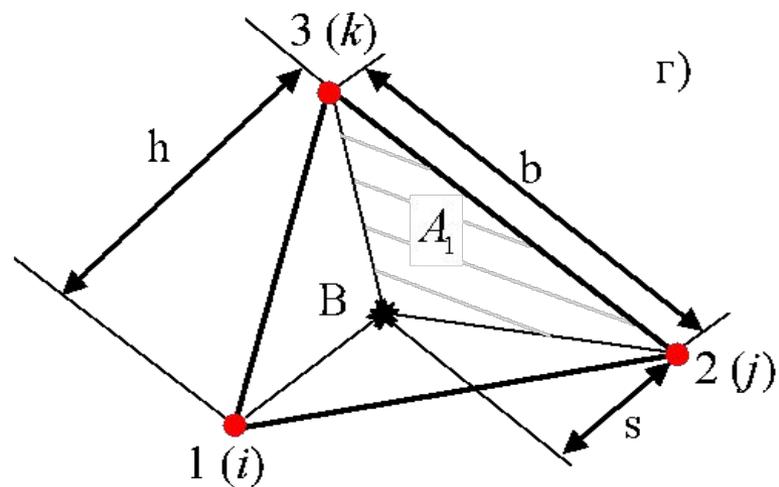
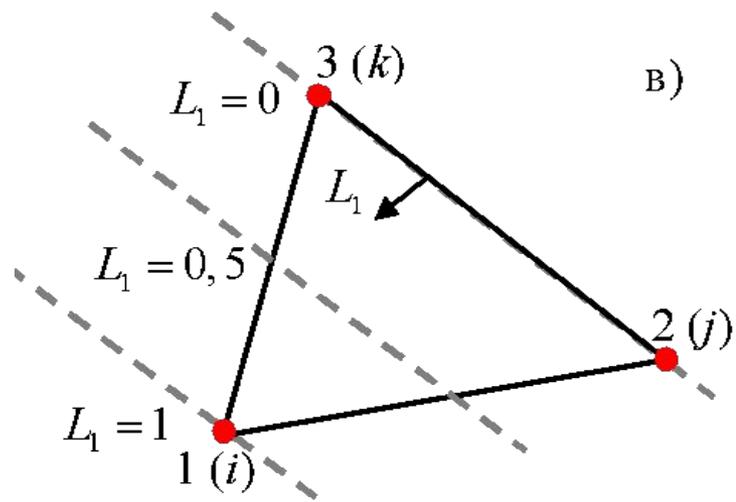
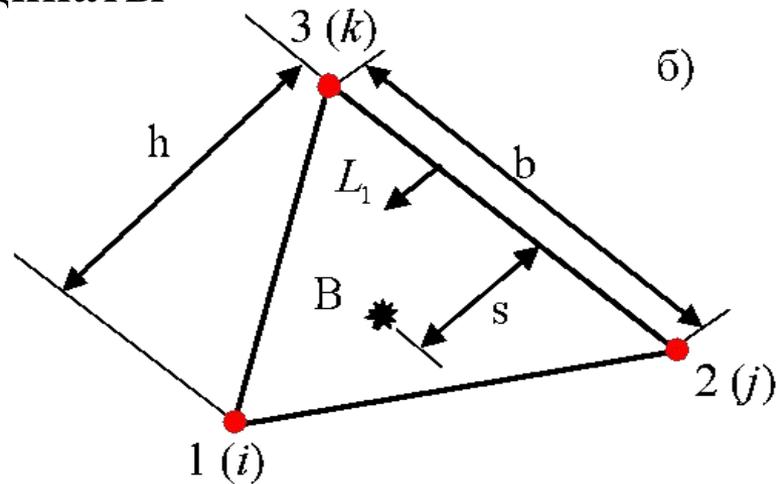
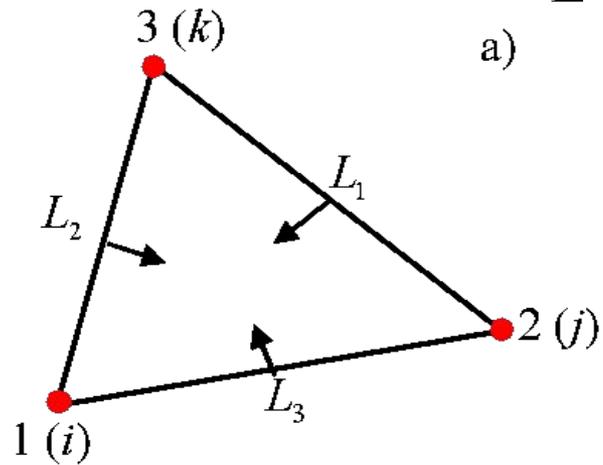


