

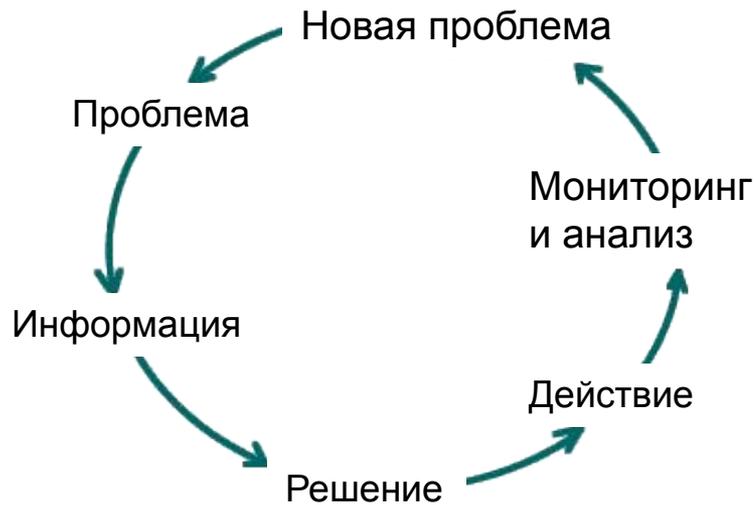


МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Проблемные ситуации и их классификация

Что такое проблема?

Обычно под проблемой понимается явно сформулированный вопрос или целый комплекс вопросов, возникших в ходе познания. Сам процесс познания истолковывается при этом как последовательный переход от ответов на одни вопросы к ответам на другие вопросы, вставшие после решения первых.



Круговорот проблем в природе.

Проблемной является всякая ситуация, практическая или теоретическая, которая не имеет соответствующего обстоятельствам решения и поэтому заставляет остановиться и задуматься.

Проблема в самом общем смысле — это некоторое затруднение, колебание, неопределенность.

Когда возникает проблема выбора?

Проблема выбора возникает в тех ситуациях, когда необходимо выбрать один из нескольких альтернативных (взаимоисключающих) вариантов действий, (необходимо принять решение).



Налево пойдешь коня потеряешь, направо пойдешь женатым быть

Решение – выбор альтернативы.

Очевидно, что подобные ситуации случаются довольно часто в нашей повседневной жизни, однако ввиду их рутинности мы зачастую принимаем решения «на автомате», без систематического продумывания.

Примеры повседневных решений, которые мы принимаем:

- ✓ Идти или не идти на лекцию ?
- ✓ С кем танцевать на дискотеке ?
- ✓ Переходить или не переходить дорогу в неположенном месте ?
- ✓ Что приготовить поесть?

Примеры сезонных решений:

- ✓ Какой телефон купить?
- ✓ Какой фильм посмотреть?
- ✓ За кого отдать свой голос?



Эти и многие другие решения мы принимаем субъективно (самостоятельно или с помощью близких), т.е. другой человек в такой же проблемной ситуации может принять совершенно другое решение.

Это одно из основных препятствий на пути создания автоматизированных алгоритмов принятия решений.

С более сложными проблемами, ввиду важности последствий принимаемых решений, сталкиваются руководители и управленцы различных уровней. От принимаемых ими решений зависит процветание их предприятий (а значит и сотрудников), а от решений правительства зависит будущее всей страны.

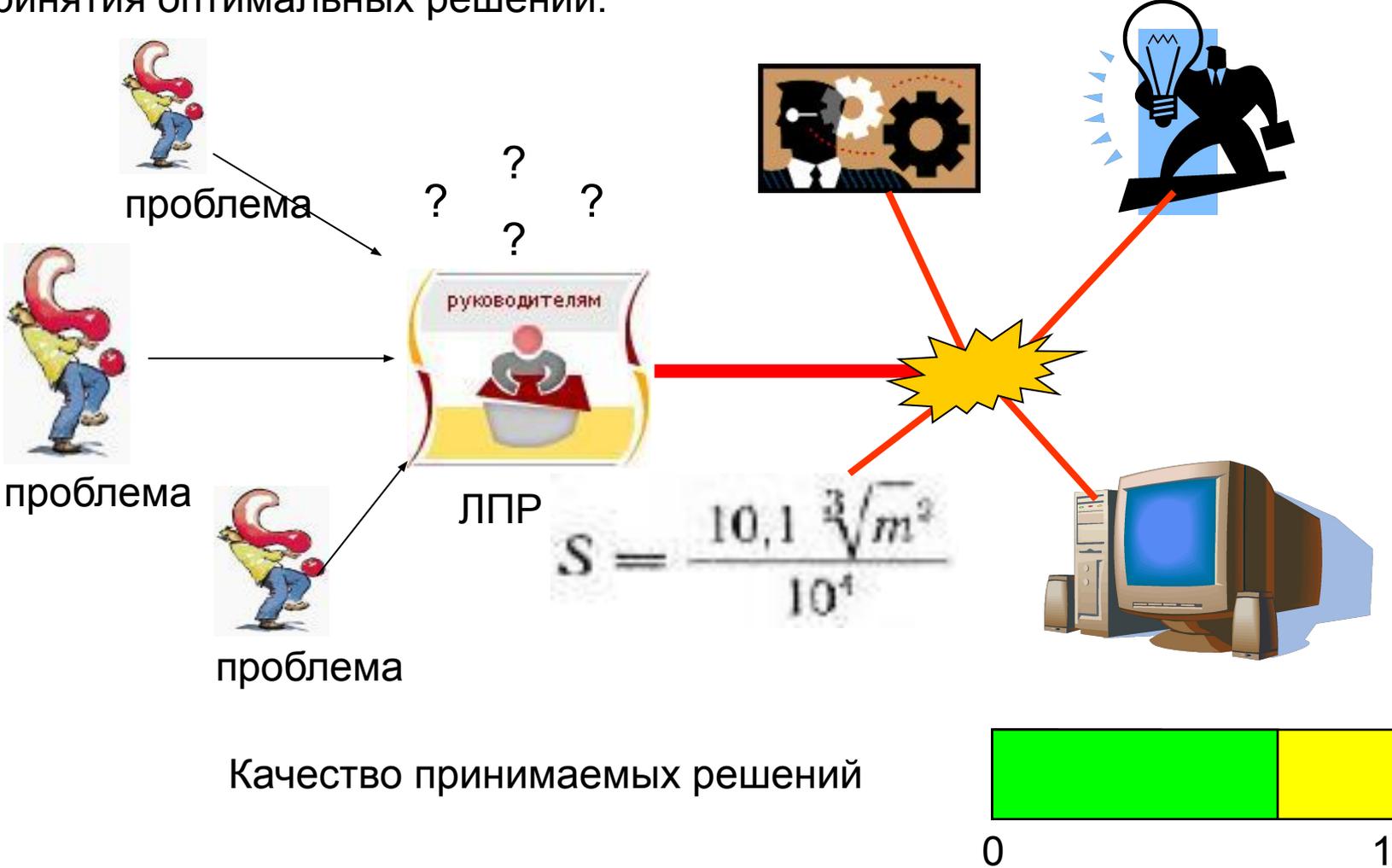


Поэтому полагаться только на субъективные, интуитивные решения в таких ситуациях - это чрезвычайно большой риск. Тем более, если на решение влияют множество противоречивых факторов, а цена ошибки очень высока.

В процессе принятия решения необходимо просчитывать его последствия, а не только сиюминутные выгоды. (Распространенная ошибка).

Лицо принимающее решение (человека выбирающего одну из альтернатив) мы будем в дальнейшем обозначать аббревиатурой **ЛПР**.

