t; t \text{ é a única variável independente.}$$

$$\frac{d^2y}{dw^2} = x^2 + y^2 \quad \longrightarrow \quad y \text{ e } x \text{ são funções de } w; w \text{ é a única variável independente. Esta edo é de segunda ordem.}$$



EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Uma equação diferencial parcial é aquela cuja função incógnita depende de duas ou mais variáveis independentes.

Exemplo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \longrightarrow \quad u \text{ é função de } x \text{ e } y; x \text{ e } y \text{ são variáveis independentes. EDP linear, de } 2^{\text{a}} \text{ ordem e homogênea. (Equação de Laplace)}$$



SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Determinadas equações diferenciais podem ser solucionadas analiticamente, cuja solução é uma expressão literal. No entanto, isto nem sempre é possível. Neste caso, a solução é obtida através de solução numérica, como será visto na seqüência.



Exemplo:

Resolva a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = y$.

Solução:

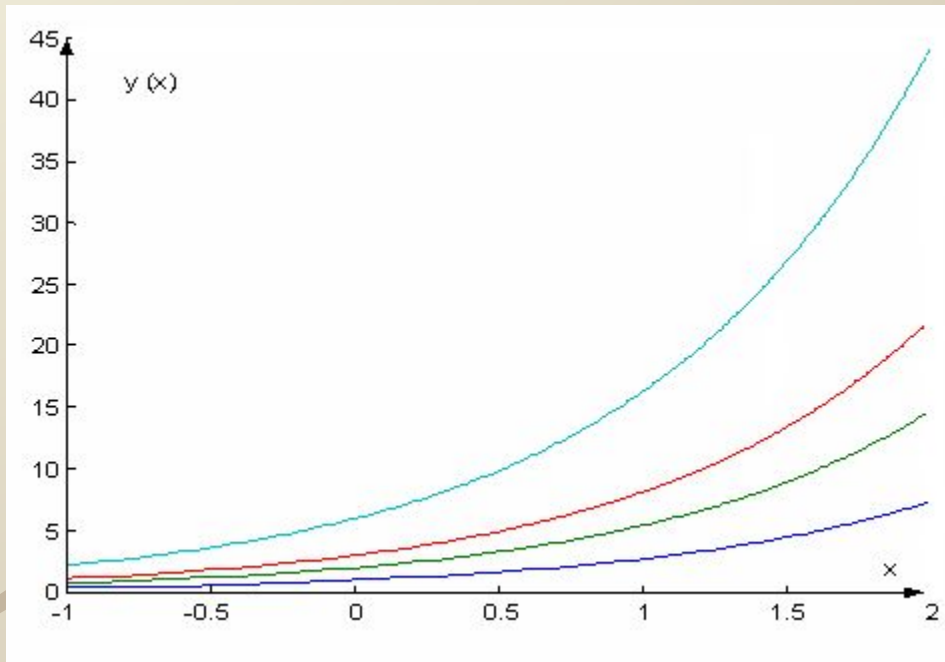
$$\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx \Rightarrow \ln(y) + c_1 = x + c_2$$

$$y(x) = e^{x+c} = e^x e^c.$$

Tomando $k = e^c$ obtemos :

$$y(x) = ke^x$$

Observe que a solução da equação diferencial resulta numa família de curvas que dependem da constante k , como pode ser visto na figura abaixo. Uma solução particular pode ser obtida a partir das condições iniciais do problema. A especificação de uma condição inicial define uma solução entre a família de curvas.



$$y(x) = ke^x$$

SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS – PROBLEMA DE VALOR INICIAL



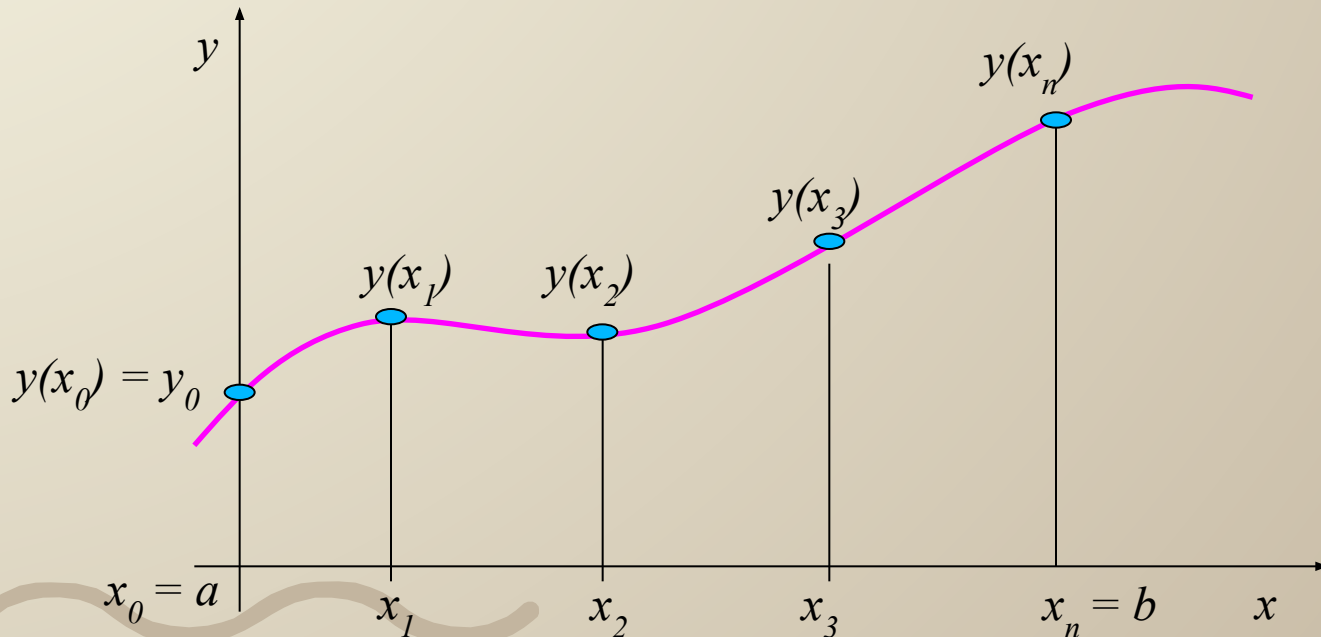
0011 0010

1
4 2
5

Considere a equação diferencial ordinária de primeira ordem com condição inicial :

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \quad x \in [a, b]; x_0 = a$$

Se a solução da equação diferencial acima é do tipo $y(x)$, conforme ilustrado abaixo:



então a solução numérica da equação diferencial é obtida aproximando-se os valores $y(x_0), y(x_1), y(x_2), y(x_3), \dots, y(x_n)$, conforme a tabela abaixo:

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	y_n

onde $x_j = x_0 + jh$, com $h = \frac{b-a}{n}$ e n é o número de subintervalos de $[a, b]$.