Лекция Вычислительная механика

**Конечные элементы с
нелинейной аппроксимацией**

К.т.н., доцент каф. ВМиМ
Каменских Анна Александровна
239-15-64

Л-координаты



$$A = \frac{bh}{2}$$

$$A_1 = \frac{bs}{2}$$

$$\frac{A_1}{A} = \frac{bs}{2bh} = \frac{s}{h} = L_1$$



$$A_1 + A_2 + A_3 = A$$

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1$$

При деформации элемента L-координаты не изменяются! По сути L-координаты удовлетворяют всем требованиям, предъявляемым к функциям формы, то есть их можно использовать в качестве функций формы элемента.

$$N_i = L_1, N_j = L_2, N_k = L_3 \Rightarrow L_1 = \begin{cases} 1, & \text{в узле с номером } i \\ 0, & \text{в других узлах} \end{cases}$$

СЛАУ

$$\begin{cases} x = L_1 x_i + L_2 x_j + L_3 x_k \\ y = L_1 y_i + L_2 y_j + L_3 y_k \\ 1 = L_1 + L_2 + L_3 \end{cases}$$



$$L_1 = \frac{1}{2A^e} (a_i + b_i x + c_i y)$$

$$\begin{cases} a_i = x_j y_m - x_m y_j, & \rightarrow \\ b_i = y_j - y_m, & i, j, m. \\ c_i = x_m - x_j, & \leftarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int_{A^e} L_1^a L_2^b L_3^c dA^e = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} 2A^e \\ \int_{\Gamma^e} L_1^a L_2^b d\Gamma^e = \frac{a!b!}{(a+b+1)!} \gamma^e \end{cases}$$

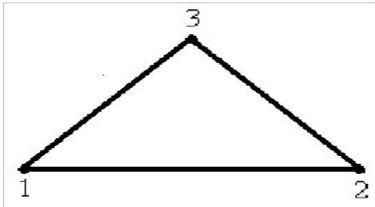


$$\begin{aligned} \{F_g^e\} &= t \int_{A^e} [N^e]^T \{g\} dA^e \\ \int_{A^e} N_i dA^e &= \int_{A^e} L_1 dA^e = \int_{A^e} L_1^1 L_2^0 L_3^0 dA^e = \\ &= \frac{1! \cdot 0! \cdot 0!}{(1+0+0+2)!} \cdot 2A^e = \frac{2}{6} A^e = \frac{1}{3} A^e \end{aligned}$$

* Martin A. Eisenberg, Lawrence E. Malvern On finite element integration in natural co-ordinate // International Journal for Numerical Methods in Engineering Volume 7, Issue 4, 1973.

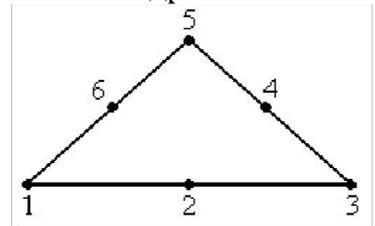
Треугольные конечные элементы с нелинейной лагранжевой аппроксимацией

n=1 – линейный КЭ



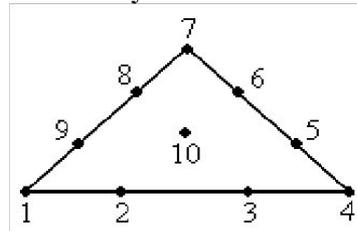
$$\begin{cases} U(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y, \\ V(x, y) = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y. \end{cases}$$

