

# Элементы финансовой математики в контексте школьной программы

Кандидат физико-математических наук,  
доцент кафедры геометрии и компьютерных наук  
Харитоновна С.В.

# Типы задач

- Нахождение количества лет выплаты кредита
- Вычисление процентной ставки по кредиту
- Нахождение суммы кредита
- Нахождение ежегодного транша

## Нахождение количества лет выплаты кредита

Максим хочет взять в банке кредит 1,5 миллиона рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными платежами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Процентная ставка - 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Максим взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 350 тысяч рублей?

### Решение

- 1) В конце первого года долг составит:  $1500000 \cdot 1,1 - 350000 = 1300000$  (руб)
- 2) В конце второго года долг составит:  $1300000 \cdot 1,1 - 350000 = 1080000$  (руб)
- 3) В конце третьего года долг составит:  $1080000 \cdot 1,1 - 350000 = 838000$  (руб)
- 4) В конце четвертого года долг составит:  $838000 \cdot 1,1 - 350000 = 571800$  (руб)
- 5) В конце пятого года долг составит:  $571800 \cdot 1,1 - 350000 = 278980$  (руб)
- 6) В конце шестого года долг составит:  $278980 \cdot 1,1 = 306878$  (руб)

Ответ: 6 лет

## Вычисление процентной ставки по кредиту

31 декабря 2014 года Валерий взял в банке 1000000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая. 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Валерий переводит в банк очередной транш. Валерий выплатил кредит за два транша, то есть за два года. В первый раз Валерий перевел в банк 660000 рублей, во второй раз – 484000 рублей. Под какой процент банк выдал кредит Валерию?

### Решение

Пусть  $a$  - процентная ставка по кредиту.

1) В конце первого года долг составит:

$$1000000 \cdot (1 + 0,01 \cdot a) - 660000 = 340000 + 10000 \cdot a$$

2) В конце второго года долг составит:

$$(340000 + 10000 \cdot a) \cdot (1 + 0,01 \cdot a) - 484000.$$

По условию задачи кредит будет погашен за два года. Составляем уравнение:  $(340000 + 10000 \cdot a) \cdot (1 + 0,01 \cdot a) - 484000 = 0$ ;

Решая уравнение, получаем, что  $a = 10$ .

Ответ: 10%

## Нахождение суммы кредита

31 декабря 2014 года Максим взял в банке некоторую сумму денег в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Михаил переводит в банк 2928200 рублей. Какую сумму взял Михаил в банке, если он выплатил долг четырьмя равными платежами, то есть за 4 года?

### Решение

Пусть  $x$  – сумма кредита.

1) В конце первого года долг составит:  $(1,1x - 2928200)$  (руб.)

2) В конце второго года долг составит:

$$(1,1x - 2928200) \cdot 1,1 - 2928200 = 1,21x - 6149220 \text{ (руб.)}$$

3) В конце третьего года долг (в рублях) составит:

$$(1,21x - 6149220) \cdot 1,1 - 2928200 = 1,331x - 9692342 \text{ (руб.)}$$

4) В конце четвертого года долг (в рублях) составит 2928200 рублей.

Получим уравнение

$$(1,331x - 9692342) \cdot 1,1 = 2928200;$$

$$x = 9281999,8.$$

Ответ: 9281999,8 руб.

## Нахождение ежегодного транша

31 декабря 2014 года Роман взял в банке 8599000 рублей в кредит под 14% годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т.е. увеличивает долг на 14%), затем Роман переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Роман выплатил долг тремя равными платежами (то есть за 3 года)?

Решение.

1) В конце первого года долг составит:

$$8599000 \cdot 1,14 - X = 9802860 - X \text{ (руб.)}$$

2) В конце второго года долг составит:

$$(9802860 - X) \cdot 1,14 - X = 11175260 - 2,14 \cdot X \text{ (руб.)}$$

3) В конце третьего года долг составит:

$$(11175260 - 2,14 \cdot X) \cdot 1,14 - X = 12739796 - 3,4396 \cdot X \text{ (руб.)}$$

Составим уравнение:

$$12739796 - 3,4396 \cdot X = 0$$

$$X = 3703860 \text{ рублей}$$

Ответ: ежегодный транш составит 3703860 рублей.

В двух банках в конце года на каждый счёт начисляются проценты: в первом банке - 60% к текущей сумме на счете, во втором - 40% к текущей сумме на счете. Вкладчик в начале года часть, имеющихся у него денег положил в первый банк, а остальные деньги - во второй банк, с таким расчётом, чтобы через 2 года суммарное количество денег на обоих счетах увеличилось на 150%. Сколько процентов денег вкладчик положил в первый банк?