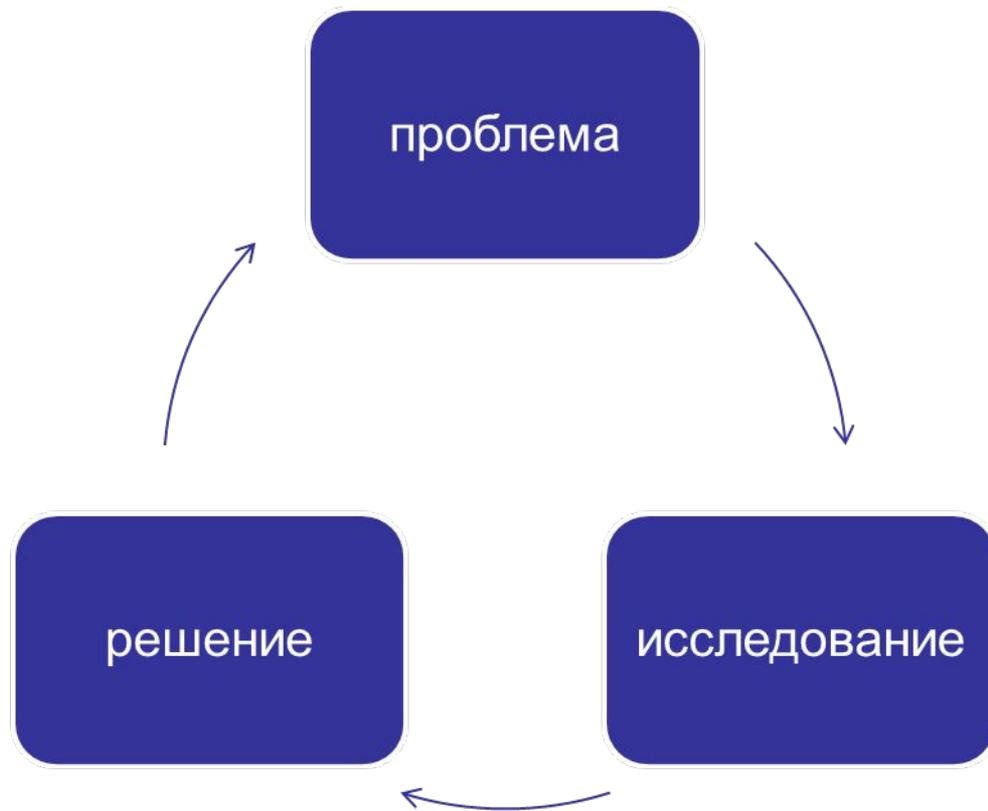
Прогресс в развитии информационных технологий позволяет сегодня ставить задачу рационального объединения логического мышления и интуиции человека со строгими математическими методами и вычислительными возможностями компьютера с целью существенного повышения вероятности принятия оптимальных решений.



дескриптивный

- нормативный

прескриптивный



Ясная и отчетливая формулировка проблемы рассматривается как обязательное условие успеха предпринимаемого исследования.

«Великая проблема
подобна драгоценному
камню: тысячи проходят
мимо, пока наконец
один не поднимет его»

(А. Ницше Ф. Соч.: В 12
т. — СПб., 1912. - Т. 1. -
С. 427).



Проблемная ситуация – это всякая практическая или теоретическая ситуация, которая не имеет соответствующего обстоятельствам решения и поэтому заставляет остановиться и задуматься.

Проблема в самом общем смысле — это некоторое затруднение, колебание, неопределенность. Требуются действия по устранению этой неопределенности, но далеко не всегда ясно, что именно следует предпринять.

Два основных фактора, влияющих на способ постановки проблемной ситуации:

1. характер мышления соответствующей эпохи;
2. уровень знания об объектах соответствующей эпохи.

Классификация проблемных ситуаций возможна по следующим трем признакам:

1. сформулирована ли проблема с самого начала;
2. имеется ли метод ее решения;
3. насколько отчетливы представления о том, что именно считать решением проблемы.

Проблемная ситуация – это всякая практическая или теоретическая ситуация, которая не имеет соответствующего обстоятельству решения и поэтому заставляет остановиться и задуматься.

Два основных фактора, влияющих на способ постановки проблемной ситуации:

1. уровень мышления соответствующей эпохи;
2. уровень знания о предмете соответствующей эпохи.

Классификация проблемных ситуаций возможна по следующим трем признакам:

1. сформулирована ли проблема с самого начала;
2. имеется ли метод ее решения;
3. насколько отчетливы представления о том, что именно считать решением проблемы.

Проблемные ситуации делятся на два типа: явные и неявные в зависимости от того, задана ли формулировка проблемы с самого начала.

		формулировка проблемы	Метод решения	Решение проблемы
1	явные	+	+	+
2		+	+	-
3		+	-	+
4		+	-	-
5	неявные	-	+	+
6		-	+	-
7		-	-	+
8		-	-	-

Примеры проблемных ситуаций

1-й тип: Показательные задачи. Школьные задачи (сформулирована задача, известен способ решения, а ответ есть в конце учебника).

2-й тип: Ситуации, когда неизвестно, каким должно быть решение. О человеке известно, что он живет на шестнадцатом этаже и всегда спускается вниз на лифте; вверх он поднимается только до десятого этажа и дальше идет пешком. Почему он так поступает?

3-й тип: Проблемы-головоломки. Лучшие примеры таких проблем – различные кроссворды, ребусы, задачи на составление фигур из имеющихся элементов и т. д.

4-й тип: Классические проблемы, требующие не только определения общих контуров решения, но и открытия того метода, с помощью которого это решение может быть достигнуто. Каждое крупное научное достижение, каждая новая теория и новая научная дисциплина начинаются с постановки проблем этого типа.

5-й тип: Ситуации, когда есть метод, есть решение, но нет самого затруднения, которое удалось бы с помощью данного метода преодолеть. Пример: изобретения, которые непонятно для чего можно применить.

6-й тип: Невнятные. Иногда встречаются такие неясные проблемные ситуации, когда **имеется только метод и ничего более.** Нет проблемы, к решению которой его можно было бы приложить, и нет того, что следовало бы считать решением этой еще не сформулированной проблемы.

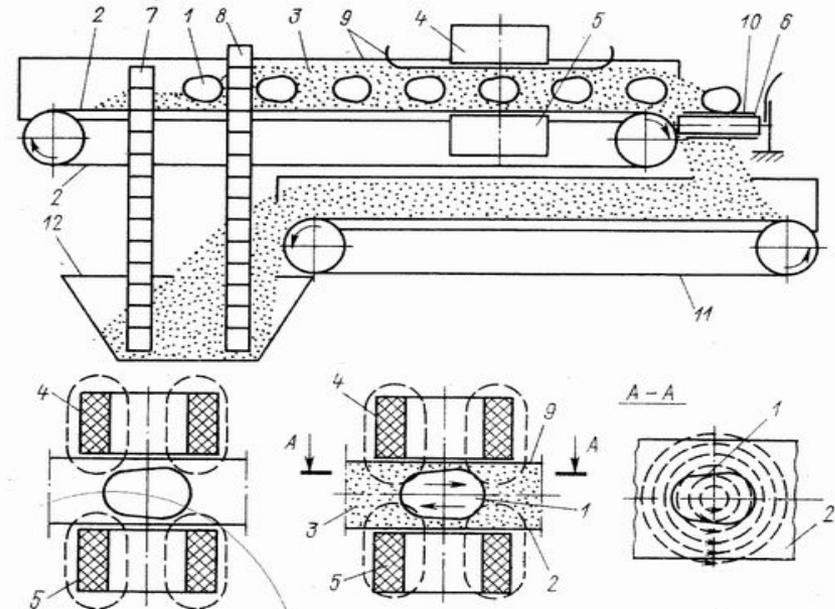


Рис. 13. Устройство для сухой очистки яиц:

1 — яйцо; 2 — транспортер для подачи яиц; 3 — абразивный материал; 4, 5 — статоры, создающие противоположные направления вращающегося магнитного поля; 6 — транспортер чистых яиц; 7 — подъемник для абразивного материала (ковшовый элеватор); 8 — аналогичный подъемник (для верхней обсыпки яиц абразивным материалом); 9 — перегородки из немагнитного материала; 10 — ситообразная лента транспортера; 11 — транспортер для возврата абразивного материала; 12 — бункер

Бывают — и нередко — случаи, когда проблема заключается как раз в том, чтобы отыскать проблему. Всякий раз, например, когда принятая и хорошо апробированная теория вдруг резко расходится с достаточно твердо установленными фактами, можно говорить о возникновении проблемы.



Заканчивая разговор о проблемах, нужно еще раз подчеркнуть опасность поверхностного подхода к ним.

На первый взгляд проблема может показаться банальностью, а неявная проблема — даже нелепостью. Отмахнуться от нее проще всего.

Только долгое и тщательное вдумывание в проблему способно раскрыть ее действительный смысл и подлинную глубину.

Попытка решить непродуманную и не раскрытую до конца проблему всегда может оказаться безуспешной.

Решения и их классификация

Решение – это выбор альтернатив.