n=2 – квадратичный КЭ



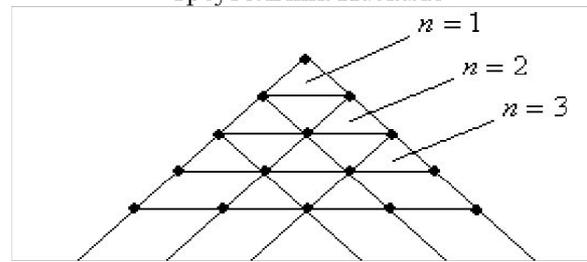
$$\begin{cases} U(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2, \\ V(x, y) = \alpha_7 + \alpha_8 x + \alpha_9 y + \alpha_{10} x^2 + \alpha_{11} xy + \alpha_{12} y^2. \end{cases}$$

n=3 – кубический КЭ



$$\begin{cases} U(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3, \\ V(x, y) = \alpha_{11} + \alpha_{12} x + \alpha_{13} y + \alpha_{14} x^2 + \alpha_{15} xy + \alpha_{16} y^2 + \alpha_{17} x^3 + \alpha_{18} x^2 y + \alpha_{19} xy^2 + \alpha_{20} y^3. \end{cases}$$

Треугольник Паскаля



Порядок аппроксимации на единицу меньше числа узлов на стороне треугольника.

Неявный способ построения функций форм треугольных элементов

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & 0 \\ 0 & 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 \end{bmatrix} \{\alpha\} = [P(x, y)] \{\alpha\}$$

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_6 \\ v_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & 0 \\ 0 & 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 & 0 \\ 0 & 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_6 & y_6 & x_6^2 & x_6 y_6 & y_6^2 & 0 \\ 0 & 1 & x_6 & y_6 & x_6^2 & x_6 y_6 & y_6^2 \end{bmatrix} \{\alpha\} = [C] \{\alpha\}$$

12x12 12x1

$$\{\alpha\} = [C^{-1}] \{\delta^e\} \quad \Rightarrow \quad \{f\} = [P(x, y)] [C^{-1}] \{\delta^e\} \quad \Rightarrow \quad [N^e(x, y)] = [P(x, y)] [C^{-1}]$$

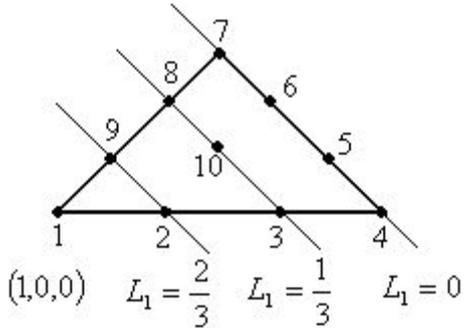
Явный способ построения функций форм треугольных элементов

$$N_i = \prod_{\beta=1}^n \frac{F_{\beta}}{F_{\beta}|_{L_1, L_2, L_3}}$$

где n – порядок аппроксимации; F_{β} – функции L -координат L_1, L_2, L_3 , определяется из уравнений n линий, которые проходят через все узлы за исключением i -го узла, для которого определяется функция формы.

$$L_1 = \text{const} \Rightarrow F_1 = L_1 - C$$

Функции формы для кубического элемента

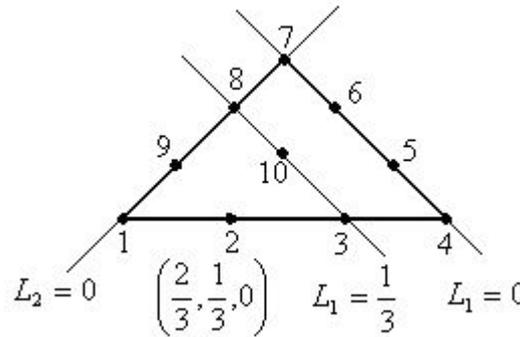


$$F_1 = L_1 - 0 \quad F_1|_{1,0,0} = 1$$

$$F_2 = L_1 - \frac{1}{3} \quad F_2|_{1,0,0} = \frac{2}{3}$$

$$F_3 = L_1 - \frac{2}{3} \quad F_3|_{1,0,0} = \frac{1}{3}$$

$$N_1 = \frac{L_1 - 0}{1} \cdot \frac{L_1 - \frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} \cdot \frac{L_1 - \frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{L_1}{2} (3L_1 - 1)(3L_1 - 2)$$

