

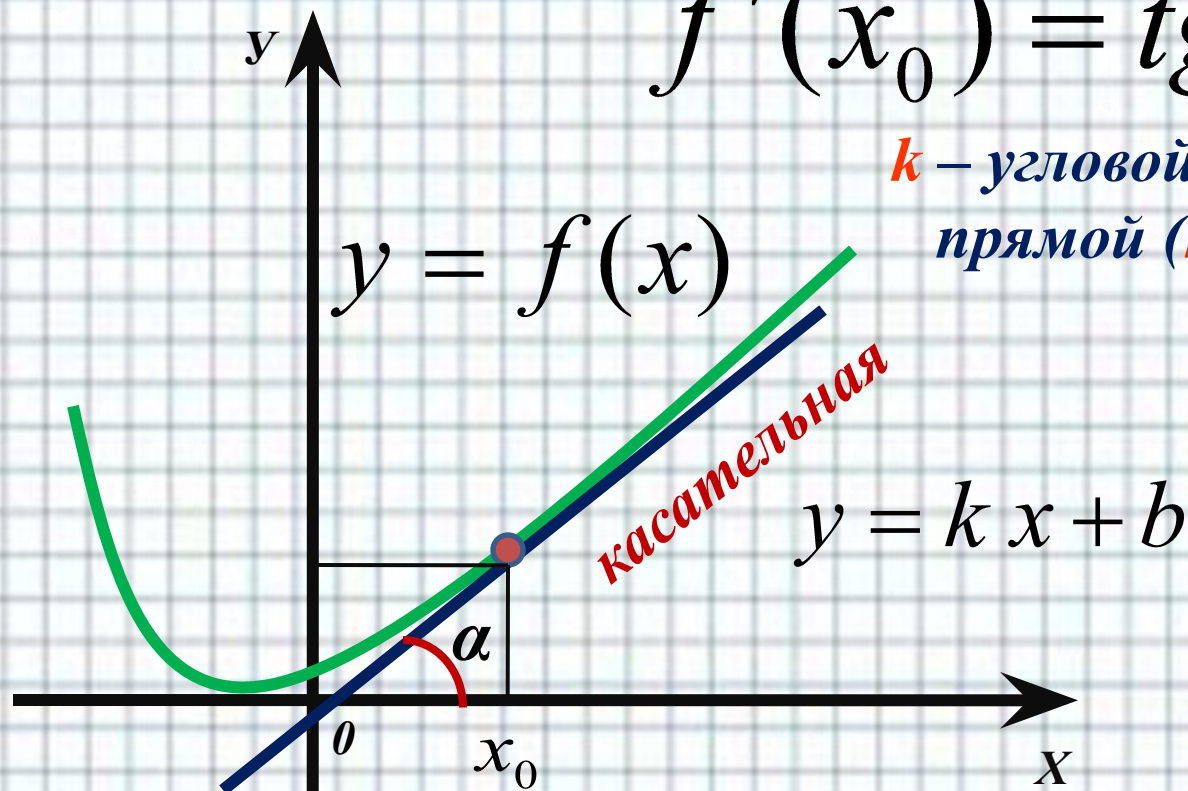


25.05.20

*Применение
производной для
исследования
функции на
монотонность и
экстремумы*

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k$$

k – угловой коэффициент
прямой (касательной)



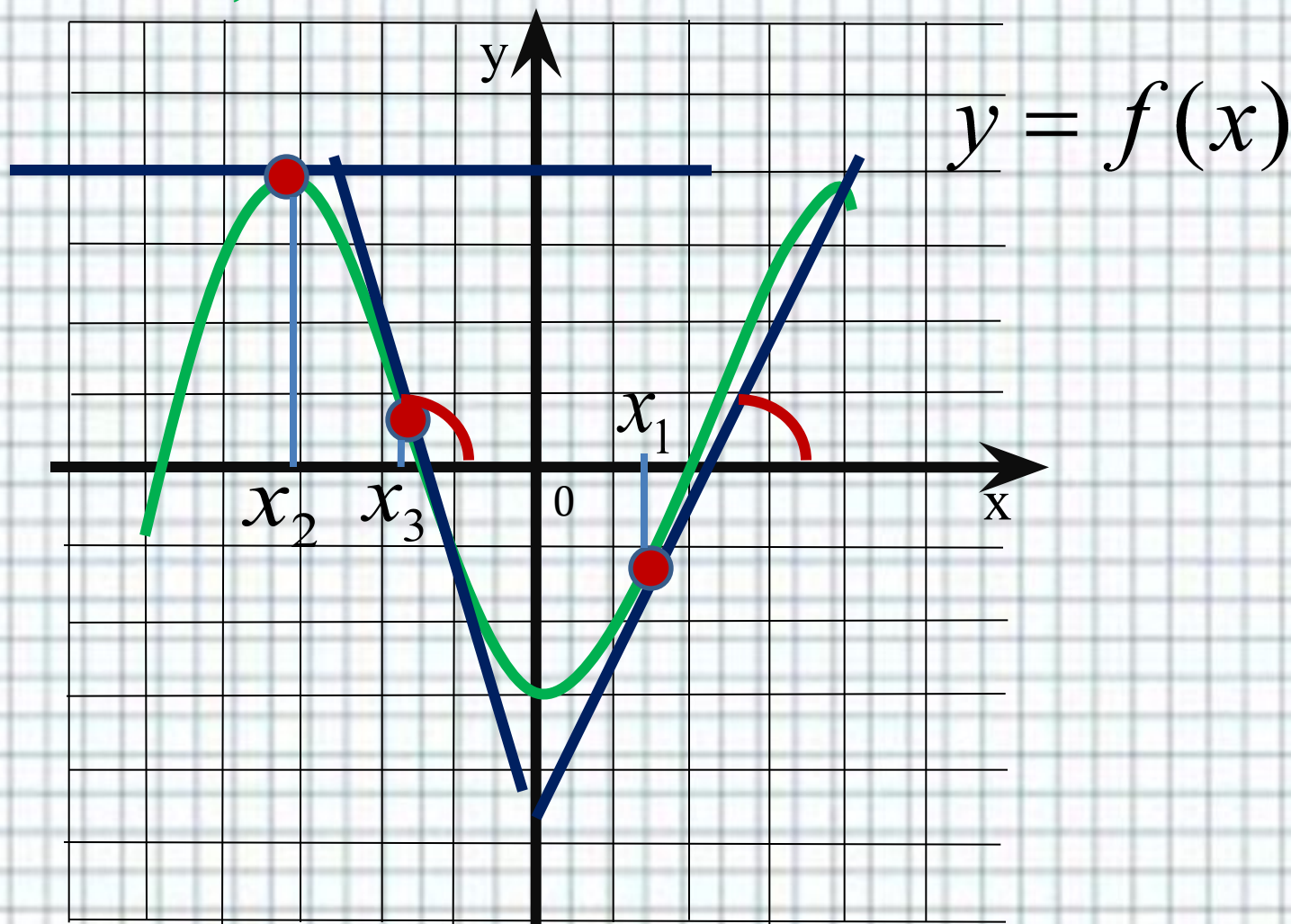
Геометрический смысл производной: если к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 можно провести касательную, непараллельную оси y , то $f'(x_0)$ выражает угловой коэффициент касательной, т.е.

$$f'(x_0) = k$$

Поскольку $k = \operatorname{tg} \alpha$, то верно равенство $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$



Если $\alpha < 90^\circ$, то $k > 0$. Если $\alpha > 90^\circ$, то $k < 0$.