Организационное решение – выбор руководителя в рамках своих обязанностей. Его **цель** – движение к решению поставленной перед организацией задачи.

Организационные решения делятся на:

- **запрограммированные** (выборы, проблемы);
- **незапрограммированные**;
- **компромиссные** (компромисс с налогами, персоналом или совестью);
- **интуитивные**;
- **основанные на суждениях**;
- **рациональные** (основываются на объективном аналитическом процессе).

Запрограммированное решение - результат реализации определенной последовательности шагов или действий, подобных тем, что предпринимаются при решении математического уравнения.

Как правило, число возможных альтернатив ограничено и выбор должен быть сделан в пределах направлений, заданных организацией.

К примеру, в больнице при составлении графика работы медсестер и санитаров можно исходить из формулы, требующей определенного соотношения между числом пациентов и обслуживающего персонала. Если правилами больницы предусмотрена одна медсестра на десять пациентов, то решение принимается **автоматически** — на этаже с 50 пациентами нужно иметь 5 сестер.

Программирование можно считать важным вспомогательным средством в принятии эффективных организационных решений.

- + Определяя, каким должно быть решение, снижается вероятность ошибки.
- + Экономится время, поскольку не приходится разрабатывать новую процедуру всякий раз, когда возникает соответствующая ситуация.

- Низкая творческая активность и личная инициатива ЛПР

Незапрограммированные решения.

Решения этого типа требуются в ситуациях, которые в определенной мере новы, внутренне не структурированы или сопряжены с неизвестными факторами.

Поскольку заранее невозможно составить конкретную последовательность необходимых шагов, необходимо разработать процедуру принятия решения.

К числу незапрограммированных можно отнести решения следующего типа:

- ✓ какими должны быть цели организации,
- ✓ как улучшить продукцию,
- ✓ как усовершенствовать структуру управленческого подразделения,
- ✓ как усилить мотивацию подчиненных.

На практике немногие управленческие решения оказываются запрограммированными или незапрограммированными в чистом виде.

Рассмотренные виды решений задают границы некоего спектра, а почти все решения оказываются где-то между крайними вариантами.

Компромиссы

Любое управленческое решение порождает как положительные, так и отрицательные последствия для разных частей организации.



Компромисс заключается в балансировании между положительными и отрицательными последствиями решений.

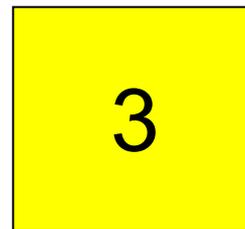
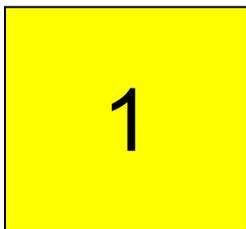
Эффективно работающий руководитель понимает и принимает как факт то, что выбранная им альтернатива может иметь недостатки, возможно, значительные.

Интуитивные решения

Чисто интуитивное решение — это выбор, сделанный только на основе *ощущения* того, что он правилен.

То, что мы называем озарением или шестым чувством, и есть интуитивные решения.

Пример: За каким квадратом скрыта звезда?



В интуитивных решениях нет очевидной логики.

Решения, основанные на суждениях

Решение, основанное на суждении, — это выбор, обусловленный знаниями или накопленным опытом.

Человек использует знание о том, что случилось в сходных ситуациях ранее, чтобы спрогнозировать результат альтернативных вариантов выбора в существующей ситуации.

Пример: Врач ставит диагноз, основываясь на своем опыте.

Поскольку решение на основе суждения принимается в голове управляющего, оно обладает таким значительным достоинством, как быстрота и дешевизна его принятия.

Суждение невозможно соотнести с ситуацией, которая в самом деле нова, поскольку у руководителя отсутствует опыт, на котором он мог бы основать логический выбор.

В сложной ситуации суждение может оказаться плохим, поскольку факторов, которые необходимо учесть, слишком много для «невооруженного» человеческого разума.

Суждение опирается на здравый смысл, но истинный здравый смысл встречается очень редко.

Поскольку суждение всегда опирается на опыт, чрезмерная ориентация на последний смещает решения в направлениях, знакомых человеку по его прежним действиям. Из-за такого смещения можно упустить новую альтернативу, которая должна была бы стать более эффективной, чем знакомые варианты выбора.

Рациональные решения

Главное различие между решениями рациональным и основанным на суждении заключается в том, что первое не зависит от прошлого опыта. Рациональное решение обосновывается с помощью объективного аналитического процесса.

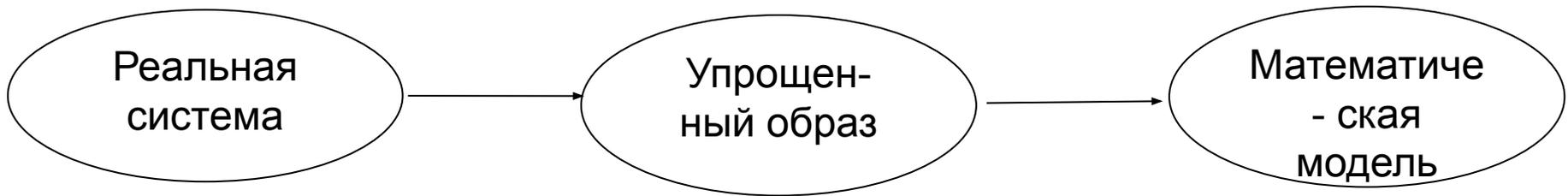
Рациональное решение проблем.

Решение проблем, как и управление, — процесс, ибо речь идет о нескончаемой последовательности взаимосвязанных шагов.

Принимающий решение заботится не столько о решении как таковом, сколько обо всем, связанным и проистекающим из него. Для решения проблемы требуется не единичное решение, а совокупность выборов.

Этапы принятия рационального решения

1. Диагноз проблемы, определение цели, представление о результате.
2. Формирование ограничений и критериев для принятия решения (формирование исходных данных и критериев оценки результата).
3. Выявление альтернатив.
Выявление **управляемых** (зарплаты, цены) и **неуправляемых** (налоги, разные метры) переменных.
4. Выбор математической модели и метода решения проблем.