**Решение**

	I банк	II банк
вложил	$x$	$y$
через год	$x+0,6x=1,6x$	$y+0,4y=1,4y$
через 2 года	$1,6x+0,6 \cdot 1,6x=1,6^2x$	$1,4y+0,4 \cdot 1,4y=1,4^2y$
Общая сумма	$1,6^2x+1,4^2y=(x+y)+1,5(x+y)$ $1,6^2x+1,4^2y=2,5(x+y)$ $x/y=9$	

**Ответ:** 90%

В банк был положен вклад под банковский процент 10%. Через год хозяин вклада снял со счета 2000 рублей, а еще через год снова внес 2000 рублей. Однако, вследствие этих действий через три года со времени первоначального вложения он получил сумму меньше запланированной (если бы не было промежуточных операций со вкладом). На сколько рублей меньше запланированной суммы получил в итоге вкладчик?

Решение



Ответ: 220 рублей.

Семён Кузнецов планировал вложить все свои сбережения на сберегательный счёт в банк «Навроде» под 500%, рассчитывая через год забрать  $A$  рублей. Крах банка «Навроде» изменил его планы, предотвратив необдуманый поступок. В результате часть денег  $S$ . Кузнецов положил в банк «Первый Муниципальный», а остальные в банку из-под макарон. Через год «Муниципальный» повысил процент выплат в два с половиной раза, и Кузнецов решил оставить вклад ещё на год. В итоге размер суммы, полученной в «Первом Муниципальном», составил  $1/6 \cdot A$  рублей. Определите, какой процент за первый год начислил банк, если в банку из-под макарон Семён «вложил»  $2/27 \cdot A$  рублей.

	«Навроде»	«Первый муниципальный»	Банка из-под макарон
вклад	$1/6 A$	$1/6 A - 2/27 A = S$ $5/54 A = S$	$2/27 A$
через год	$A$	$(1+p)S$	
через 2 года		$(1+2,5p)(1+p)S=1/6 A$ $(1+2,5p)(1+p) 5/54 A=1/6 A$ $p=0,2$	

Банк планирует вложить на 1 год 30% имеющихся у него средств клиентов в акции золотодобывающего комбината, а остальные 70% – в строительство торгового комплекса. В зависимости от обстоятельств первый проект может принести банку прибыль в размере от 32% до 37% годовых, а второй проект - от 22% до 27% годовых. В конце года банк обязан вернуть деньги клиентам и выплатить им проценты по заранее установленной ставке, уровень которой должен находиться в пределах от 10% до 20% годовых. Определите, какую наименьшую и наибольшую чистую прибыль в процентах годовых от суммарных вложений в покупку акций и строительство торгового комплекса может при этом получить банк.

### Решение

Пусть банк оперировал суммой 1000 рублей, распределив их на акции и на строительство, выделив 300 и 700 рублей соответственно.

	<i>акции</i>	<i>стройка</i>
<i>было</i>	300	700

## Худший вариант

	<i>акции</i>	<i>стройка</i>
<i>было</i>	300	700
<i>прибыль</i>	+ 96	+ 154
<i>прибыль</i>	+ 250	
<i>возврат</i>	- 200	
<i>стало</i>	1050	

Наименьшая прибыль 5%.

## Лучший вариант

	<i>акции</i>	<i>стройка</i>
<i>было</i>	300	700
<i>прибыль</i>	+ 111	+ 189
<i>прибыль</i>	+ 300	
<i>возврат</i>	- 100	
<i>стало</i>	1200	

Наибольшая прибыль 20%.

Ответ: 5% и 20%

В одной стране в обращении находились 1 000 000 долларов, 20% из которых были фальшивыми. Некая криминальная структура стала ввозить в страну по 100 000 долларов в месяц, 10% из которых были фальшивыми. В это же время другая структура стала вывозить из страны 50 000 долларов ежемесячно, из которых 30% оказывались фальшивыми. Через сколько месяцев содержание фальшивых долларов в стране составит 5%?

**Решение.**

Пусть  
1000 долларов - 1 доллар  
Фальшивых долларов  
в 20 раз меньше общего  
числа долларов:

$$1000 + 50k = 20(200 - 5k)$$

$$k = 20$$

Ответ: Через 20 месяцев

	<i>всего долларов</i>	<i>фальшивых</i>
<i>было</i>	1000	200
<i>ввезли</i>	+ 100k	+ 10k
<i>вывезли</i>	- 50k	- 15k
<i>стало</i>	1000 + 50k	200 - 5k
	100%	5%

Два брокера купили акции одного достоинства на сумму 3640 р. Когда цена на эти акции возросла, они продали часть акций на сумму 3927 р. Первый брокер продал 75% своих акций, а второй – 80% своих. При этом сумма от продажи акций, полученная вторым брокером, на 140% превысила сумму, полученную первым брокером. На сколько процентов возросла цена одной акции?