Если $\alpha = 0^\circ$, то $k = 0$.

Касательная параллельна оси Ox .



Теорема 1. Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) \geq 0$ (причем равенство $f'(x) = 0$ выполняется лишь в изолированных точках), то функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке X .

Теорема 2. Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) \leq 0$ (причем равенство $f'(x) = 0$ выполняется лишь в изолированных точках), то функция $y = f(x)$ убывает на промежутке X .

Теорема 3. Если во всех точках открытого промежутка X выполняется равенство $f'(x) = 0$, то функция $y = f(x)$ постоянна на промежутке X .



Пример: Исследовать на монотонность функцию $y=2x^3+3x^2-1$.

Исследовать функцию на монотонность – это значит выяснить, на каких промежутках области определения функция возрастает, а на каких – убывает. Согласно теоремам 1 и 2, это связано со знаком производной.

Найдем производную данной функции:



$$f'(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x+1)$$



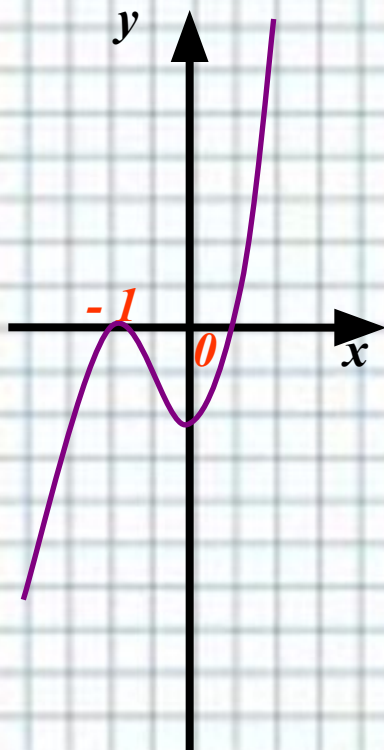
Если функция непрерывна не только на открытом промежутке, но и в его конечных точках (именно так обстоит дело для заданной функции), эти конечные точки включают в промежуток монотонности функции.

Ответ: функция возрастает $x \in (-\infty; -1]$,
 $[0; +\infty)$, функция убывает $x \in [-1; 0]$



Точки экстремума функции и их нахождение

Рассмотрим график функции $y=2x^3+3x^2-1$



На графике две уникальные точки: $(-1;0)$ и $(0;-1)$. В этих точках:

- 1) происходит изменение характера монотонности функции;
- 2) касательная к графику функции параллельна оси X (или совпадает с осью X), т.е. производная функции в каждой из указанных точек равна нулю;
- 3) $f(-1)$ – наибольшее значение функции, но не во всей области определения, а по сравнению со значениями функции из некоторой окрестности точки $x = -1$. Также $f(0)$ – наименьшее значение функции в окрестности точки $x=0$



Определение 1. Точку $x=x_0$ называют **точкой минимума функции $y = f(x)$** , если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой (кроме самой точки $x=x_0$) выполняется неравенство

$$f(x) > f(x_0).$$

Определение 2. Точку $x=x_0$ называют **точкой максимума функции $y = f(x)$** , если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой (кроме самой точки $x=x_0$) выполняется неравенство

$$f(x) < f(x_0).$$


Значение максимума и минимума обозначаются:

y_{max} , y_{min} соответственно.

ВНИМАНИЕ!!!

Только не путать с наибольшим (или наименьшим) значением функции во всей рассматриваемой области определения, эти значения в окрестности некоторой точки X , являются наибольшими (или

наименьшими)
*Точки минимума и максимума функции называют – **точки экстремума** (от латинского слова *extremum* – «крайний»)*



Теорема 4. Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x = x_0$, то этой точке производная либо равна нулю, либо не существует.

Внутренние точки области определения функции, в которых производная функции равна нулю, называют **стационарными**, а внутренние точки области определения функции, в которых функция непрерывна, но производная не существует – **критическими**.

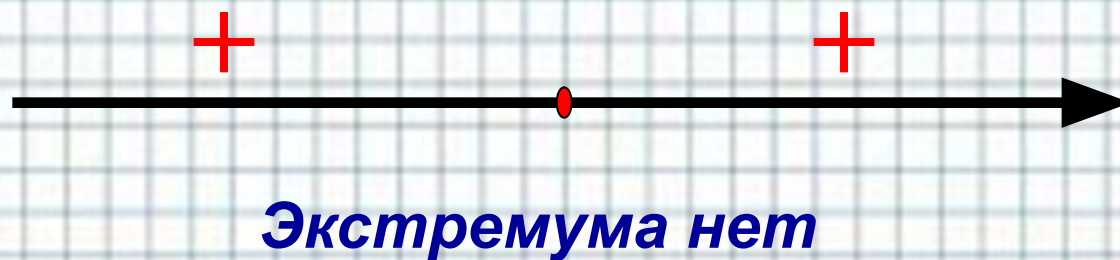
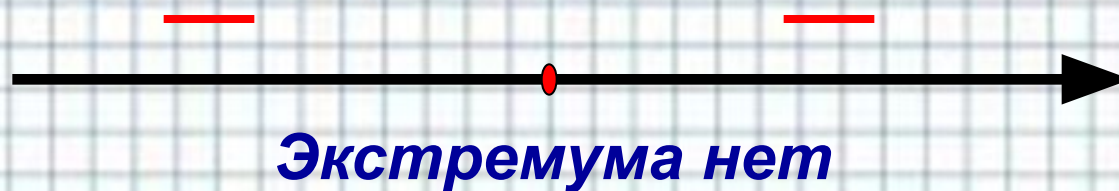
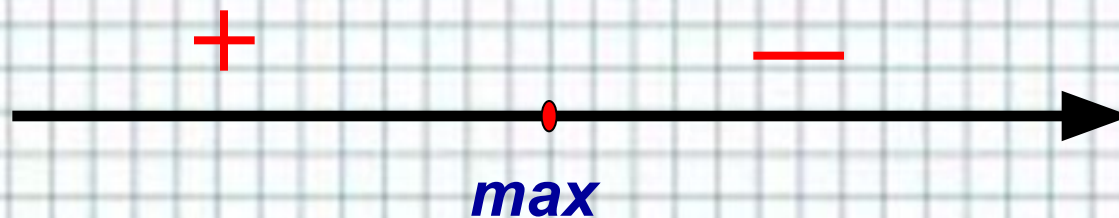
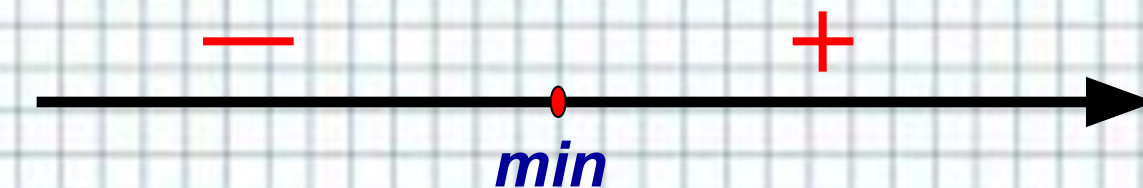