Considera-se que a notação $y(x_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$ indica a solução exata da EDO nos pontos $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, e y_j , $j = 1, 2, \dots, n$ indica a solução aproximada obtida por um método numérico.

Na solução numérica não se determina a expressão literal da função $y(x)$, mas sim uma solução aproximada do PVI num conjunto discreto de pontos.

Nos problemas das ciências aplicadas, normalmente estuda-se o comportamento dinâmico de determinadas variáveis, portanto necessita-se da evolução das variáveis em função da variável independente. A partir dos dados numéricos é possível gerar um esboço do gráfico da função incógnita.



MÉTODOS BASEADOS NA SÉRIE DE TAYLOR

Série de Taylor
Resumo

Suponhamos que, de alguma forma, tenhamos as aproximações y_1, y_2, \dots, y_i para $y(x)$, em x_1, x_2, \dots, x_i .

Se y for suficientemente “suave”, a série de Taylor de $y(x)$ em torno de $x = x_i$ é:

$$y(x) = y(x_i) + y'(x_i)(x - x_i) + y''(x_i) \frac{(x - x_i)^2}{2!} + \dots + y^{(k)}(x_i) \frac{(x - x_i)^k}{k!} + y^{(k+1)}(\xi_x) \frac{(x - x_i)^{k+1}}{(k+1)!}$$

ξ_x entre x_i e x .

Assim,

$$y(x_{i+1}) \cong y(x_i) + y'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + y''(x_i) \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} + \dots + y^{(k)}(x_i) \frac{(x_{i+1} - x_i)^k}{k!}$$

1
4
5
2

Se $y_i^{(j)}$ representa a aproximação para a j -ésima derivada da função $y(x)$ em x_i : $y^{(j)}(x_i)$ e $h = x_{i+1} - x_i$, teremos:

$$y(x_{i+1}) \cong y_{i+1} = y_i + y_i' h + y_i'' \frac{h^2}{2!} + \dots + y_i^{(k)} \frac{h^k}{k!}$$

e o erro de truncamento é dado por:

$$e(x_i) = \frac{y^{(k+1)}(\xi_{x_i})}{(k+1)!} h^{(k+1)}$$



Observamos que, se $y(x)$ tem derivadas de ordem $(k+1)$, contínua num intervalo fechado I que contém os pontos sobre os quais estamos fazendo a discretização, então existe:

$$M_{k+1} = \max_{x \in I} |y^{(k+1)}(x)|$$

Assim, teremos um majorante para o erro de truncamento pois

$$|y^{(k+1)}(\xi_x)| \leq M_{k+1} \quad \forall \xi_x \in I$$

$$\Rightarrow |e(x_i)| \leq \max_{x \in I} |e(x)| \leq \frac{M_{k+1} h^{k+1}}{(k+1)!} = Ch^{k+1}$$

1
4
5
2

Um método numérico é dito de ordem p se existe uma constante C tal que:

$$|e(x_{i+1})| < Ch^{p+1}$$

Onde C depende das derivadas da função que define a equação diferencial.

Para aplicar o método da série de Taylor de ordem k :

$$y_{i+1} = y_i + y_i' h + \frac{y_i''}{2!} h^2 + \dots + \frac{y_i^{(k)}}{k!} h^k$$

temos de calcular y_i' , y_i'' , y_i''' , ..., $y_i^{(k)}$.



Agora, $y'(x) = f(x, y(x))$. Então:

$$y'' = f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x))y'(x) = f_x + f_y f$$

Assim, por exemplo, o método de série de Taylor de 2ª ordem é:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2}[f_x(x_i, y_i) + f_y(x_i, y_i)f(x_i, y_i)], \quad i = 0, 1, \dots$$



Observe que

$$\begin{aligned}y''''(x) &= f_{xx}(x, y(x)) + f_{xy}(x, y(x))y'(x) + \\ &\quad + [f_{yx}(x, y(x)) + f_{yy}(x, y(x))y'(x)]y'(x) + f_y(x, y(x))y''(x) \\ &= f_{xx} + f_{xy}f + (f_{yx} + f_{yy}f)f + f_y(f_x + f_yf),\end{aligned}$$

A expressão da terceira derivada já nos mostra a dificuldade dos cálculos de um método de Taylor de terceira ordem. Observe ainda que todos esses cálculos são efetuados para cada i , $i = 1, \dots, n$.



Os métodos que usam o desenvolvimento em série de Taylor de $y(x)$ teoricamente fornecem solução para qualquer equação diferencial. No entanto, do ponto de vista computacional, os métodos de série de Taylor de ordem mais elevada são considerados inaceitáveis pois, a menos de uma classe restrita de funções $f(x,y)$ ($f(x,y) = x^2 + y^2$, por exemplo), o cálculo das derivadas totais envolvidas é extremamente complicado.



MÉTODO DE PASSO UM MÉTODO DE EULER



0011 0010

1
4₅2

Consideremos, o método de série de Taylor de ordem $k = 1$, ou seja,

$$y_{i+1} = y_i + hy'_i = y_i + hf(x_i, y_i)$$

onde

$$e(x_{i+1}) = \frac{y''(\xi_{x_{i+1}})}{2} h^2$$

Este é o método de Euler, que é um método de série de Taylor de ordem 1.



INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO MÉTODO DE EULER:

Como conhecemos x_0 e $y_0 = f(x_0)$, então sabemos calcular $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$. Assim, a reta $r_0(x)$ que passa por (x_0, y_0) , com coeficiente angular $y'(x_0)$, é:

$$r_0(x) = y(x_0) + (x - x_0)y'(x_0)$$

Escolhido $h = x_{k+1} - x_k$

$$y(x_1) \approx y_1 = r_0(x_1) = y(x_0) + hy'(x_0)$$

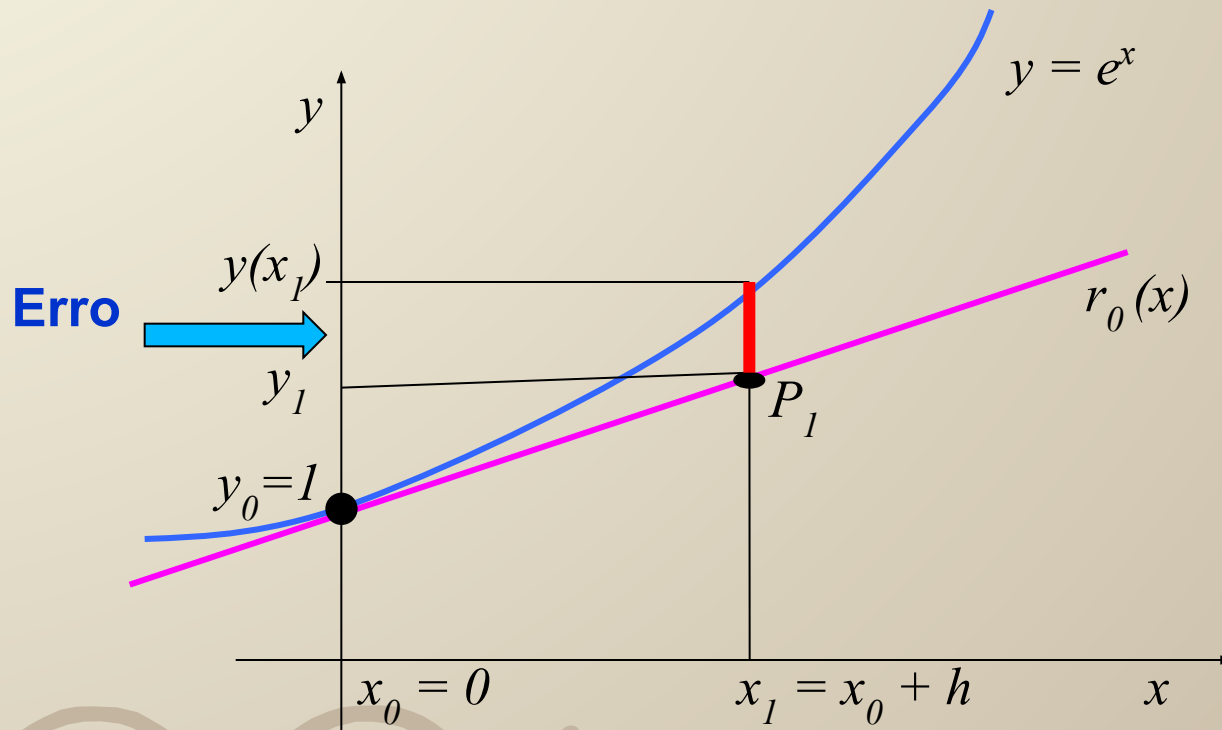
ou seja

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

O raciocínio é repetido com (x_1, y_1) e $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$ e assim, sucessivamente, o método de Euler nos fornece:

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k). \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

GRAFICAMENTE:



1
4
5
2

EXEMPLO:

Seja o PVI: $y' = y$, $y(0) = 1$. Trabalhando com quatro casas decimais, usaremos o método de Euler para aproximar $y(0.04)$ com erro menor do que ou igual a ε ; $\varepsilon = 5 \times 10^{-4}$.

O primeiro passo é encontrar h de modo que:

$$|e(x_i)| = \left| \frac{y''(\xi_{x_i})}{2} h^2 \right| \leq \varepsilon$$

Neste caso, conhecemos a solução analítica do PVI: $y(x) = e^x$, temos então que:

$$M_2 = \max_{x \in [0, 0.04]} |y''(x)| = e^{0.04} = 1.0408 \Rightarrow |y''(\xi_{x_i})| \leq M_2$$

1
4
5
2



donde $|e(x)| \leq \frac{1.0408}{2} h^2 \quad \forall x \in I = [0, 0.04]$

$$\frac{1.0408}{2} h^2 \leq 5 \times 10^{-4}; \text{então } h^2 \leq \frac{2 \times 5 \times 10^{-4}}{1.0408} = \frac{10^{-3}}{1.0408}$$

Portanto,

$$h \leq 0.0310.$$

Considerando pontos igualmente espaçados, tem-se $h = 0.04/n$, onde n é o número de subintervalos de I . Assim,

$$\frac{0.04}{n} \leq 0.0310 \Rightarrow n \geq \frac{0.04}{0.031} \Rightarrow n \geq 1.29 \Rightarrow n \geq 2.$$

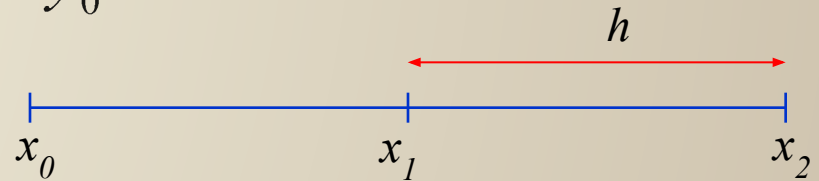
Portanto, tomando $n = 2$, $h = 0.02$.

1
4
5
2

Assim, $x_0 = 0$ e $y(x_0) = y(0) = y_0 = 1$.

$$x_1 = 0.02$$

$$x_2 = 0.04$$



Agora:

$$\begin{aligned} y(x_1) &\approx y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = y_0 + hy_0 \\ &= y_0(1 + h) = 1(1 + 0.02) \\ &= 1.02 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e } y(x_2) &\approx y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = \boxed{} = y_1(1 + h) \\ &= 1.02(1.02) = 1.02^2 \\ &= 1.0404 \end{aligned}$$

Dado que $e^{0.04}$, com quatro casas decimais, vale 1.0408, temos que o erro cometido foi $1.0408 - 1.0404 = 4 \times 10^{-4} < 5 \times 10^{-4}$.

1
4
5
2

MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA



0011 0010

1
4₅2

MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA

A idéia básica destes métodos é aproveitar as qualidades dos métodos de série de Taylor (ordem elevada) e ao mesmo tempo eliminar sua maior dificuldade que é o cálculo de derivadas de $f(x,y)$ que, conforme vimos, torna os métodos de série de Taylor computacionalmente inaceitáveis.