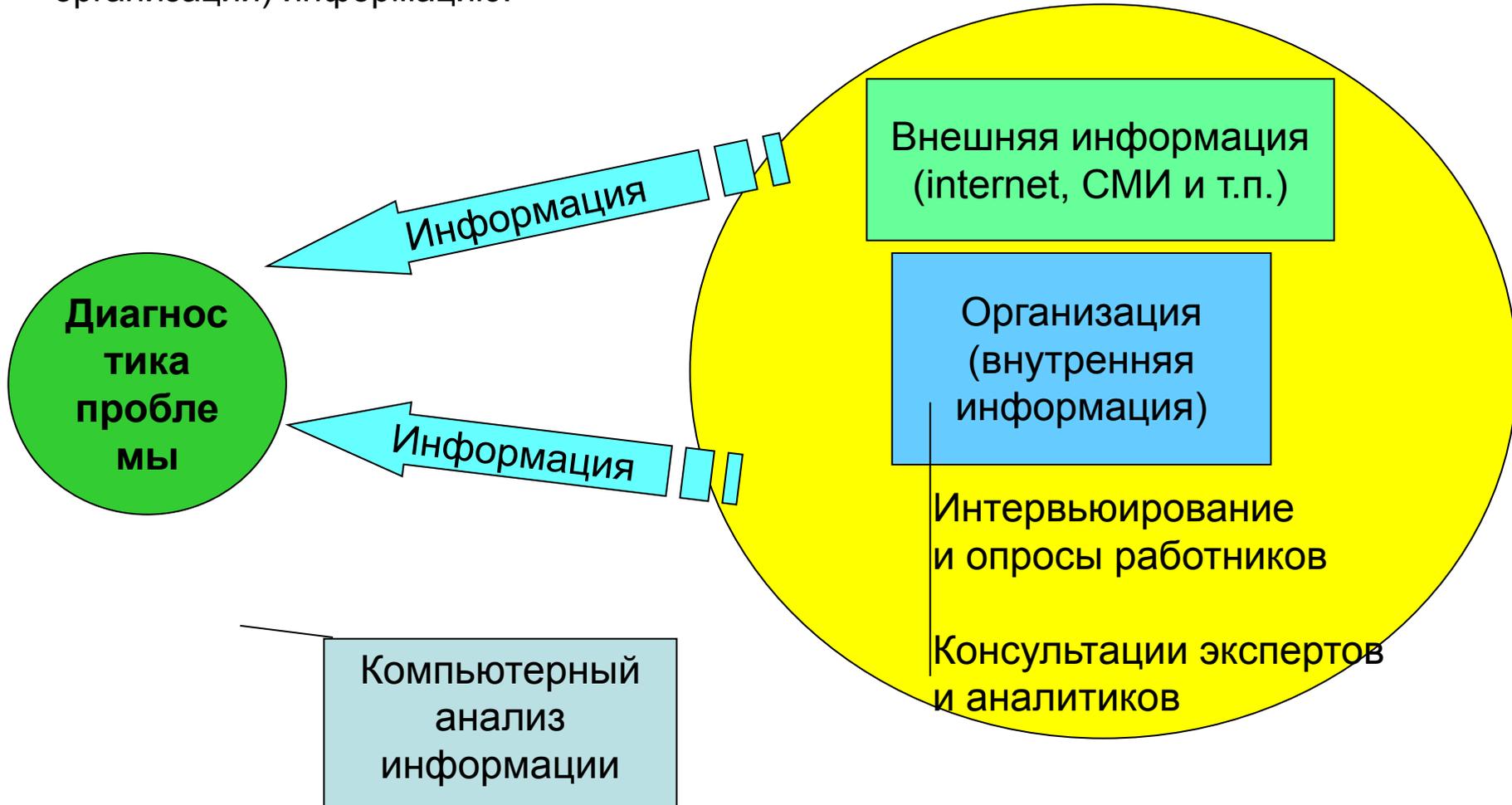


5. Оценка альтернатив (численное решение).
6. Реализация принятого решения.
7. Обратная связь или анализ результатов.

1. Диагностика проблемы

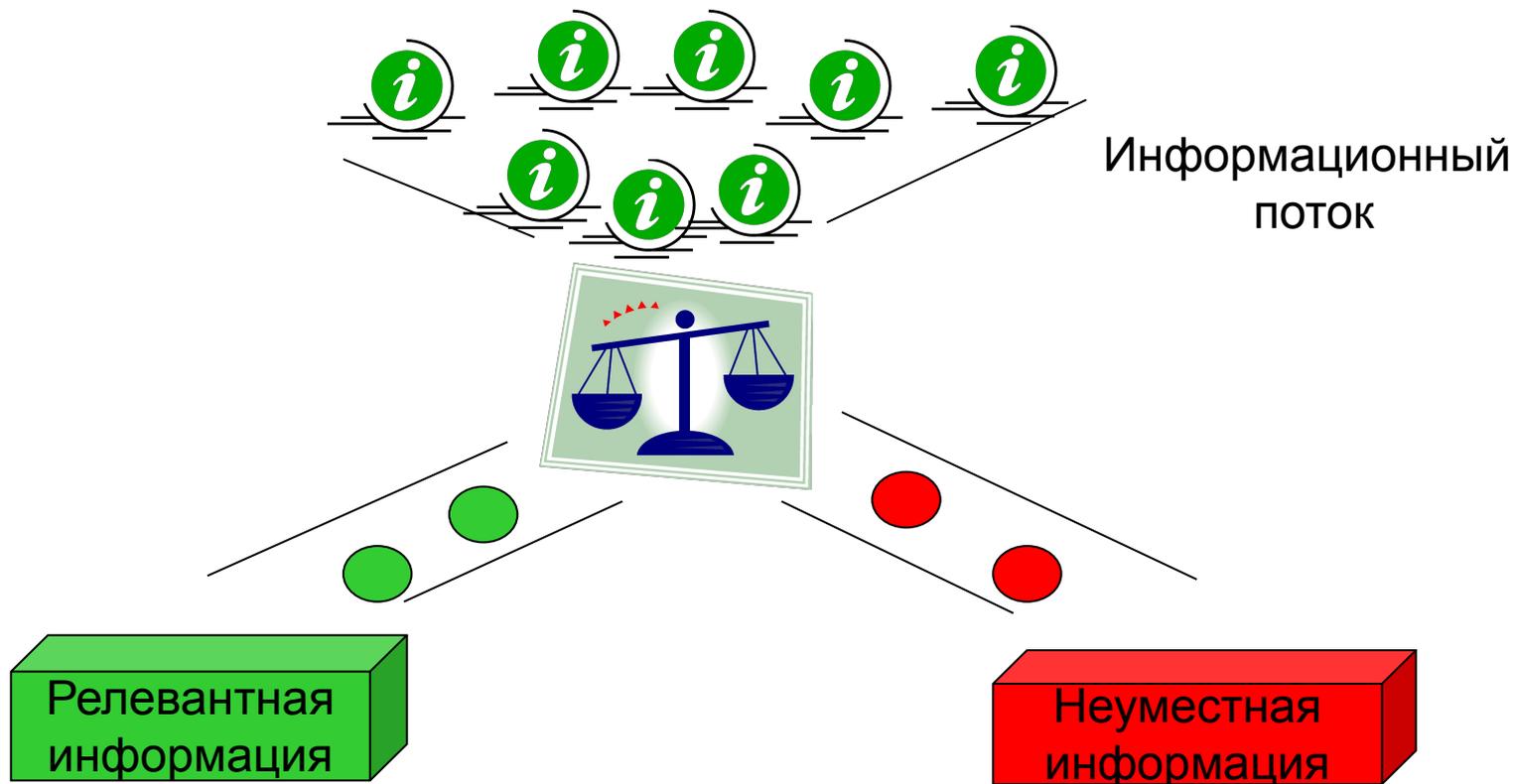
Первая фаза в диагностировании сложной проблемы — осознание и установление симптомов затруднений или имеющихся возможностей.

Для выявления причин возникновения проблемы необходимо собрать и проанализировать требующуюся внутреннюю и внешнюю (относительно организации) информацию.



При этом надо помнить, что увеличение количества информации не обязательно повышает качество решения.

Поэтому в ходе наблюдений важно видеть различия между релевантной и неуместной информацией и уметь отделять одну от другой.

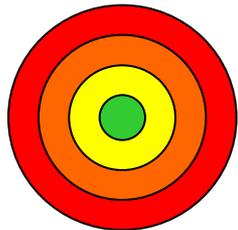


Релевантная - относящаяся к делу (конкретной проблеме, цели, периоду времени)

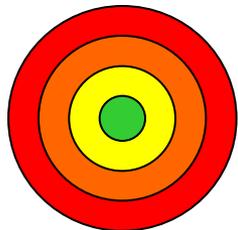
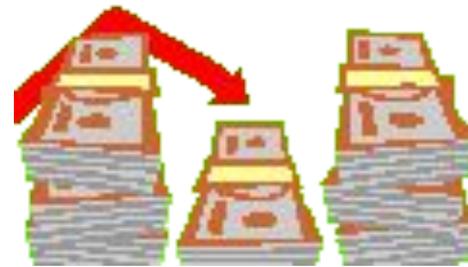
Итак, информация собрана, и проблема уяснена, теперь надо сформулировать **цель**.

Под **целью** мы будем понимать тот конечный результат, который необходимо получить путем выбора и реализации тех или иных управляющих воздействий на исследуемую систему.

Примеры целей:



Максимизация прибыли



Минимизация расходов



2. Формулировка ограничений и критериев принятия решения

Примеры ограничений:

- неадекватность средств;
- недостаточное число работников, имеющих требуемую квалификацию и опыт;
- неспособность закупить ресурсы по приемлемым ценам;
- потребность в технологии, еще не разработанной или чересчур дорогой;
- исключительно острая конкуренция;
- законы и этические соображения.

К другому классу ограничений относятся реальные количественные характеристики, которые будут использованы при анализе возможных альтернатив.