Теорема 5 (достаточные условия экстремума). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри промежутка стационарную или критическую точку $x = x_0$. Тогда:

- 1) Если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x < x_0$, выполняется неравенство $f'(x) < 0$, при $x > x_0$ – неравенство $f'(x) > 0$, то $x = x_0$ – точка минимума функции $y = f(x)$;
- 2) Если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ – неравенство $f'(x) < 0$, то $x = x_0$ – точка максимума функции $y = f(x)$;
- 3) Если у этой точки существует такая окрестность, что в ней и слева и справа от точки x_0 знаки производной одинаковы, то в точке x_0 экстремума нет.



Для запоминания!!!



Пример: Найти точки экстремума функции $y=3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 11$.

Решение: найдем производную данной функции: $y' = 12x^3 - 48x^2 + 48x$.

Найдем стационарные точки:

$$12x^3 - 48x^2 + 48x = 0$$

$$12x(x^2 - 4x + 4) = 0$$

$$12x(x - 2)^2 = 0$$

Производная обращается в нуль в точках $x=0$ и $x=2$



Значит, $x=0$ – точка минимума.

Ответ: $y_{\min} = -11$.



- **Алгоритм исследования непрерывной функции $y=f(x)$ на монотонность и экстремумы:**
 1. **Найти производную $f'(x)$.**
 2. **Найти стационарные ($f'(x)=0$) и критические ($f'(x)$ не существует) точки функции $y=f(x)$.**
 3. **Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой и определить знаки производной на получившихся промежутках.**
 4. **На основании теорем 1, 2, и 5 сделать выводы о монотонности функции и о ее точках экстремума.**