Podemos dizer que os métodos de Runge-Kutta de ordem p se caracterizam pelas propriedades:

- São de passo um (auto-iniciantes);
- não exigem o cálculo de derivadas parciais de $f(x,y)$;
- necessitam apenas do cálculo de $f(x,y)$ em determinados pontos (os quais dependem da ordem dos métodos);
- expandindo-se $f(x,y)$ por Taylor em torno de (x_i, y_i) e agrupando-se os termos em relação às potências de h , a expressão do método de Runge-Kutta coincide com a do método de Taylor de mesma ordem.



MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA DE 1ª ORDEM: MÉTODO DE EULER

Já vimos que o método de Euler é um método de série de Taylor de 1ª ordem:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Observe que o método de Euler possui as propriedades anteriores que o caracterizam como um método de Runge-Kutta de ordem $p = 1$.



MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA DE 2ª ORDEM:

Inicialmente será apresentado um método particular que é o método de Heun, ou método de Euler Aperfeiçoado, pois ele tem uma interpretação geométrica bastante simples.

Conforme o próprio nome indica, este método consiste em fazer mudanças no método de Euler para assim conseguir um método de ordem mais elevada.



MÉTODOS DE EULER APERFEIÇOADO: INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA



0011 0010

1
4₅2

Dado o PVI:

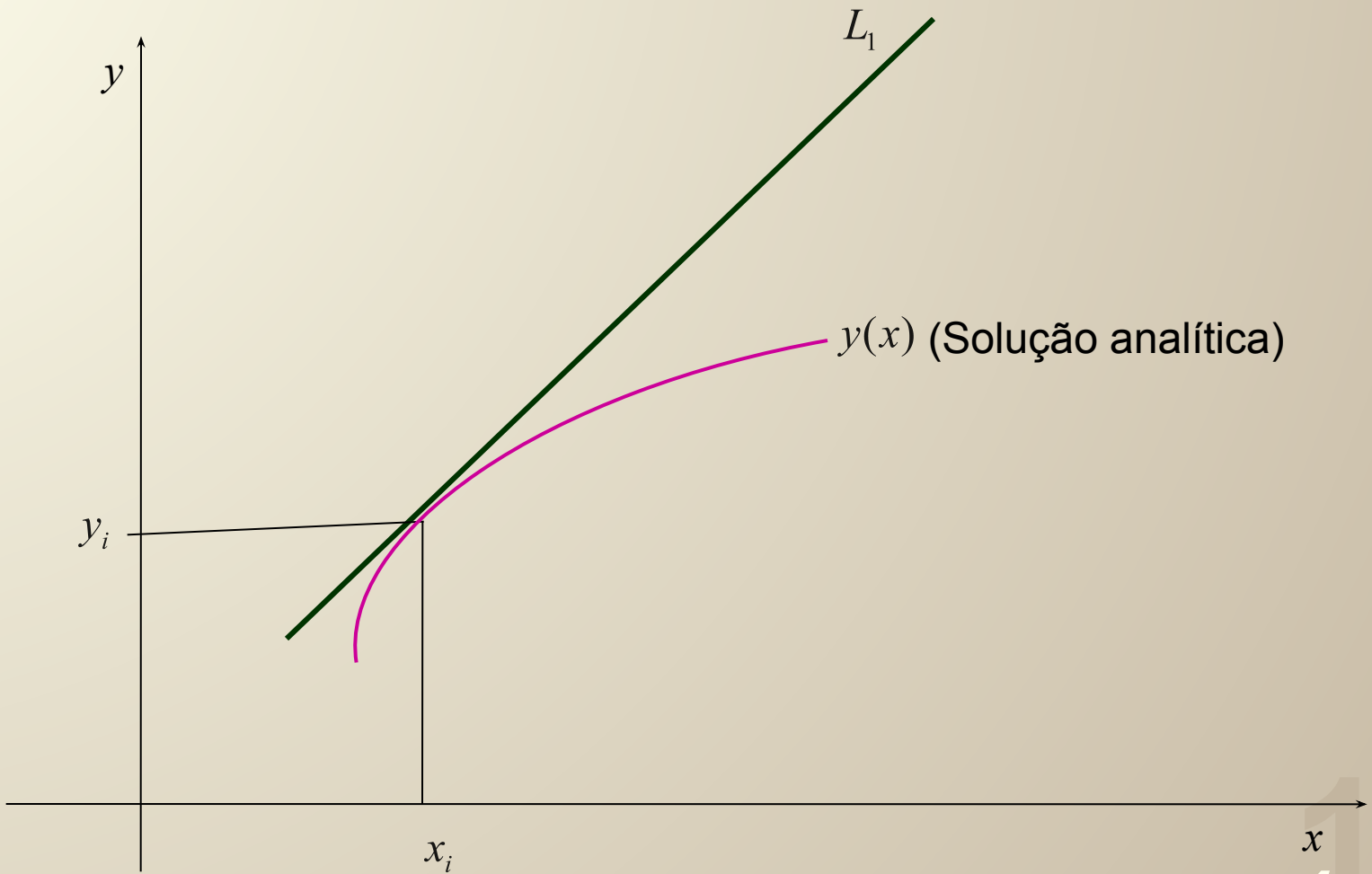
$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \quad x \in [a, b]; x_0 = a$$

Considere o ponto (x_i, y_i) , $y_i \cong y(x_i)$. Vamos supor a situação ideal em que a curva desenhada com linha cheia seja a solução $y(x)$ da nossa equação (isto só acontece mesmo em (x_0, y_0)).

Por (x_i, y_i) traçamos a reta L_1 cujo coeficiente angular é $y'_i = f(x_i, y_i)$, ou seja,

$$L_1 : z_1(x) = y_i + (x - x_i)y'_i = y_i + (x - x_i)f(x_i, y_i).$$





0011 0010

4₅2

Assim, dado o passo h , $z_1(x_{i+1}) = z_1(x_i + h)$ é igual ao valor y_{i+1} obtido do método de Euler, que chamamos aqui de \bar{y}_{i+1} .