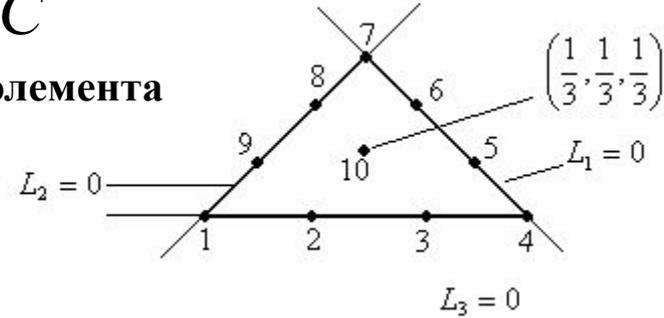


$$F_1 = L_1 - 0 \quad F_1|_{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0} = \frac{2}{3}$$

$$F_2 = L_1 - \frac{1}{3} \quad F_2|_{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0} = \frac{1}{3}$$

$$F_3 = L_2 - 0 \quad F_3|_{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0} = \frac{1}{3}$$

$$N_2 = \frac{L_1 - 0}{\frac{2}{3}} \cdot \frac{L_1 - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} \cdot \frac{L_2 - 0}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{2} L_1 L_2 (3L_1 - 1)$$



$$F_1 = L_1 - 0 \quad F_1|_{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

$$F_2 = L_2 - 0 \quad F_2|_{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

$$F_3 = L_3 - 0 \quad F_3|_{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

$$N_{10} = \frac{L_1}{\frac{1}{3}} \cdot \frac{L_2}{\frac{1}{3}} \cdot \frac{L_3}{\frac{1}{3}} = 27 L_1 L_2 L_3$$

$$N_1 = \frac{L_1}{2} (3L_1 - 1)(3L_1 - 2)$$

$$N_2 = \frac{9}{2} L_1 L_2 (3L_1 - 1)$$

$$N_3 = \frac{9}{2} L_1 L_2 (3L_2 - 1)$$

$$N_4 = \frac{L_2}{2} (3L_2 - 1)(3L_2 - 2)$$

$$N_5 = \frac{9}{2} L_2 L_3 (3L_2 - 1)$$

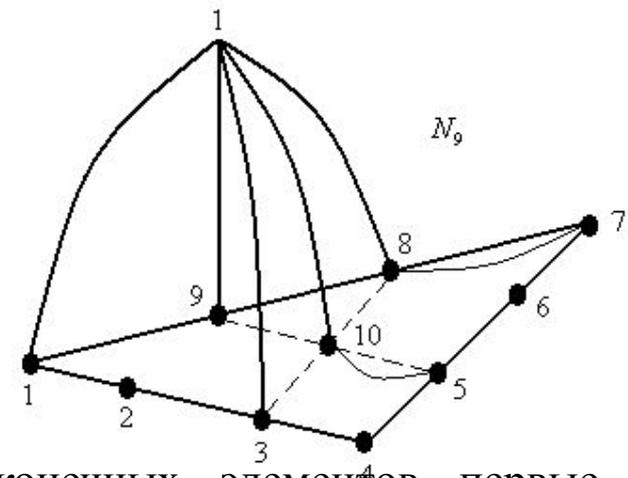
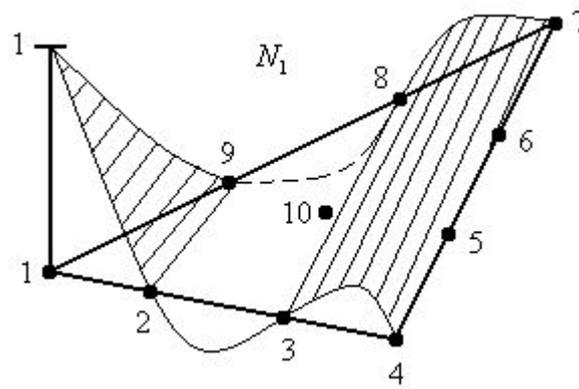
$$N_6 = \frac{9}{2} L_2 L_3 (3L_3 - 1)$$