К ним могут относиться, например:

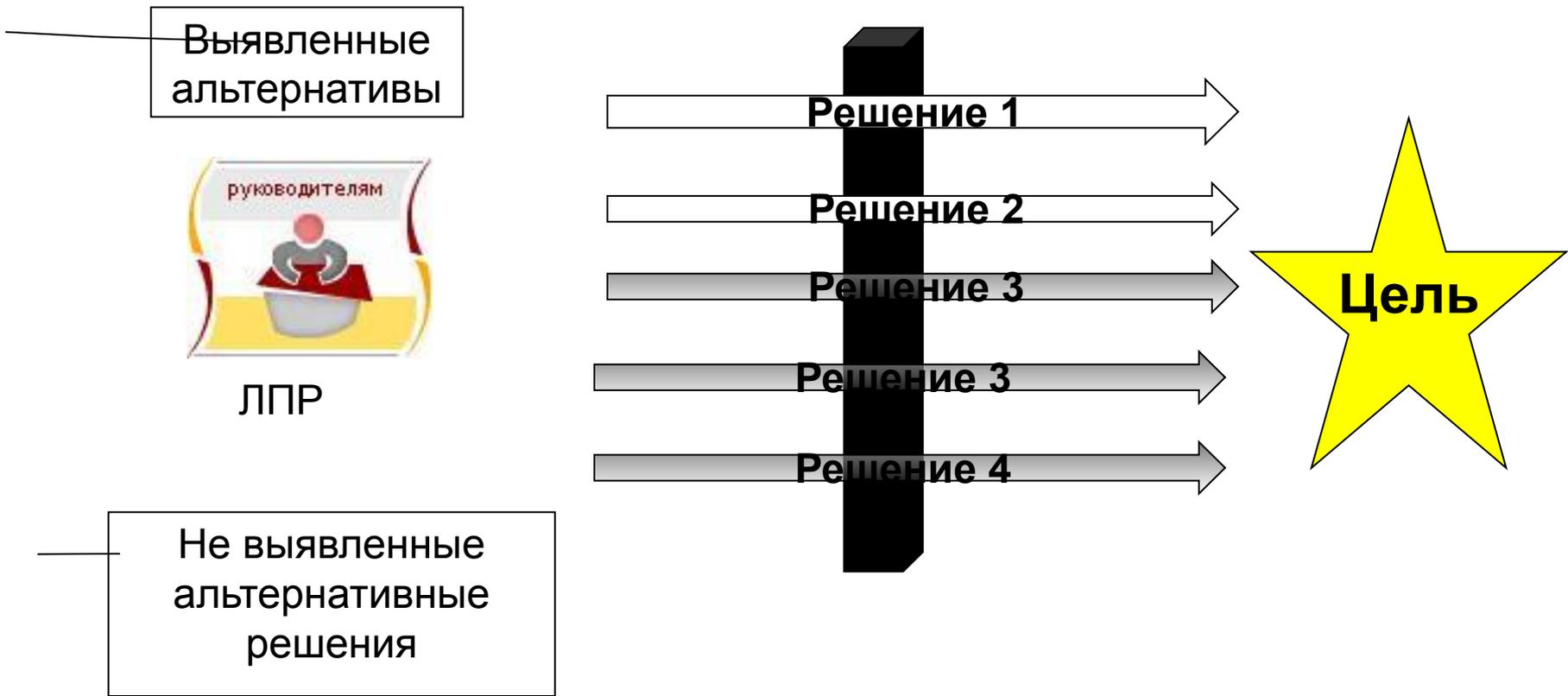
- количество продукции на складе,
- потребности организации в том или ином ресурсе,
- количество специалистов определенного профиля и т. п.

Все эти ограничения составляют набор **исходных данных**, необходимых для дальнейшего анализа.

Кроме этого необходимо выявить **критерии**, по которым можно будет оценивать качество выбранного решения, степень его оптимальности, а также определять его достоинства и недостатки и возможные общие последствия.

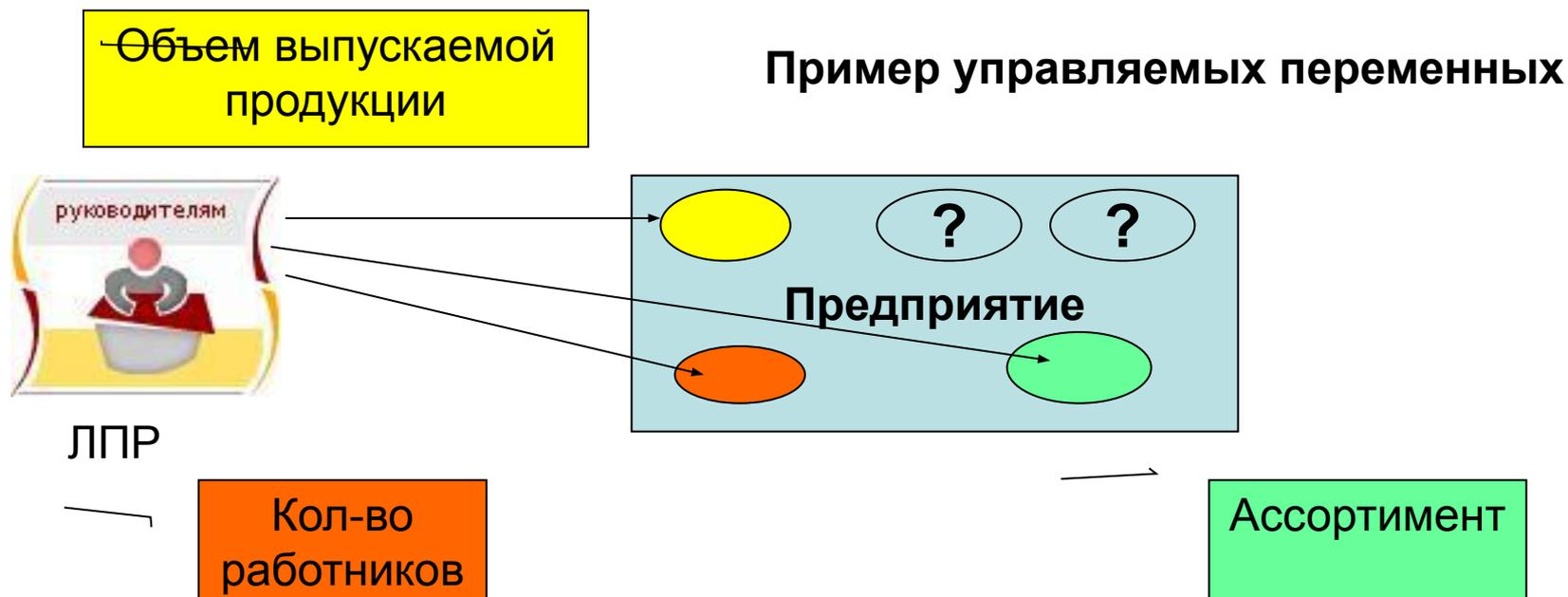
3. Определение альтернатив

В идеале желательно выявить все возможные действия, которые могли бы устранить причины проблемы, и выбрать из них наилучшее, но на практике мы редко располагаем достаточными знаниями или временем, чтобы сформулировать и оценить каждую альтернативу.

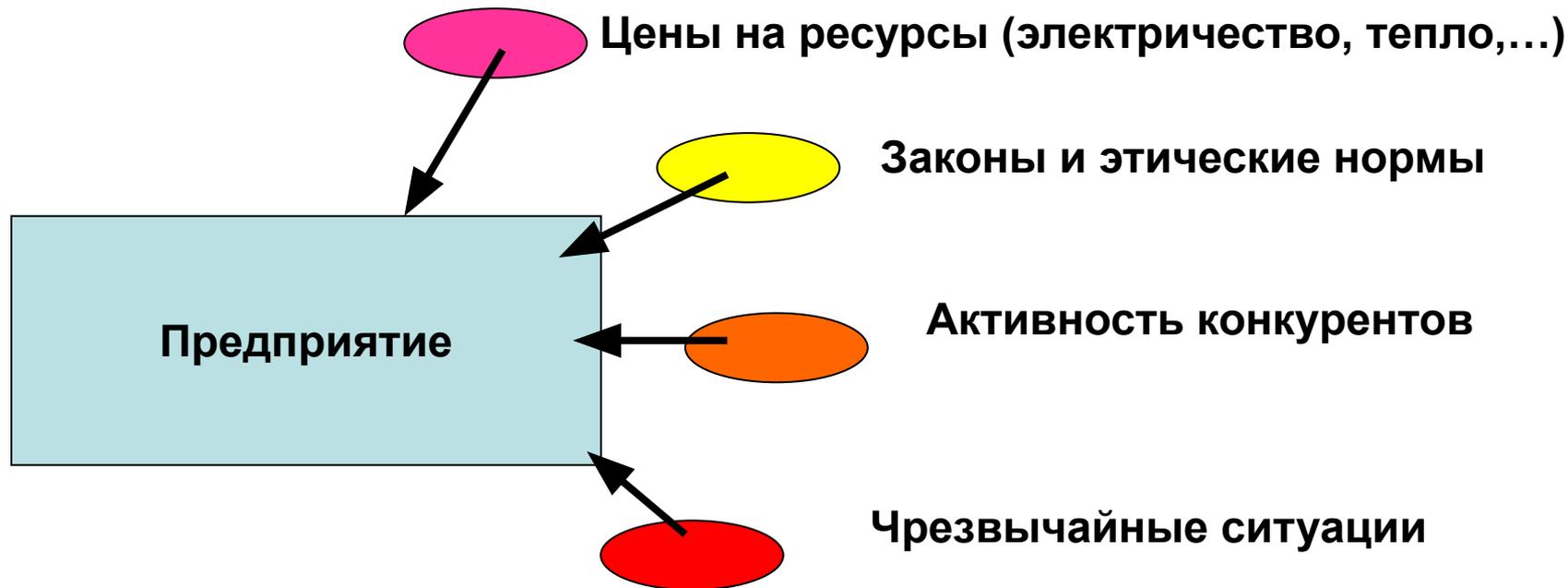


Тем не менее, при предварительном изучении объекта управления должны быть выявлены те характеристики этого объекта, значения которых можно варьировать (изменять) - так называемые **управляемые переменные**.