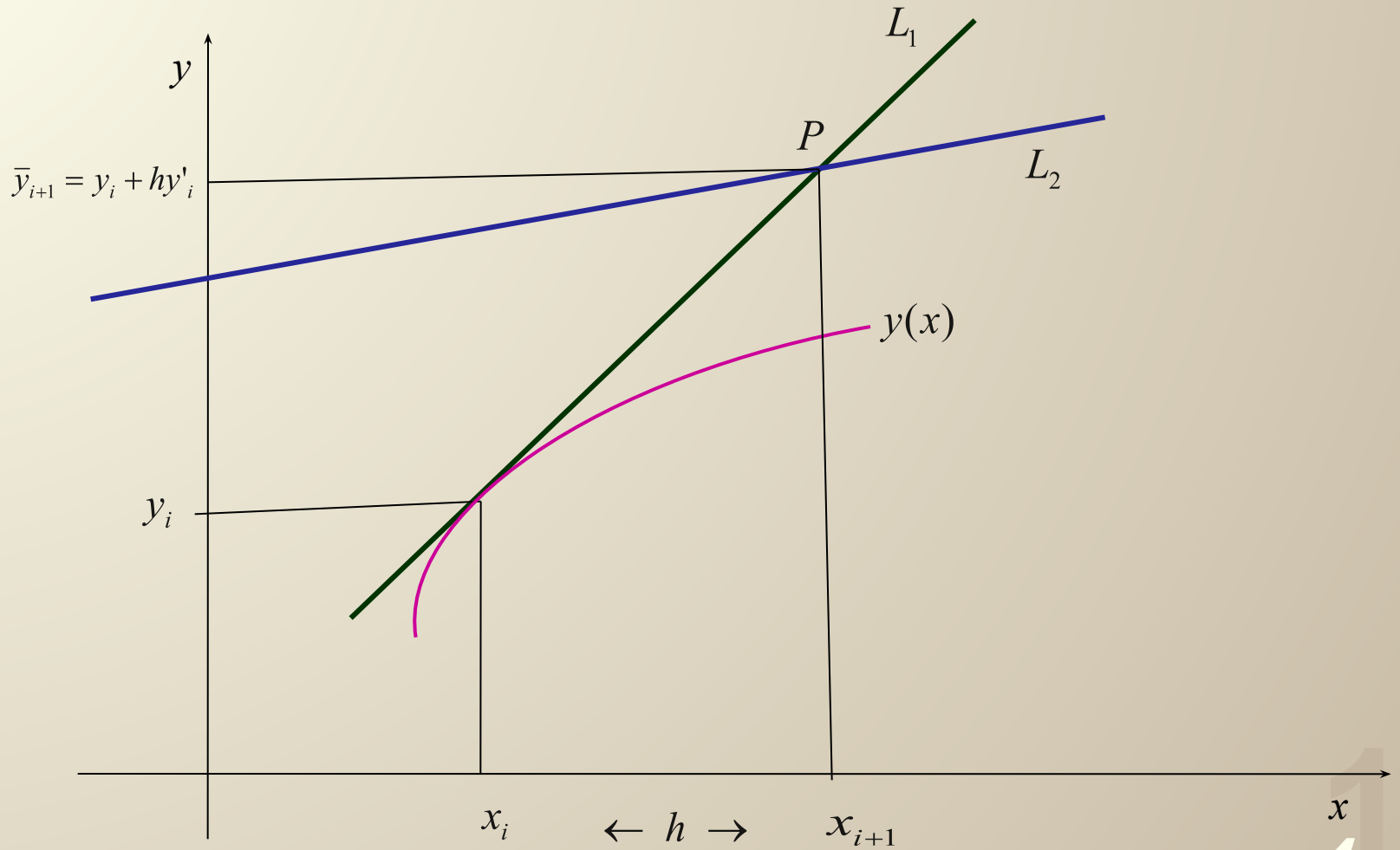
Seja

$$P \equiv (x_i + h, y_i + hy'_i) = (x_{i+1}, \bar{y}_{i+1}).$$

Por P agora, traçamos a reta L_2 , com coeficiente angular dado por:

$$f(x_i + h, y_i + hy'_i) = f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1}).$$