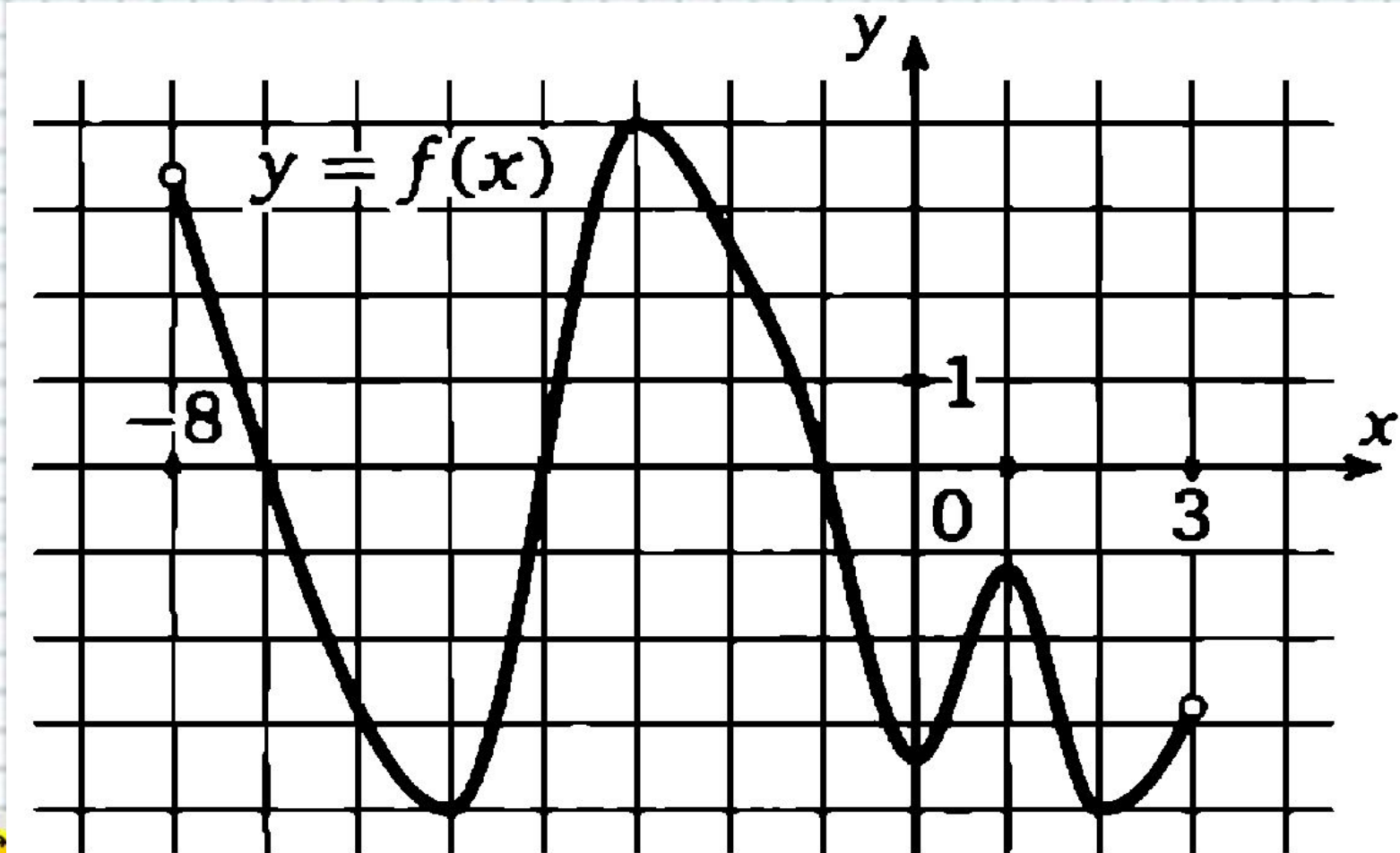
Пример: Исследовать функцию

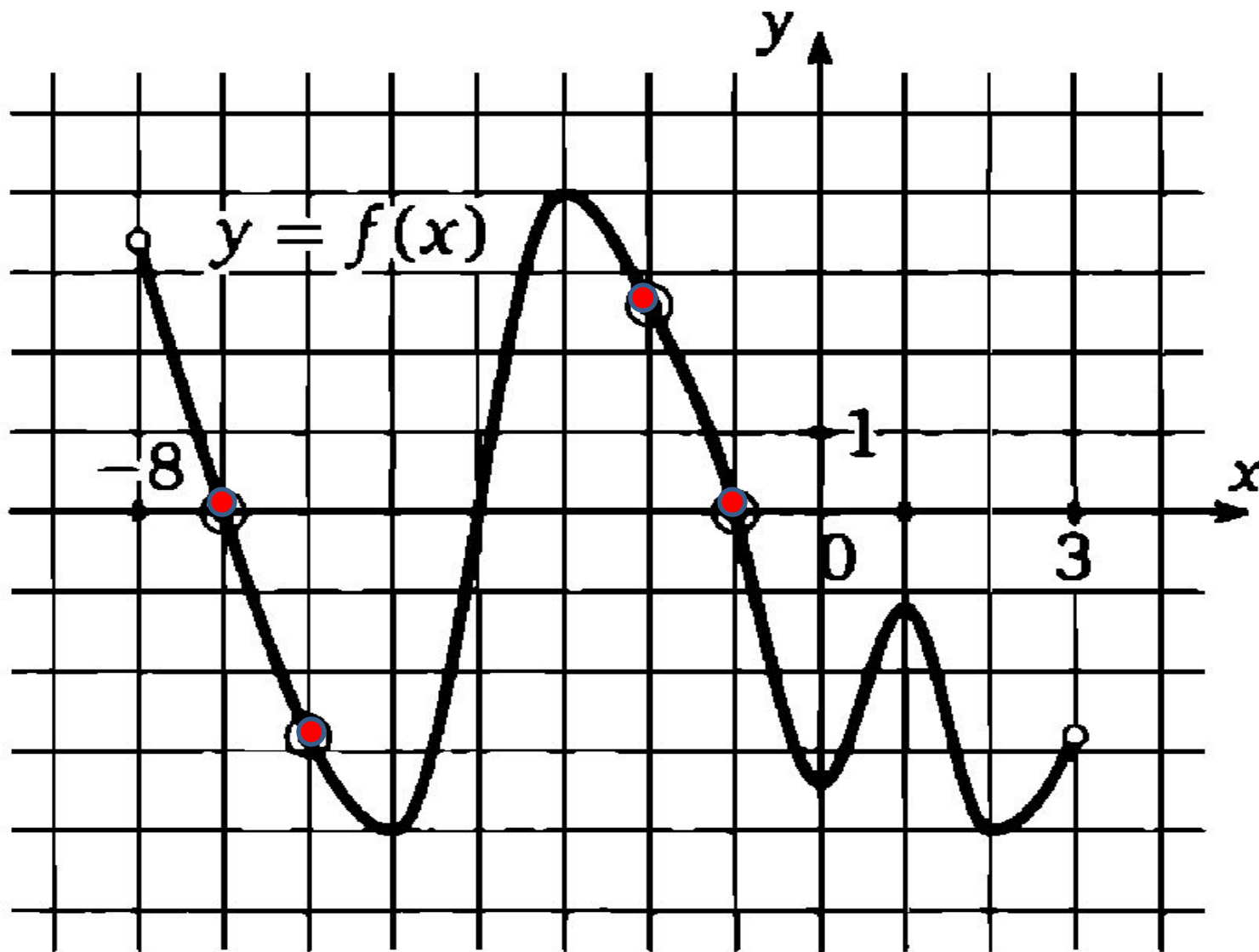
$$y = \frac{x^4 + 16}{x^2}$$

на монотонность и экстремумы



На рисунке изображен график функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-8; 3)$. Определить количество целых точек, в которых производная функции отрицательна