В большом числе случаев априорной информации явно недостаточно, и тогда приходится привлекать специалистов различных профессий, которые в той или иной степени принимают участие в исследовании практически на всех этапах системного анализа.



Важным и «тонким» моментом при принятии управляющих решений является идентификация **неуправляемых переменных**, т. е. переменных, изменение значений которых не зависит от принимаемого решения.



Ясно, что игнорирование в реальных ситуациях наличия неуправляемых переменных может привести к построению неадекватных моделей и, следовательно, к принятию ошибочных решений.

4. Выбор математической модели и метода решения проблемы

Для построения математической модели необходимо иметь строгое представление о **цели** функционирования исследуемой системы и располагать информацией об **ограничениях**, которые определяют **область допустимых значений** управляемых переменных.

Как цель, так и ограничения должны быть представлены в виде функций от управляемых переменных.

Пример: Целевые функции и ограничения в задачах линейного программирования из курса МО.

Анализ модели должен привести к определению наилучшего управляющего воздействия на объект управления при выполнении всех установленных ограничений.

Модель, будучи упрощением образа системы-оригинала, представляет собой наиболее существенные для описания системы соотношения в виде целевой функции и совокупности ограничений.

Правил, определяющих переход от реальной системы к модели, **не существует.**

Степень адекватности построенной модели реальной системе зависит прежде всего от творческих способностей и интуиции членов исследовательской группы.

Итак, при построении модели должны быть установлены количественные соотношения для **целевой функции** (функции, являющейся количественным описанием поставленной цели) и ограничений в виде функций от управляемых переменных.

5. Оценка альтернатив

При использовании математической модели решение получают с помощью апробированных **оптимизационных методов**, при этом говорят, что модель приводит к **оптимальному** решению задачи.

В случае применения **имитационных** или **эвристических** моделей понятие оптимальности становится менее определенным, и получаемое решение соответствует лишь приближенным оценкам критериев оптимальности функционирования системы.

6. Реализация

Если проблема была правильно определена, альтернативные решения тщательно взвешены и оценены, а модель была адекватна, выбранное решение должно быть практически реализовано.

Однако если проблема сложна и приходится принимать во внимание множество компромиссов, или если информация и анализ субъективны, может случиться, что ни одна альтернатива не будет наилучшим выбором. В этом случае главная роль принадлежит хорошему суждению и опыту.

7. Анализ результата

Еще одной фазой, входящей в процесс принятия управленческого решения и начинающейся после того, как решение начало действовать, является установление обратной связи.

На этой фазе происходит измерение и оценка последствий решения или сопоставление фактических результатов с теми, которые руководитель надеялся получить.

Обратная связь — т. е. поступление данных о том, что происходило до и после реализации решения — позволяет скорректировать его, пока еще не нанесено значительного ущерба.

Роль информационных технологий в принятии решений

Толчком для применения ЭВМ в процессе ПР послужило то обстоятельство, что после детального анализа различных аспектов возможных альтернатив требуется решить задачу своеобразного синтеза, т. е. свести все плюсы и минусы каждой альтернативы в обобщенную оценку ее предпочтительности, для чего, как правило, необходимо проделать сравнительно большой объем вычислений.

Первоначально использование ЭВМ ограничивалось именно проведением этих расчетов. Сразу отметим, что рассчитывать на широкое применение вычислительной техники для ПР при этом не приходилось, так как потенциальный пользователь ЭВМ должен был иметь весьма широкие познания в области методов ПР и в программировании, не говоря уже о доскональном знании задачи ПР, подлежащей решению.

Указанное обстоятельство привело к возникновению новой категории специалистов — так называемых консультантов по ПР (аналитиков), которые, владея методами ПР и навыками программирования, стали выполнять роль посредника между лицом, принимающим решение (ЛПР), и ЭВМ.

Дальнейший прогресс в применении вычислительной техники для ПР был связан со стремлением консультантов получить исчерпывающую информацию для обоснования предложенного решения. С этой целью были созданы первые диалоговые системы, позволяющие менять (уточнять) некоторые параметры заложенной в память ЭВМ модели задачи ПР, выбирать (изменять) алгоритм отыскания решения или его параметры, исследовать чувствительность полученного решения.

Условно процесс принятия решения можно разбить на четыре большие фазы:

- 1) постановка задачи,
- 2) генерация альтернатив,
- 3) оценка и выбор альтернатив,
- 4) управление реализацией выбранного решения

В настоящее время разработаны программные средства, обеспечивающие поддержку процесса ПР на двух-трех из указанных фаз. Актуальной является задача построения систем, обеспечивающих поддержку на всех фазах процесса выработки и реализации решения. Постановка такой задачи стала возможной благодаря прогрессу в развитии современной вычислительной техники.

Задачи принятия решений

Формальная модель задачи принятия решений

Принятие решений — особый вид целенаправленной деятельности, заключающийся в выборе одной из имеющихся альтернатив.

Важнейшими элементами процесса ПР являются:

- проблема, подлежащая разрешению;
- принимающий решение (решающий) элемент — человек или коллективный орган, который (при помощи технических средств) решает задачу;
- одна или несколько целей, в соответствии с которыми осуществляется выбор;
- несколько (множество) альтернатив, среди которых производится выбор.

В свою очередь, задачу ПР можно представить семеркой:

$[t, X, R, A, F, G, D]$, где

T — постановка задачи (например, выбрать одну наилучшую в некотором смысле альтернативу или упорядочить все множество альтернатив);

X — множество допустимых альтернатив (решений, вариантов действий);

R — множество критериев оценки степени достижения поставленных целей;

A — множество шкал измерения по критериям (шкалы наименований, порядковые, интервальные, отношений);

F — отображение множества допустимых альтернатив в множество критериальных оценок их последствий (исходов);

G — система предпочтений решающего элемента;

D — решающее правило, отражающее систему предпочтений.

Содержательное определение элементов модели задачи ПР, которые наиболее часто будут использоваться в дальнейшем изложении

Определение 1. Множество X представляет собой совокупность решений, которые удовлетворяют определенным ограничениям и рассматриваются как возможные способы достижения поставленной цели.

Определение 2. Критерием $R_j \in R$ будем называть такой показатель, который признается ЛПР важным в отношении поставленной цели, является общим для всех допустимых решений и не может быть представлен в виде ограничений.

Определение 3. Шкалой A_j критерия R_j , будем называть множество оценок с отношением совершенного порядка на нем.

Определение 4. Результат отображения $F: X \rightarrow R$ представляет собой множество возможных критериальных оценок.

Классификация задач выбора

По существу любой элемент семерки $\langle t, X, R, A, F, G, D \rangle$ может служить признаком классификации задач ПР, однако наиболее часто классификацию проводят в соответствии со следующими признаками:

1) вид отображения F : детерминированное, вероятностное или неопределенное, что позволяет выделить соответственно:

- задачи ПР в условиях определенности;
- задачи ПР в условиях риска;
- задачи ПР в условиях неопределенности;

2) мощность множества R — одноэлементное множество или состоящее из нескольких критериев, следовательно:

- задачи ПР со скалярным критерием;
- задачи ПР с векторным критерием (задачи многокритериального ПР);

3) тип системы G — отражает предпочтения одного лица или коллектива, поэтому:

- задачи индивидуального ПР;
- задачи группового ПР.