$$L_2 : z_2(x) = y_i + hy'_i + [x - (x_i + h)]f(x_i + h, y_i + hy'_i)$$



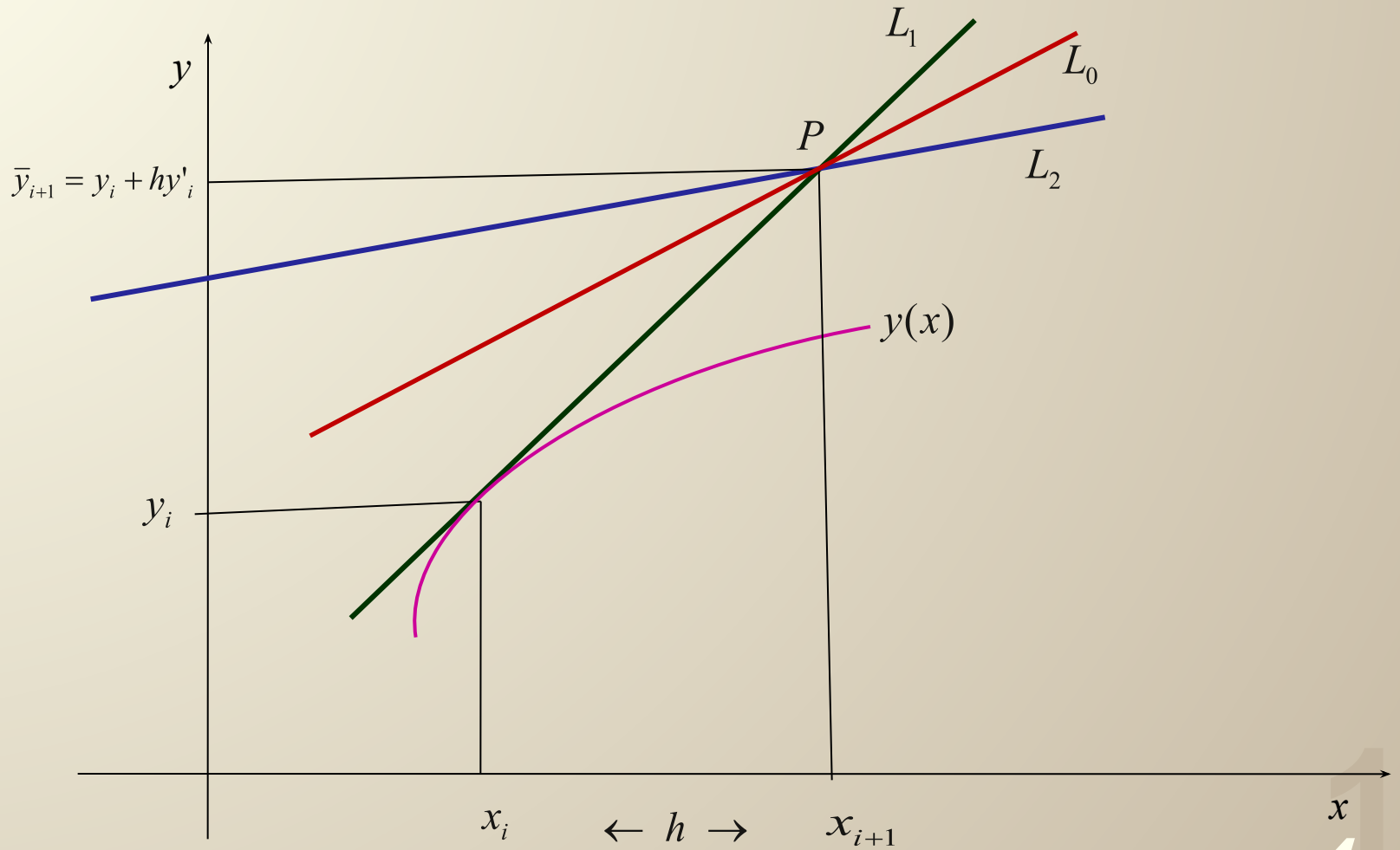
0011 0010

4₅2

A reta pontilhada L_0 passa por P e tem inclinação dada pela média aritmética das inclinações das retas L_1 e L_2 , ou seja, sua inclinação é:

$$\frac{f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hy'_i)}{2}$$





0011 0010

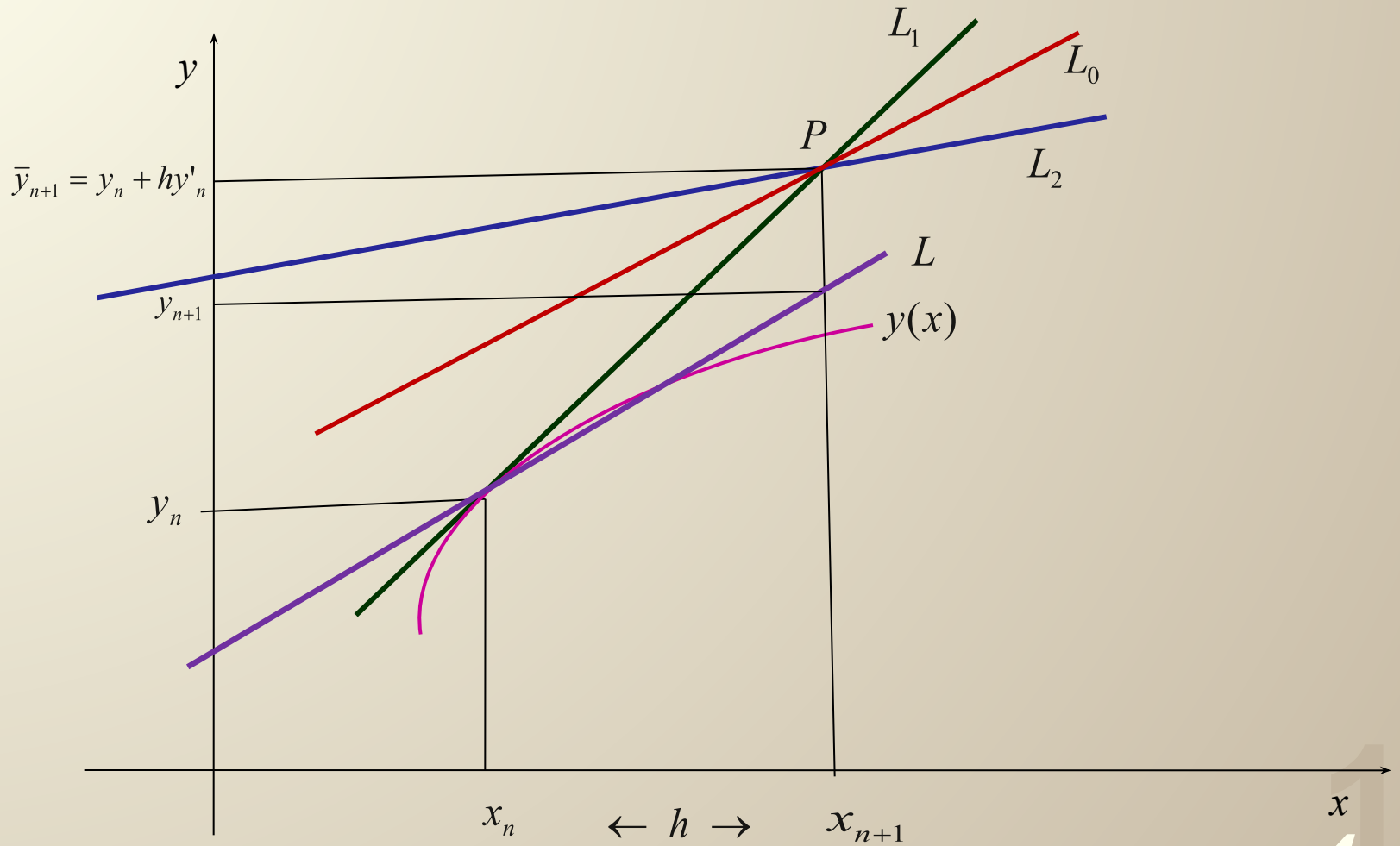
4₅2

A reta pontilhada L_0 passa por P e tem por inclinação a média das inclinações das retas L_1 e L_2 , ou seja, sua inclinação é:

$$\frac{f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hy'_i)}{2}$$

A reta L passa por (x_i, y_i) e é paralela à reta L_0 , donde:

$$L : z(x) = y_i + (x - x_i) \frac{f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hy'_i)}{2}$$



O valor fornecido para y_{i+1} pelo método de Euler Aperfeiçoado é:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i))], \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Observamos que este método é de passo um e só trabalha com cálculos de $f(x, y)$, não envolvendo suas derivadas. Assim, para verificarmos que ele realmente é um método de Runge-Kutta de 2ª ordem, falta verificar se sua fórmula concorda com a do método de série de Taylor até os termos de 2ª ordem

em h :

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} f_x(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} f(x_i, y_i) f_x(x_i, y_i)$$

Esta verificação será feita para o caso geral, apresentado a seguir.