$$N_7 = \frac{L_3}{2} (3L_3 - 1)(3L_3 - 2)$$

$$N_8 = \frac{9}{2} L_3 L_1 (3L_3 - 1)$$

$$N_9 = \frac{9}{2} L_3 L_1 (3L_1 - 1)$$

$$N_{10} = 27L_1 L_2 L_3$$

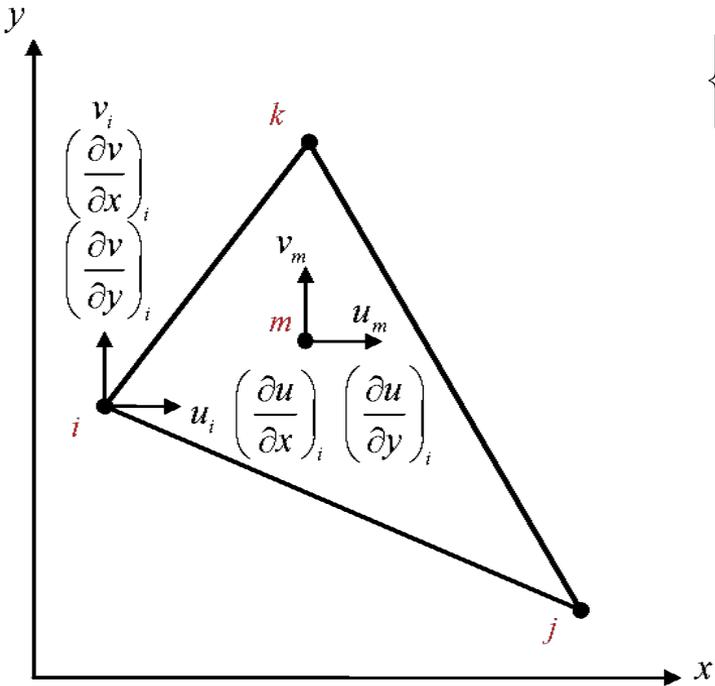


Таким образом, у таких конечных элементов первые производные от функции формы не постоянны, следует, напряжения и деформации изменяются в пределах конечного элемента, но несогласованны между конечными элементами (поля упорядоченных деформаций и напряжений будет с разрывами по границам элемента).

- «+» 1. Требуется меньшее число нелинейных треугольников для получения той же точности, что и в симплекс-элементе.
- 2. Возможно построение элементов с криволинейными границами.
- 3. Для вычисление матрицы жесткости и векторов узловых сил удобно применять численное интегрирование.

- «-» 1. Так как больше узлов, значит больше координат.
- 2. Более громоздки процедуры.

Треугольный конечный элемент с эрмитовой аппроксимацией перемещений



$$\begin{cases} U(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3, \\ V(x, y) = \alpha_{11} + \alpha_{12} x + \alpha_{13} y + \alpha_{14} x^2 + \alpha_{15} xy + \alpha_{16} y^2 + \alpha_{17} x^3 + \alpha_{18} x^2 y + \alpha_{19} xy^2 + \alpha_{20} y^3. \end{cases}$$