Проблема выбора и нетривиальные задачи принятия решений

Задача ПР перестает быть тривиальной даже при одном критерии, если каждой альтернативе соответствует не точечная оценка, как прежде, а интервал возможных оценок или распределение на значениях указанного критерия.

Наличие нескольких критериев ПР также делает задачу ПР нетривиальной, независимо от вида отображения множества альтернатив в множество критериальных оценок их последствий.

Таким образом, нетривиальная задача ПР имеет место тогда, когда существует проблема выбора и ему свойственна многокритериальность оценки альтернатив или (и) выбор проводится в условиях риска или неопределенности.

Методы принятия решений

Из множества известных методов и подходов к ПР наибольший интерес представляют те, которые дают возможность учитывать многокритериальность и неопределенность, а также позволяют осуществлять выбор решений из множеств альтернатив различного типа при наличии критериев, имеющих разные типы шкал измерения.

**РАЗНОВИДНОСТИ
ЗАДАЧ ПРИНЯТИЯ
РЕШЕНИЙ И ПОДХОДОВ
К ИХ РЕШЕНИЮ**

Пример выбора решения при определенности: линейное программирование

Линейное программирование — раздел математического программирования, применяемый при разработке методов отыскания экстремума линейных функций нескольких переменных при линейных дополнительных ограничениях, налагаемых на переменные.

По типу решаемых задач его методы разделяются на:

- универсальные (для решения любых задач *линейного программирования* (ЗЛП));
- специальные (учитывают особенности модели задачи, её целевой функции и системы ограничений).

Особенностью задач линейного программирования является то, что экстремума целевая функция достигает на границе области допустимых решений.

Классические же методы дифференциального исчисления связаны с нахождением экстремумов функции во внутренней точке области допустимых значений. Отсюда — необходимость разработки новых методов.

***Задачи линейного
программирования
(ЗЛП)***

Для задач линейного программирования характерно наличие следующих 3-х компонентов:

- **целевая функция (1);**
- **система ограничений (2);**
- **ограничения на знак переменных (3).**

ЗЛП – это задача следующего вида: (1)

$$z = \sum_{j=1}^n x_j \cdot c_j \rightarrow \max(\min)$$
$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j (\leq, \geq, =) b_i \quad (i = \overline{1, m}) \quad (2)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, l}) \quad l \leq n \quad (3)$$

Вектор $X = (x_1, \dots, x_n)$ называется *допустимым планом* ЗЛП, если он удовлетворяет ограничениям (2) и (3).

Вектор $X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ называется *оптимальным планом* ЗЛП, если он является допустимым и обеспечивает минимум или максимум целевой функции.

Множество всех допустимых планов ЗЛП образует *область допустимых значений* (ОДЗ).

Формы записи ЗЛП

1) Развёрнутая форма записи:

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \rightarrow \min(\max)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1, \\ \dots \\ a_{k1} x_1 + \dots + a_{kn} x_n = b_k, \\ a_{k+1,1} x_1 + \dots + a_{k+1,n} x_n \leq b_{k+1}, \\ \dots \\ a_{l1} x_1 + \dots + a_{ln} x_n \leq b_l, \\ a_{l+1,1} x_1 + \dots + a_{l+1,n} x_n \geq b_{l+1}, \\ \dots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n \geq b_m. \\ x_1, \dots, x_p \geq 0, p \leq n \end{array} \right.$$

2) Матричная форма записи ЗЛП:

$$(1) CX \rightarrow \min(\max), \quad C = (c_1, \dots, c_n);$$

$$(2) AX (\leq, =, \geq) B, \\ X \geq 0, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix};$$

$$(3) A = (a_{ij})_{m \times n}.$$

3) Векторная форма записи ЗЛП:

$$z = CX \rightarrow \min(\max)$$

$$\sum_{j=1}^n A_j^T X_j = B \quad A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \\ x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1, n})$$

Каноническая форма записи ЗЛП

$$z = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_i, \quad (i=\overline{1,m}) \quad (2)$$

В системе ограничений стоят знаки только равенства.

$$x_j \geq 0, \quad (j=\overline{1,n}) \quad (3)$$

$$b_i \geq 0, \quad (i=\overline{1,m}) \quad (4)$$

В системе ограничений присутствует выделенный исходный базис.

Базисным решением системы уравнений называется решение, в котором значение всех небазисных переменных равно нулю. **Базисное решение** называется **вырожденным**, если в нем хотя бы одна базисная переменная равна нулю. **Базисное решение** называется **опорным**, если значение всех базисных переменных неотрицательно.

Приведение ЗЛП к канонической форме

1) $\max z' = -z, \quad z' = -c_1 x_1 - \dots - c_n x_n \rightarrow \min$

2) $3x_1 + x_2 \leq 5 \rightarrow 3x_1 + x_2 + x_{n+1} = 5, \quad x_{n+1} \geq 0$

Если в ограничении стоит знак \leq , то к левой части ограничения добавляем дополнительную переменную x_{n+k} со знаком "+" ($x_{n+k} \geq 0$);

3) Если $x_k \geq 0$ не указано, то $x_k = x_k' - x_k''$, $x_k', x_k'' \geq 0$

Пункты (4) и (5) означают поиск в системе ограничений исходного опорного решения.

Если в ЗЛП нет опорного решения, то такая задача не имеет решений по причине несовместности системы ограничений.

ЗЛП может не иметь решения по двум причинам:

1) система ограничений несовместна;

2) целевая функция не ограничена на ОДЗ.

Пример

$$1) z = 3x_1 - 4x_2 + 5x_5 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 8x_1 - 4x_2 + 3x_3 \leq 10, \\ 2x_1 + 4x_5 = 18, \\ 7x_2 - 8x_4 \geq 15. \end{cases} \quad x_1, x_3, x_4 \geq 0$$



$$2) z' = -3x_1 + 4x_2 - 5x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 8x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_6 = 10, \\ 2x_1 + 4x_5 = 18, \\ 7x_2 - 8x_4 - x_7 = 15. \end{cases}$$

$$2x_1 + 4x_5 = 18,$$

$$7x_2 - 8x_4 - x_7 = 15.$$

$$x_1, x_3, x_4 \geq 0, \quad x_6, x_7 \geq 0,$$

$$3) x_2 = x_2' - x_2'', \quad x_5 = x_5' - x_5''$$

$$z' = -3x_1 + 4x_2' - 4x_2'' - 5x_5' + 5x_5'' \rightarrow \min$$

$$4) \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 7 & -7 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 8x_1 - 4x_2' + 4x_2'' + 3x_3 + x_6 = 10, \\ 2x_1 + 4x_5' - 4x_5'' = 18, \\ 7x_2' - 7x_2'' - 8x_4 - x_7 = 15. \end{cases}$$

$$2x_1 + 4x_5' - 4x_5'' = 18,$$

$$7x_2' - 7x_2'' - 8x_4 - x_7 = 15.$$

$$x_1, x_3, x_4, x_6, x_7, x_2', x_2'', x_5', x_5'' \geq 0$$

$$x_2', x_2'', x_5', x_5'' \geq 0,$$

**ЗАДАЧИ,
ПРИВОДЯЩИЕ К ЗЛП**

ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ (ЗЛП)

- Задача о смесях
- Задача о наилучшем распределении ресурсов
- Задача о выборе оптимальной технологии
- Задача о назначениях
- Задача сменно-суточного планирования автобусного парка
- Транспортная задача

Задача о смесях

- Исходные данные:

m – число необходимых питательных веществ

n – число продуктов питания

a_{ij} – количество единиц i -го питательного вещества, содержащееся в единице j -го вида продукта питания

b_i – норма потребления i -го питательного вещества

c_j – цена j -го продукта питания

x_j – количество единиц j -го продукта, используемого в рационе, подлежащее определению

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i = \overline{1, m})$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n})$$

Задача о наилучшем распределении ресурсов

- **Исходные данные:**

n – количество видов выпускаемой продукции

m – количество необходимых для производства ресурсов

a_{ij} – технологические коэффициенты, т.е. количество единиц i -го ресурса, необходимого для производства единицы j -го вида продукции

b_i – полные объемы имеющихся ресурсов

C_j – прибыль, получаемая при реализации единицы j -го вида продукта.