FORMA GERAL DOS MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA DE 2ª ORDEM



0011 0010

1
4 2
5

O método de Euler Aperfeiçoado é um método de Runge-Kutta de 2ª ordem e podemos pensar que ele pertence a uma classe mais geral de métodos do tipo:

$$y_{i+1} = y_i + ha_1 f(x_i, y_i) + ha_2 f(x_i + b_1 h, y_i + b_2 h f(x_i, y_i))$$

Para o método de Euler Aperfeiçoado,

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad b_1 = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \quad b_2 = 1$$

Temos quatro parâmetros livres: a_1 , a_2 , b_1 e b_2 . A concordância com o método da série de Taylor até os termos de ordem h^2 é será mostrado a seguir.

1
4
5
2

O desenvolvimento de Taylor da função $f(x_i + b_1h, y_i + b_2hf(x_i, y_i))$ em torno do ponto (x_i, y_i) é dado por:

$$f(x_i + b_1h, y_i + b_2hf(x_i, y_i)) = f(x_i, y_i) + b_1hf_x(x_i, y_i) + b_2hf(x_i, y_i)f_y(x_i, y_i) + \text{+ termos de } h^2.$$

Desta forma o método de Runge-Kutta pode ser reescrito como:

$$y_{i+1} = y_i + a_1hf(x_i, y_i) + a_2h[f(x_i, y_i) + b_1hf_x(x_i, y_i) + b_2hf(x_i, y_i)f_y(x_i, y_i)] + \text{+ termos de } h^3.$$



A expressão:

$$y_{i+1} = y_i + a_1 hf(x_i, y_i) + a_2 h[f(x_i, y_i) + b_1 hf_x(x_i, y_i) + b_2 hf(x_i, y_i)f_y(x_i, y_i)] +$$

+ termos de h^3 .

pode ser escrita como

$$y_{i+1} = y_i + a_1 hf(x_i, y_i) + a_2 hf(x_i, y_i) + a_2 b_1 h^2 f_x(x_i, y_i) + a_2 b_2 h^2 f(x_i, y_i)f_y(x_i, y_i) +$$

+ termos de h^3 .

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)(a_1 + a_2) + h^2[a_2 b_1 f_x(x_i, y_i) + a_2 b_2 f(x_i, y_i)f_y(x_i, y_i)] +$$

+ termos de h^3 .



Como o método de série de Taylor de 2ª ordem é escrita como:

$$y_{i+1} = y_i + h \boxed{f(x_i, y_i)} + h^2 \boxed{\frac{1}{2}[f_x(x_i, y_i) + f_y(x_i, y_i)f(x_i, y_i)]}, \quad i = 0, 1, \dots$$

+ termos de h^3 .

E o método de Runge-Kutta de 2ª ordem é dado por:

$$y_{i+1} = y_i + h \boxed{f(x_i, y_i)(a_1 + a_2)} + h^2 \boxed{[a_2 b_1 f_x(x_i, y_i) + a_2 b_2 f(x_i, y_i) f_y(x_i, y_i)]} +$$

+ termos de h^3 .

Então, a concordância dos dois métodos até h^2 é obtida se:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_2 b_1 = \frac{1}{2} \\ a_2 b_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

1
4
5
2

O sistema anterior possui três equações e quatro variáveis. Escolhendo um dos parâmetros arbitrariamente, por exemplo $a_2 = w \neq 0$, temos:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_2 b_1 = \frac{1}{2} \\ a_2 b_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} a_1 = 1 - w \\ b_1 = b_2 = \frac{1}{2} w \end{cases}$$

e a forma mais geral dos métodos de Runge-Kutta de 2ª ordem é dada por

$$y_{i+1} = y_i + h[(1 - w)f(x_i, y_i) + wh[f(x_i + \frac{h}{2w}, y_i + \frac{h}{2w} f(x_i, y_i))]], \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA DE ORDENS SUPERIORES



0011 0010

1
4₅2

De forma análoga, pode-se construir métodos de 3ª ordem, 4ª ordem, etc. A seguir serão fornecidas apenas fórmulas para métodos de Runge-Kutta de 3ª e 4ª ordem:

3ª ordem

$$y_{i+1} = y_i + \frac{2}{9}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{4}{9}k_3 \quad \text{onde}$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}k_2\right)$$

1
4 2
5

4ª ordem

$$y_{i+1} = y_i + \frac{2}{9}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{4}{9}k_3 \quad \text{onde}$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}k_2\right)$$



OBSERVAÇÃO:

- Os métodos de Runge-Kutta, apesar de serem auto-iniciáveis (pois são de passo um) e não trabalharem com derivadas de $f(x,y)$, apresentam a desvantagem de não haver para eles uma estimativa simples para o erro, o que inclusive poderia ajudar na escolha do passo h .
- Existem ainda **adaptações** dos métodos de Runge-Kutta que são simples operacionalmente e que são usadas também para estimativas de erro e controle do tamanho do passo h .



MÉTODOS DO PONTO MÉDIO



0011 0010

1
4₅2

Considere agora o desenvolvimento de $y(x_i + h)$ e $y(x_i - h)$ em série de Taylor em torno do ponto x_i , isto é:

$$\begin{cases} y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + \dots \\ y(x_i - h) = y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) - \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + \dots \end{cases}$$

Fazendo $y(x_i + h) - y(x_i - h)$ obtemos:

$$y(x_i + h) - y(x_i - h) = 2hy'(x_i) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + \dots$$

$O(h^3)$



Considerando apenas o primeiro termo do lado direito da expansão acima, substituindo $y(x_i+h)$ por y_{i+1} , $y(x_i-h)$ por y_{i-1} e $y'(x_i)$ por f_i , obtemos:

$$y_{i+1} - y_{i-1} = 2hf_i$$

ou

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf_i$$

onde y_0 e y_1 são valores iniciais.

Desta forma o método do ponto médio é de passo dois e possui ordem 2.