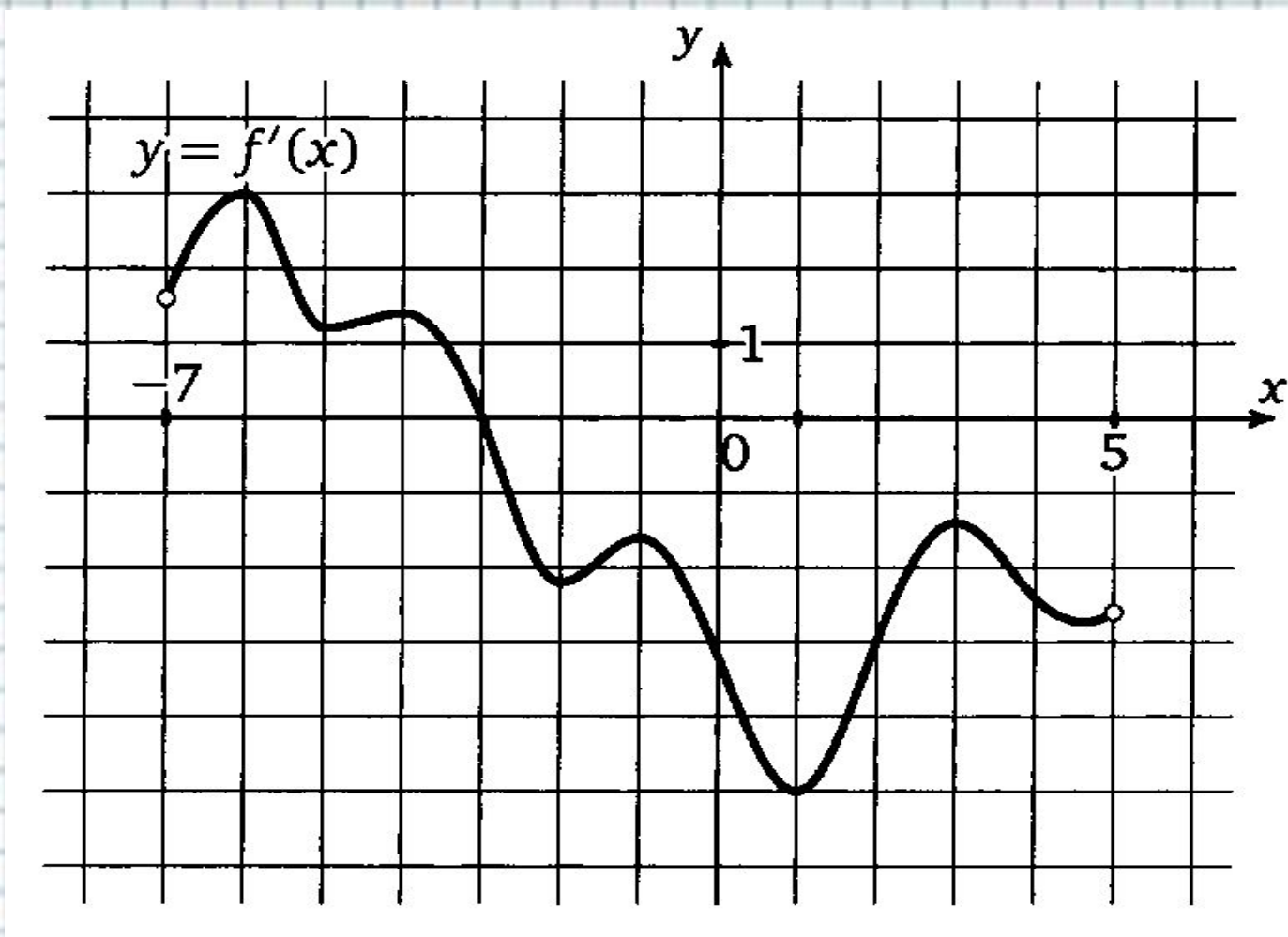


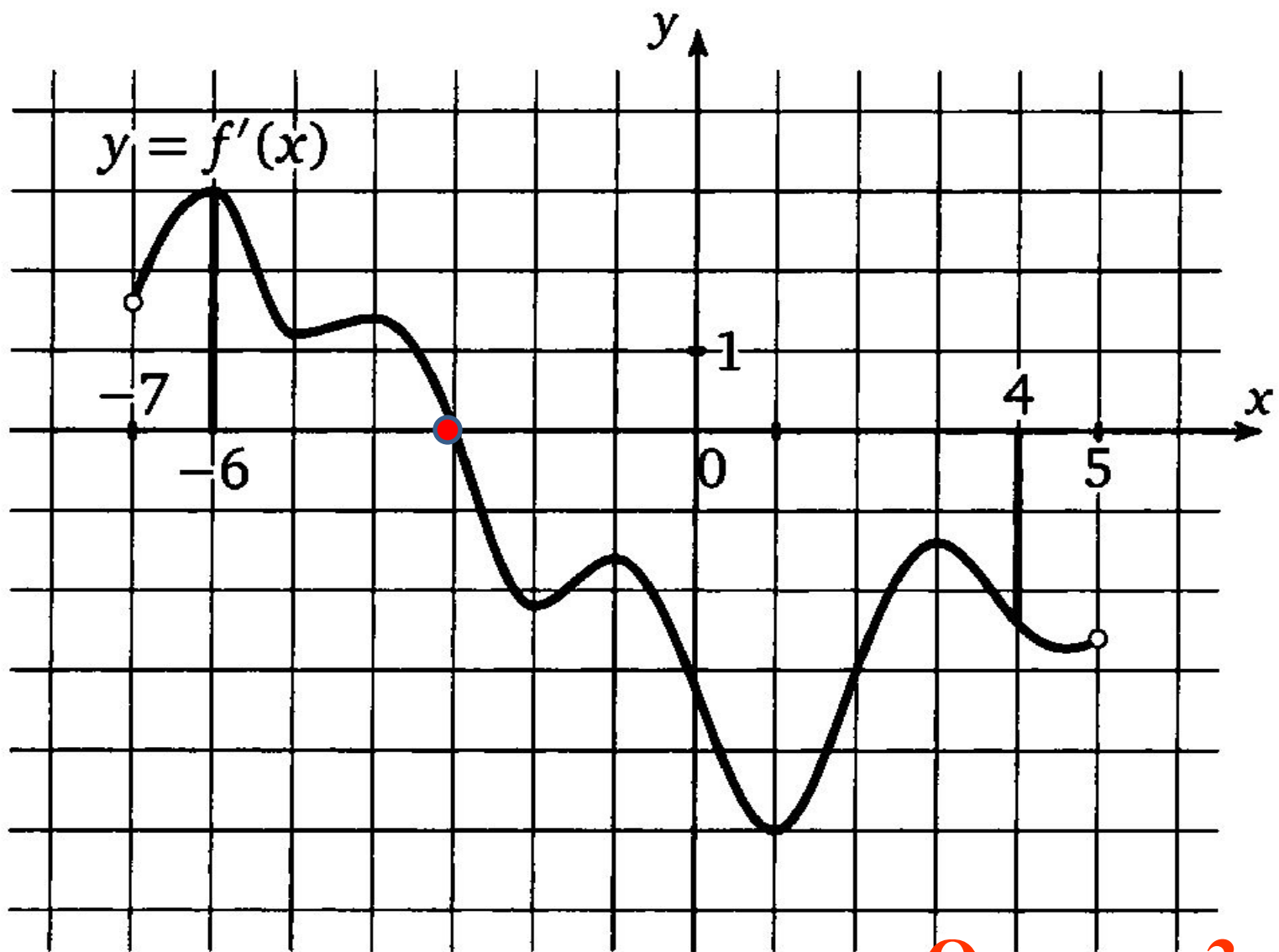


Ответ: 4



На рисунке изображен график производной функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-7; 5)$. Найти точку экстремума функции на отрезке $[-6; 4]$