$x = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$ – план выпуска продукции

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1, m})$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n})$$

Задача о выборе оптимальной технологии

■ Исходные данные:

n – количество технологий

m – количество ресурсов

$b_i (i = \overline{1, m})$ – объём ресурсов i -го вида

$c_j (j = \overline{1, n})$ – эффективность технологий, т.е. количество конечной продукции (в денежном эквиваленте), производимой в единицу времени по j -й технологии

a_{ij} – расход i -го ресурса в единицу времени по j -й технологии

x_j – время, в течение которого продукция производится по j -й технологии

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1, m})$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n})$$

Транспортная задача

■ Исходные данные:

m – число пунктов отправления (A_i – пункт отправления)

n – число пунктов назначения (B_j – пункт назначения)

$a_i (i = \overline{1, m})$ – объем продукта в пункте отправления

$b_j (j = \overline{1, n})$ – потребность в пункте назначения

C_{ij} – затраты на перевозку единицы продукта из i -го пункта отправления в j -ый пункт назначения

$$\sum_{i=1}^m a_i = (\leq \geq) \sum_{j=1}^n b_j$$

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j^{(*)}$$

Если выполняется условие (*), то перед нами транспортная задача **закрытого типа**. В противном случае это – задача **открытого типа**.

Составить такой план перевозок, чтобы общая стоимость перевозок была минимальной.

	B_1	B_2	...	B_n
A_1	X_{11}, C_{11}	X_{12}, C_{12}	...	X_{1n}, C_{1n}
A_2	X_{21}, C_{21}	X_{22}, C_{22}	...	X_{2n}, C_{2n}
...
A_m	X_{m1}, C_{m1}	X_{m2}, C_{m2}	...	X_{mn}, C_{mn}

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, (i = \overline{1, m}) \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j, (j = \overline{1, n}) \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

Задача о назначениях

■ Исходные данные:

n – число видов работ

n – число специалистов, выполняющих все виды работ

c_{ij} – эффективность выполнения i -ым специалистом j -ой работы

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1, & i\text{-ый человек выполняет } j\text{-ую работу} \\ 0, & i\text{-ый человек не выполняет } j\text{-ую работу} \end{cases}$$

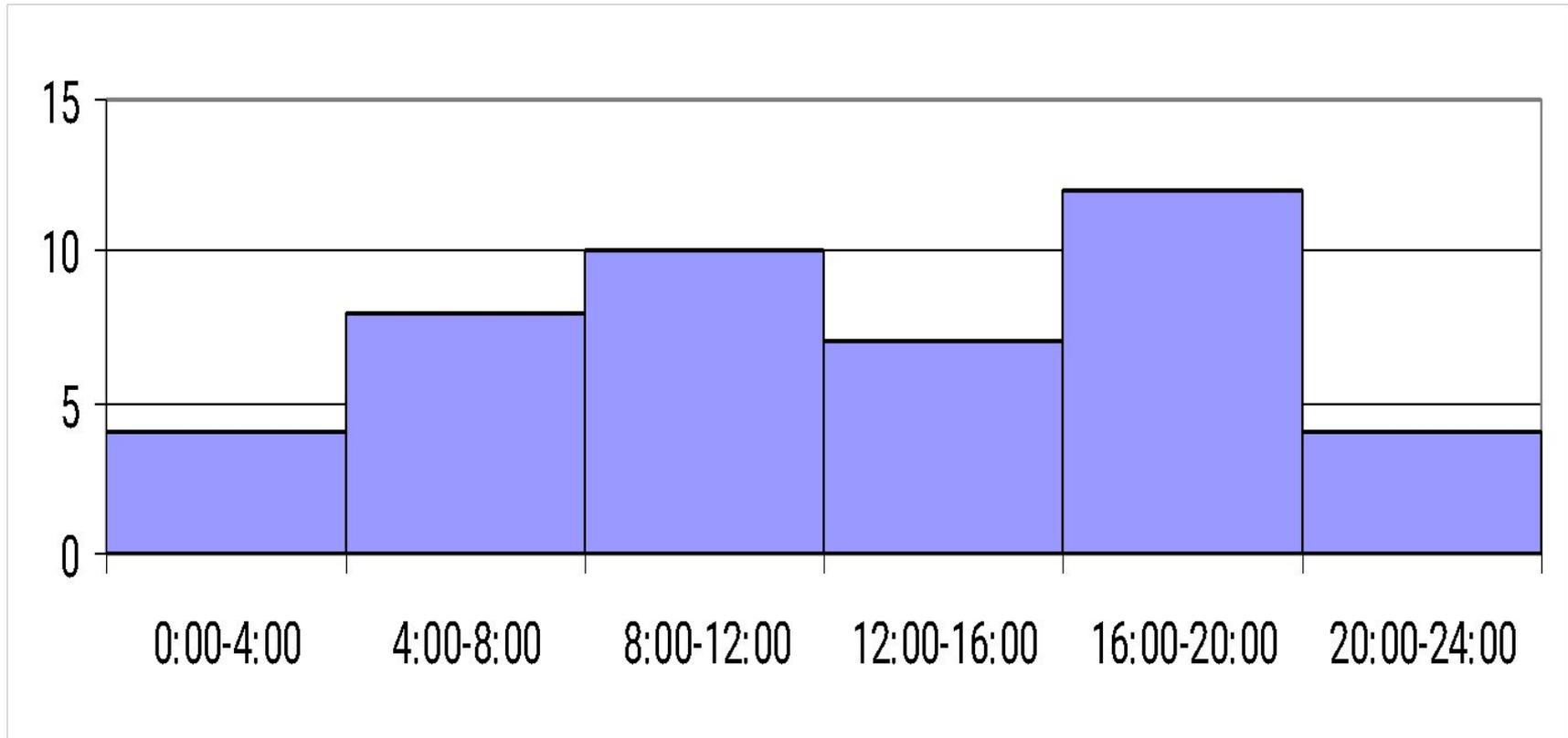
$$\sum \sum c_{i,j} x_{i,j} \rightarrow \max$$

$$\sum_{j=1}^n x_{i,j} = 1 \quad (i = \overline{1, n})$$

$$\sum_{i=1}^n x_{i,j} = 1 \quad (j = \overline{1, n})$$

Задача сменно суточного планирования автобусного парка

Цель: определение минимального количества автобусов для удовлетворения потребностей пассажирских перевозок. Будем считать, что каждые четыре часа количество автобусов постоянно.



Постановка задачи

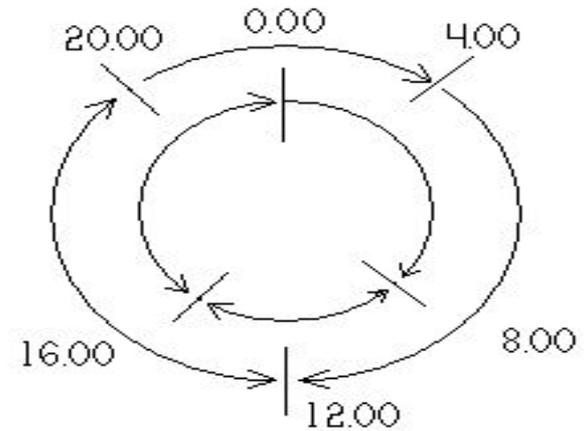
Считается, что автобус может находиться на линии только восемь часов, и рабочий день водителя равен восьми часам. Требуется определить количество автобусов в каждой из рабочих смен так, чтобы оно было не меньше минимальной потребности в них, при этом общее количество автобусов, выходящих на линию в течение суток должно быть минимальным.

$$\text{I } 8:01 \div 16:00 \quad x_1 \geq 10$$

$$\text{II } 16:01 \div 24:00 \quad x_2 \geq 12$$

$$\text{III } 0:01 \div 8:00 \quad x_3 \geq 8$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 30$$



$$\sum_{j=1}^6 x_j \rightarrow \min$$

Решение:

$$x_j \geq 0$$

$$x_1 + x_6 \geq 4 \quad x_1 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 \geq 8 \quad x_2 \geq 0$$

$$x_2 + x_3 \geq 10 \quad x_3 \geq 0 \quad \Rightarrow x_1 = x_3 = x_5 = 0; \quad x_2 = 10; \quad x_4 = 12; \quad x_6 = 4.$$

$$x_3 + x_4 \geq 7 \quad x_4 \geq 0$$

$$x_4 + x_5 \geq 12 \quad x_5 \geq 0$$

$$x_5 + x_6 \geq 4 \quad x_6 \geq 0$$