Série de Taylor:

Seja f uma função com derivadas de todas as ordens em algum intervalo contendo a como um ponto interior. Então, a série de Taylor gerada por f em $x = a$ é

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \dots$$



Exemplo:

Desenvolver $f(x) = \ln(x)$, em torno de $x = 1$.

$$f(x) = \ln x \rightarrow f(1) = 0$$

$$f'(x) = x^{-1} \rightarrow f'(1) = 1$$

$$f''(x) = -x^{-2} \rightarrow f''(1) = -1$$

$$f'''(x) = 2x^{-3} \rightarrow f'''(1) = 2$$

$$f^{IV}(x) = -6x^{-4} \rightarrow f^{IV}(1) = -6$$

⊠

$$f^n(x) = (-1)^{n+1} (n-1)! x^{-n} \rightarrow f^n(1) = (-1)^{n+1} (n-1)!$$

Assim,

$$\ln x = 0 + (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{2(x-1)^3}{3!} - \frac{6(x-1)^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} (n-1)! (x-1)^n}{n!} + \dots$$

Portanto,

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n} + \dots$$



0011 0010

1
4 5 2

MÉTODOS DE PASSO MÚLTIPLO BASEADOS EM INTEGRAÇÃO NUMÉRICA



0011 0010

1
4₅2

A característica destes métodos é a utilização de informações sobre a solução em mais de um ponto. Podem ser divididos em:

- **Métodos explícitos:** trabalha-se com as aproximações $y_i, y_{i-1}, y_{i-2}, \dots, y_{i-m}$ para obter y_{i+1} .
- **Métodos implícitos:** trabalha-se com as aproximações $y_{i+1}, y_i, y_{i-1}, y_{i-2}, \dots, y_{i-m}$ para obter y_{i+1} .



A fórmula geral dos métodos lineares de passo múltiplo é dada por:

$$y_{i+1} = \sum_{j=1}^k \alpha_j y_{i-j+1} + h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{i-j+1}; \quad i \geq k-1$$

Nesta expressão, observa-se que:

- Se $\beta_0 = 0$, são necessários k passos anteriores: $y_i, y_{i-1}, y_{i-2}, \dots, y_{i-(k-1)}$. Este é um método explícito.
- Se $\beta_0 \neq 0$, necessita-se de k passos anteriores e do valor de $f_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1})$. Este é um método implícito.

MÉTODO DE ADAMS - BASHFORTH



0011 0010

1
4₅2

Estes métodos baseiam-se na idéia de integrar a equação diferencial ordinária de primeira ordem, isto é:

$$y'(x) = f(x, y(x)) \Rightarrow \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx \Rightarrow$$

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx \Rightarrow$$

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx$$



Seja a aproximação de $f(x, y(x))$ dada pelo polinômio de grau m , $p_m(x)$, que interpola $f(x, y(x))$ em:

$x_i, x_{i-1}, x_{i-2}, \dots, x_{i-m}$. (Método explícito)

$x_{i+1}, x_i, x_{i-1}, x_{i-2}, \dots, x_{i-(m-1)}$. (Método implícito)

Desta forma, a expressão dos métodos de ADAMS – BASHFORTH são do tipo:

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} p_m(x) dx$$



Para $m = 3$, mostra-se que:

Método explícito de ordem 4

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} \{ 55 f_i - 59 f_{i-1} + 37 f_{i-2} - 9 f_{i-3} \} \text{ para } i \geq 3$$

com erro local:

$$e_{loc}(x_{i+1}) = \frac{251}{720} h^5 y^{(5)}(\xi_{x_i}) \quad , \quad \xi_{x_i} \in [x_i, x_{i+1}]$$



Para $m = 3$, mostra-se que:

Método implícito de ordem 4

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} \{ 9 f_{i+1} + 19 f_i - 5 f_{i-1} + f_{i-2} \} \text{ para } i \geq 2$$

com erro local:

$$e_{loc}(x_{i+1}) = -\frac{19}{720} h^5 y^{(5)}(\xi_{x_i}) \quad , \quad \xi_{x_i} \in [x_i, x_{i+1}]$$

Aconselha-se a utilização de um método de passo simples de mesma ordem para a obtenção dos valores necessários para a inicialização do método de passo múltiplo. Nesse caso, é usual aplicar o Método de Runge-Kutta de quarta ordem.

MÉTODO PREDITOR – CORRETOR DE ADAMS-MOULTON



0011 0010

1
4₅2

Dado o PVI:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

1º passo: Calcular usando um método de passo simples de 4ª ordem os valores iniciais: y_1 , y_2 e y_3

2º passo: Calcular $y_{i+1}^{(0)}$ utilizando o método explícito (PREVISÃO):

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + \frac{h}{24} [55 f_i - 59 f_{i-1} + 37 f_{i-2} - 9 f_{i-3}] \quad i \geq 3$$



3º passo: Calcular:

$$f_{i+1}^{(o)} = f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(o)})$$

4º passo: Calcular $y_{i+1}^{(k)}$ utilizando o método implícito (CORREÇÃO):

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{24} [9 f_{i+1}^{(k-1)} + 19 f_i - 5 f_{i-1} + f_{i-2}]$$

Até que

$$\left| \frac{y_{i+1}^{(k)} - y_{i+1}^{(k-1)}}{y_{i+1}^{(k)}} \right| \leq \xi \quad k = 1, 2, 3, \dots$$



EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE ORDEM M



0011 0010

1
4 2
5

Uma equação diferencial de ordem m , pode ser reduzida a um sistema de m equações de primeira ordem. A maneira mais usual para resolver estas m equações, desde que seja um PVI, é trabalhar na forma matricial.

Para exemplificar, consideremos uma e.d.o. de 2ª ordem:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y'(x_0) = y'_0, \quad y(x_0) = y_0 \end{cases}, \text{ seja } z = y' \text{ e } z' = y'' \Rightarrow \begin{cases} z' = f(x, y, z) \\ y' = z \\ z(x_0) = y'_0, \quad y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

escrevendo na forma matricial vem:

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} f(x, y, z) \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow Y' = F(x, Y) \text{ para } Y(x_0) = \begin{pmatrix} y'_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

A equação diferencial

$$Y' = F(x, Y) \quad \text{para} \quad Y(x_0) = \begin{pmatrix} y'_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

pode ser resolvida utilizando qualquer um dos métodos estudados anteriormente. Por exemplo, o método de Euler Aperfeiçoado:

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{h}{2} \left\{ F(x_i, Y_i) + F(x_i + h, Y_i + h Y'_i) \right\}$$