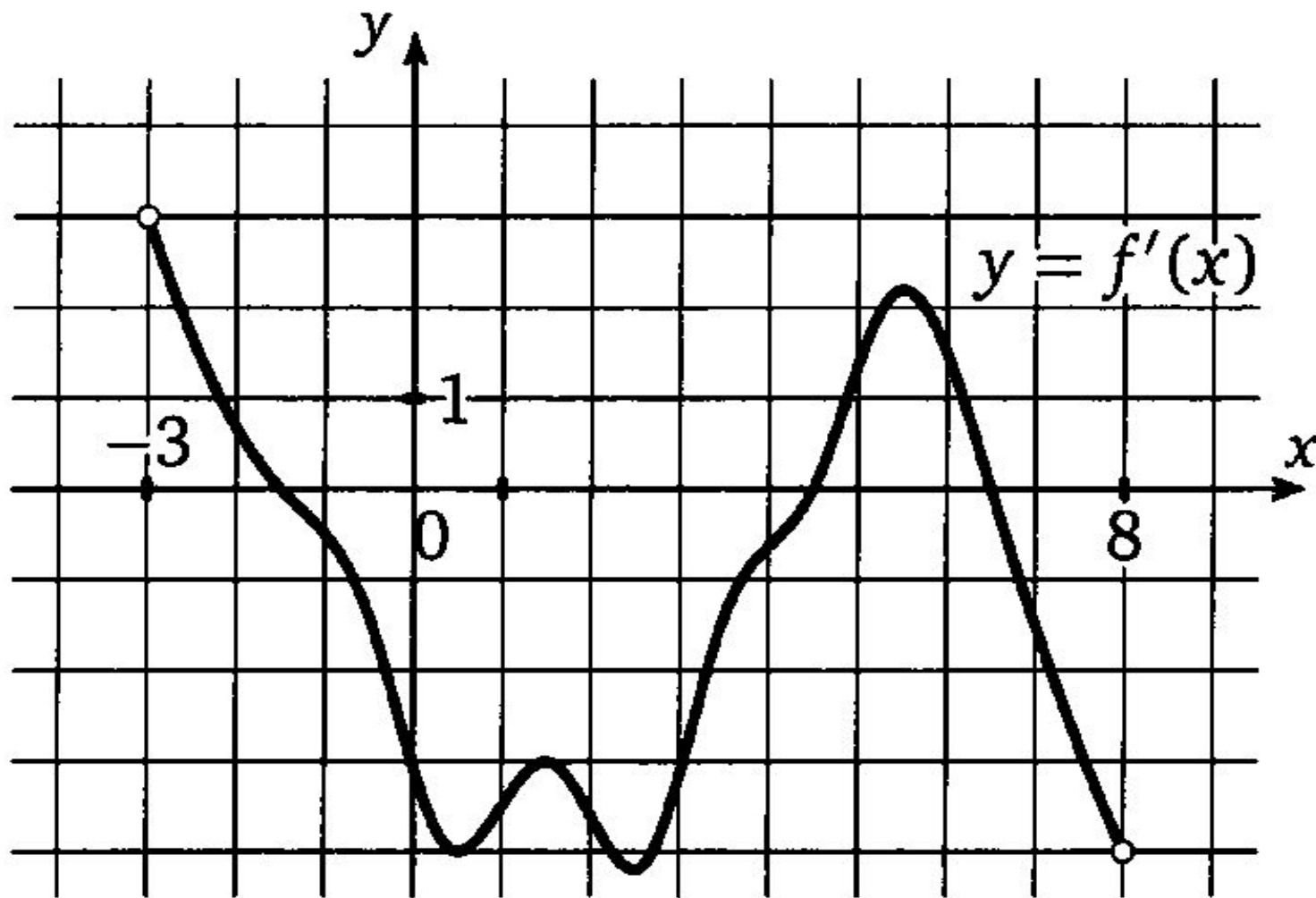


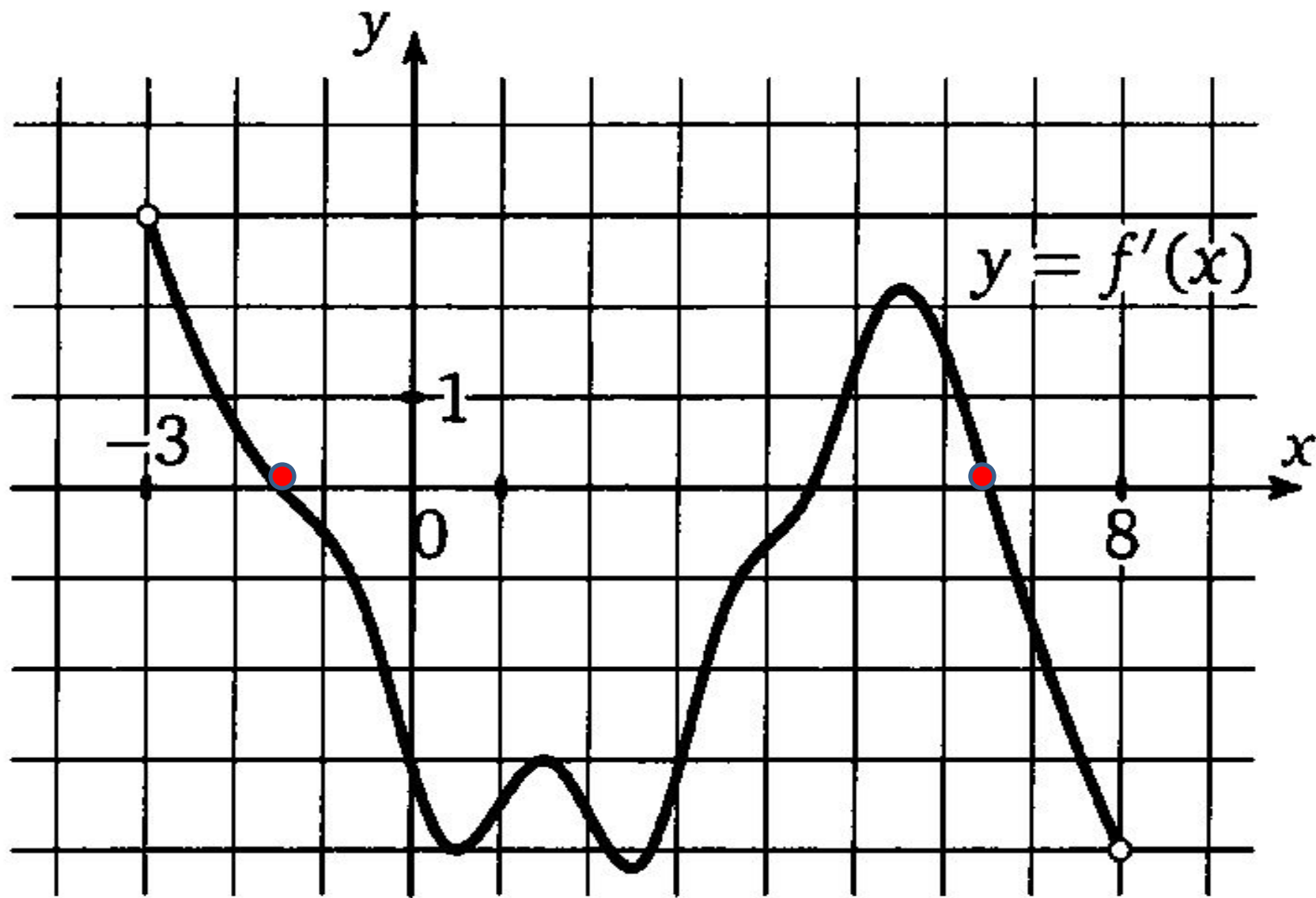


Ответ: - 3



На рисунке изображен график производной функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-3; 8)$. Найти количество точек максимума функции на отрезке $[-2; 7]$