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} U_i \\ \left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)_i \\ \left(\frac{\partial U_i}{\partial y}\right)_i \\ V_i \\ \left(\frac{\partial V_i}{\partial x}\right)_i \\ \left(\frac{\partial V_i}{\partial y}\right)_i \end{Bmatrix} \quad \{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_i\} \\ \{\delta_j\} \\ \{\delta_k\} \\ U_m \\ V_m \end{Bmatrix} \quad \{f\} = \begin{Bmatrix} U(x, y) \\ V(x, y) \end{Bmatrix} = [N^e(x, y)] \cdot \{\delta^e\}$$

$$U(x, y) = N_i^{(0)}(x, y)U_i + N_i^{(x)}(x, y)\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_i + N_i^{(y)}(x, y)\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_i + \dots + N_m(x, y)U_m$$

$$\begin{cases} N_i^{(0)} = L_1(3L_1 - 2L_1^2 - 7L_2L_3), \\ N_i^{(x)} = L_1[c_3L_2(L_1 - L_3) + c_2L_3(L_2 - L_1)], \\ N_i^{(y)} = L_1[b_3L_2(L_3 - L_1) + b_2L_3(L_1 - L_2)], \\ N_m = 27L_1L_2L_3, \end{cases} \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ i, j, k \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial N_i^{(0)}}{\partial x} U_i + \frac{\partial N_i^{(x)}}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_i + \frac{\partial N_i^{(y)}}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_i + \dots + \frac{\partial N_m}{\partial x} U_m$$

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N_i^{(0)}}{\partial y} U_i + \frac{\partial N_i^{(x)}}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_i + \frac{\partial N_i^{(y)}}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_i + \dots + \frac{\partial N_m}{\partial y} U_m$$

Требования

$$N_i^{(0)}(x_j, y_j) = \delta_{ij}, \quad N_i^{(x)}(x_j, y_j) = N_i^{(y)}(x_j, y_j) = 0, \quad N_i^{(0)}(x_j, y_j) = N_i^{(0)}(x_k, y_k) = 0, \quad N_i^{(0)}(x_i, y_i) = 1(3-2) = 1,$$

$$N_m(x_j, y_j) = \delta_{mj},$$

$$\frac{\partial N_i^{(x)}(x_j, y_j)}{\partial x} = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial N_i^{(y)}(x_j, y_j)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial N_i^{(0)}(x_j, y_j)}{\partial x} = \frac{\partial N_m(x_j, y_j)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial N_j^{(x)}(x_j, y_j)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_i^{(y)}(x_j, y_j)}{\partial y} = \delta_{ij},$$

$$\frac{\partial N_i^{(0)}(x_j, y_j)}{\partial y} = \frac{\partial N_m(x_j, y_j)}{\partial y} = 0.$$

Проверка

$$N_i^{(0)}(x_j, y_j) = N_i^{(0)}(x_k, y_k) = 0, \quad N_i^{(0)}(x_i, y_i) = 1(3-2) = 1,$$

$$N_i^{(0)}(x_m, y_m) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{2}{9} - \frac{7}{9} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial N_i^{(0)}}{\partial x} = \frac{b_i}{2A^e} (3L_i - 2L_i^2 - 7L_j L_k) + L_i \left(\frac{3b_i}{2A^e} - \frac{4L_i b_i}{2A^e} - \frac{7L_k b_j}{2A^e} - \frac{7L_j b_k}{2A^e} \right) =$$

$$= \frac{b_i}{2A^e} (3L_i - 2L_i^2 - 7L_j L_k) + \frac{L_i}{2A^e} (3b_i - 4L_i b_i - 7L_k b_j - 7L_j b_k),$$

$$\frac{\partial N_i^{(0)}(x_i, y_i)}{\partial x} = \frac{b_i}{2A^e} (3-2) + \frac{1}{2A^e} (3b_i - 4b_i) = 0,$$

$$\frac{\partial N_i^{(0)}(x_j, y_j)}{\partial x} = 0 + 0 = 0.$$

«+»

1. так как высокий порядок аппроксимации, требуется малое количество элементов для получения решения с той же точностью, что и у симплекс-элемента;
2. из решения получают согласованные в узлах сетки значения σ и ε ;
3. непосредственно из решения получают значения σ на границе.