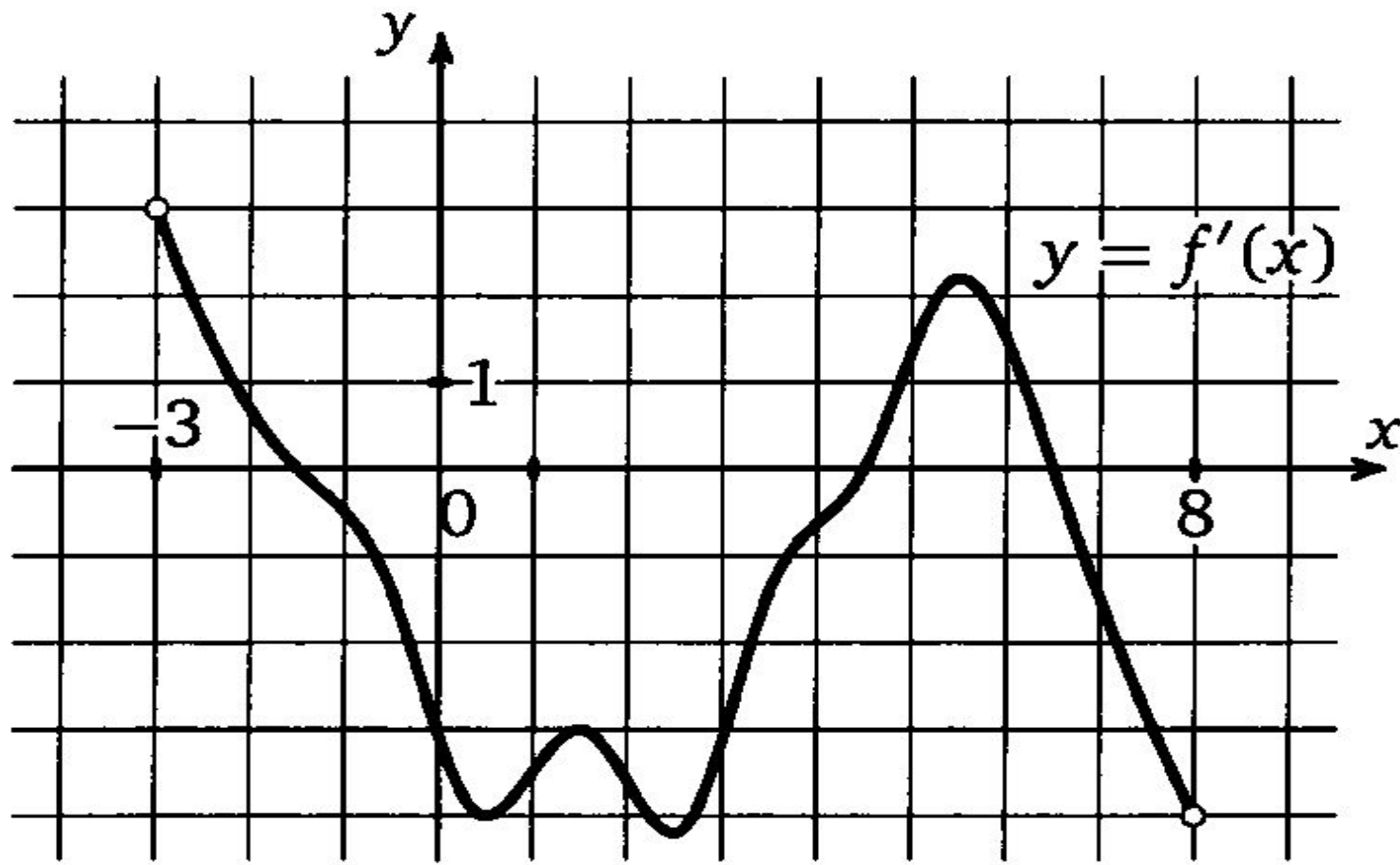


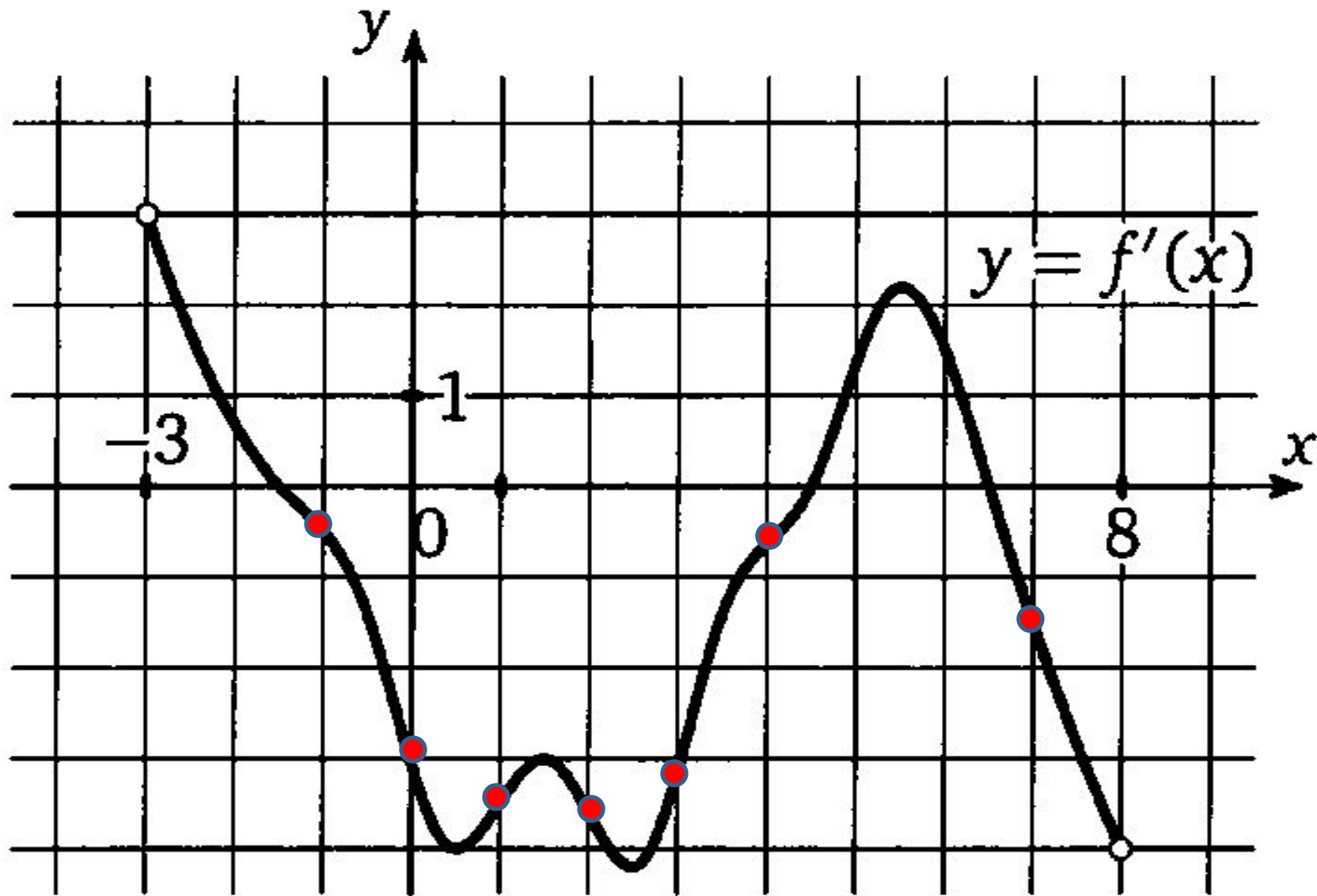


Ответ: 2



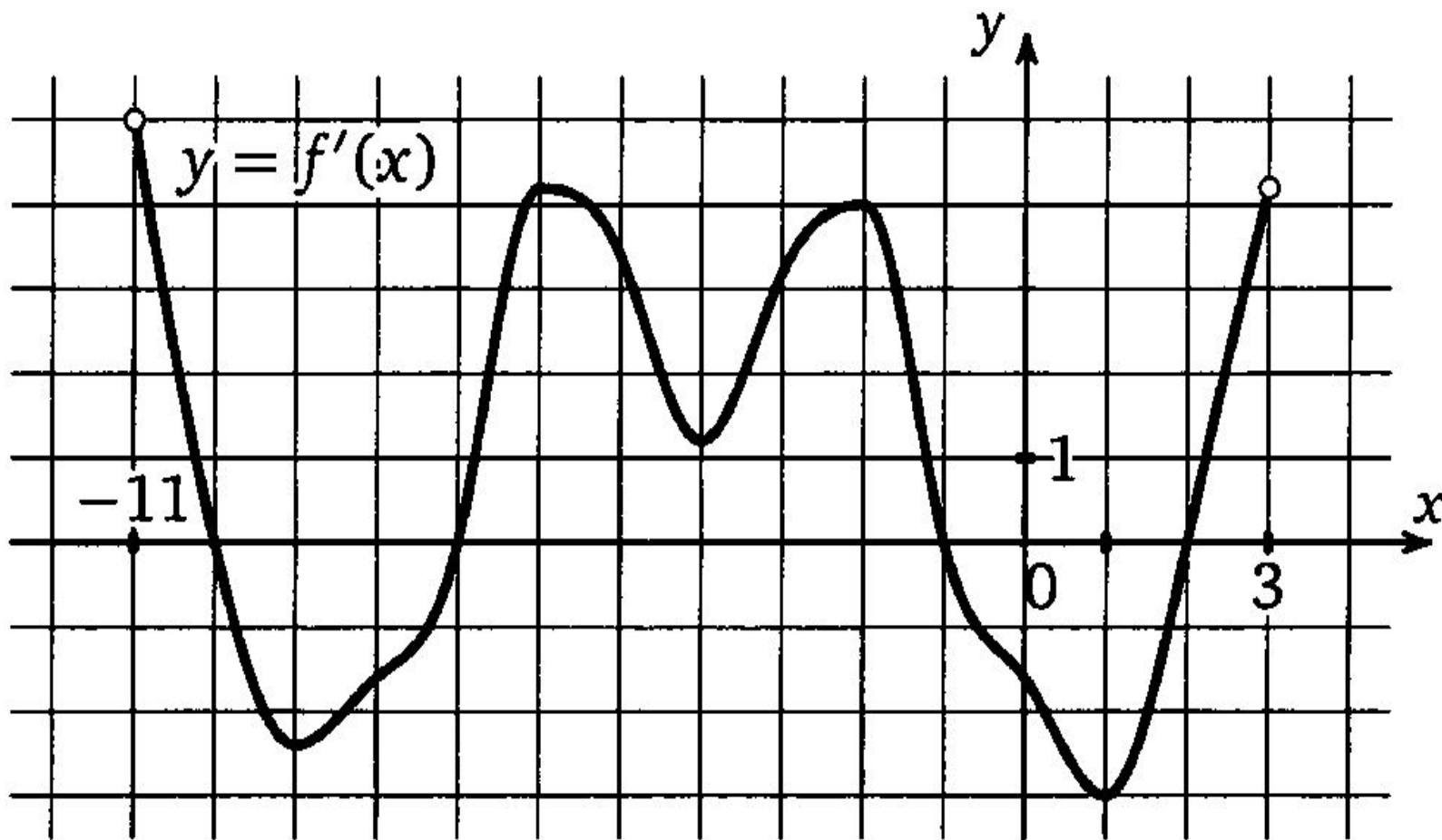
На рисунке изображен график производной функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-3; 8)$. Найти промежутки убывания функции. В ответе указать сумму целых точек, входящих в эти промежутки

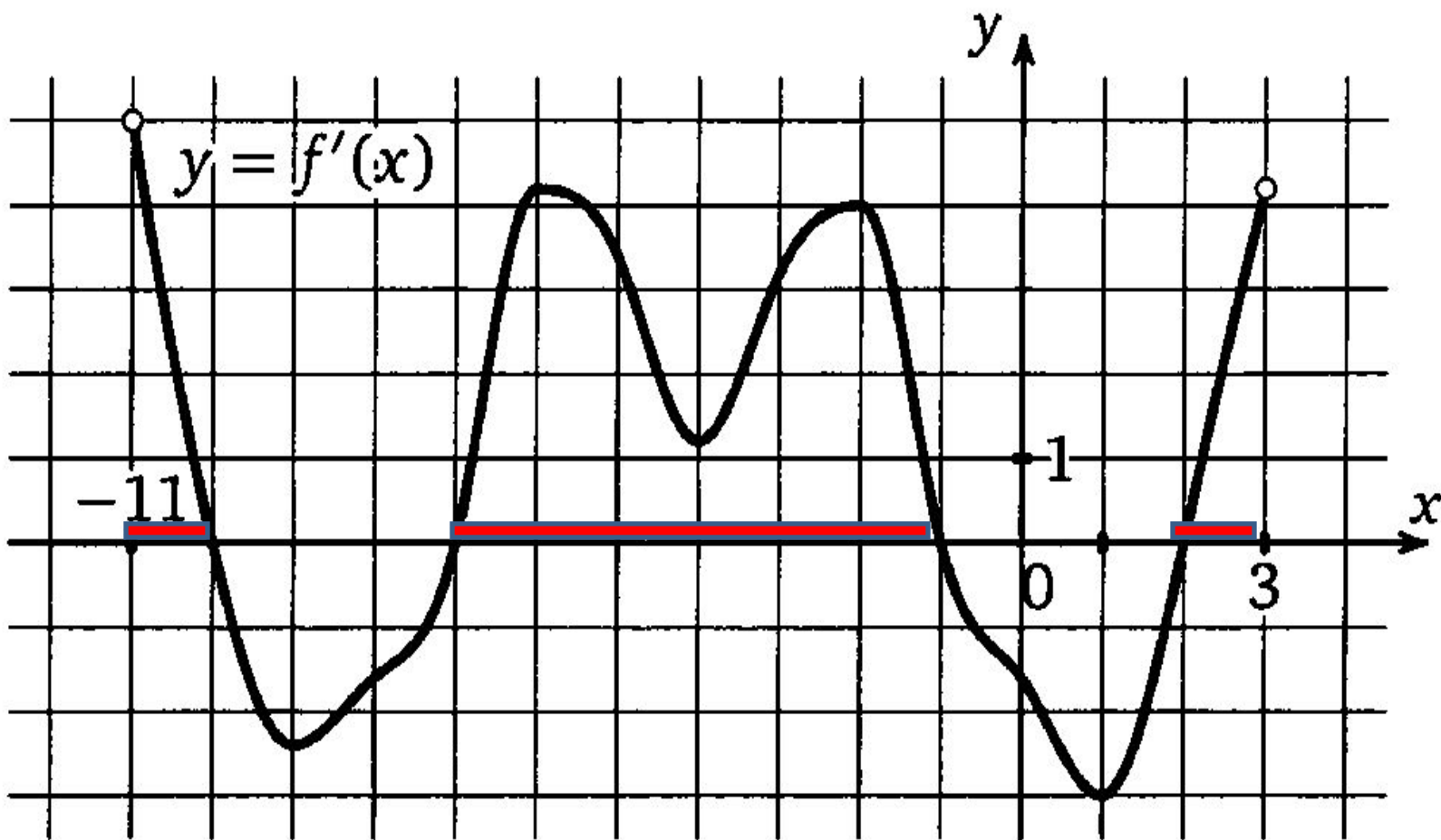




Ответ: 16

На рисунке изображен график производной функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-11; 3)$. Найти промежутки возрастания функции. В ответе указать длину наибольшего из них





Ответ: 6



Работа с учебником:
№ 30.1, 30.3, 30.14(а)

Домашнее задание: § 30



Спасибо за уро