	<i>всего акций</i>	<i>продано акций</i>
<i>брокер 1</i>	$4x$	$3x$
<i>брокер 2</i>	$5y$	$4y$

	<i>всего акций</i>	<i>продано акций</i>
<i>брокер 1</i>	$4x$	$3x - 100\%$
<i>брокер 2</i>	$5y$	$4y - 240\%$

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{3}$$

Обозначим  $x = 5t$ ,  $y = 9t$  (избегаем дробей).

	<i>всего акций</i>	<i>продано акций</i>
<i>брокер 1</i>	$20t$	$15t$
<i>брокер 2</i>	$45t$	$36t$
<i>всего</i>	$65t$	$51t$
	$3640 \text{ р.}$	$3927 \text{ р.}$
	$\frac{56}{t}$	$\frac{77}{t}$

Задача теперь сводится к такой: на сколько процентов 77 больше 56?

$$\frac{77-56}{56} \cdot 100 = \frac{21}{56} \cdot 100 = \frac{3}{8} \cdot 100 = 0,375 \cdot 100 = 37,5$$

Ответ: 37,5%

Транснациональная компания "Амосо inc." решила провести недружественное поглощение компании "First Aluminum Company" (FAC) путем скупки акций миноритарных акционеров. Известно, что Амосо inc. было сделано три предложения владельцам акций FAC, при этом цена покупки одной акции каждый раз повышалась на  $\frac{1}{3}$ , а общее количество приобретенных Амосо inc. акций поглощаемой компании увеличивалось на 20%. Определите величину третьего предложения и общее количество скупленных акций "First Aluminum Company", если начальное предложение составило \$27 за одну акцию, а количество акций, выкупленных по второй цене, — 15 тысяч.

Решение.

	Цена за акцию	Кол-во акций
1 предложение	27	x
2 предложение	$27+27/3=36$	$x+1/5 x = 15\ 000 \Rightarrow x=12\ 500$
3 предложение	$36+36/3=48$	$15\ 000 + 15\ 000/5 = 18\ 000$
Всего куплено		$12\ 500+15\ 000+18\ 000=45\ 500$

Ответ: 48, 45 500

В январе 2000 года ставка по депозитам в банке «Возрождение» составляла  $x\%$  годовых, тогда как в январе 2001 года -  $y\%$  годовых, причем известно, что  $x + y = 30\%$ . В январе 2000 года вкладчик открыл счет в банке «Возрождение», положив на него некоторую сумму. В январе 2001 года, по прошествии года с того момента, вкладчик снял со счета пятую часть этой суммы. Укажите значение  $x$  при котором сумма на счету вкладчика в январе 2002 года станет максимально возможной.

Вклад	S
Через год	$(1+x)S - 1/5 S = (0,8+x)S$
Через 2 года	$(0,8+x)S(1+0,3-x) = (0,8+x)(1,3-x)S$

$$f(x) = (0,8+x)(1,3-x) = -x^2 + 0,5x + 1,04$$

Ответ: 25 %

Вкладчик внёс некоторую сумму в сбербанк под определённый процент годовых. Через год он взял половину получившейся суммы и переложил её в коммерческий банк, процент годовых которого в 32 раза выше, чем в сбербанке. Ещё через год сумма вкладчика в коммерческом банке превысила вложенную туда первоначальную сумму на 4%. Каков процент годовых в сбербанке?

Решение.

$$4 : 32 = 1 : 8 = 0,125$$

Ответ: 0,125%

В банк помещена сумма 3900 тысяч рублей под 50% годовых. В конце каждого из первых четырех лет хранения после вычисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу пятого года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 725%. Какую сумму вкладчик ежегодно добавлял к вкладу?

	через год	через два	через три	через четыре	через пять
3900	$1,5 \cdot 3900$	$1,5^2 \cdot 3900$	$1,5^3 \cdot 3900$	$1,5^4 \cdot 3900$	$1,5^5 \cdot 3900$
	$x$	$1,5 \cdot x$	$1,5^2 \cdot x$	$1,5^3 \cdot x$	$1,5^4 \cdot x$
		$x$	$1,5 \cdot x$	$1,5^2 \cdot x$	$1,5^3 \cdot x$
			$x$	$1,5 \cdot x$	$1,5^2 \cdot x$
				$x$	$1,5 \cdot x$

$$\begin{aligned}
 x(1,5 + 1,5^2 + 1,5^3 + 1,5^4) &= \\
 &= 3x \cdot (1,5^4 - 1) = \frac{3x(3^4 - 2^4)}{2^4} = \frac{3x \cdot 65}{2^4}
 \end{aligned}$$

$$3900 \cdot 1,5^5 + \frac{3x \cdot 65}{2^4} = 3900 \cdot 8,25$$

$$x = 210$$

Фермер получил кредит в банке под определённый процент годовых. Через год фермер в счёт погашения кредита вернул в банк  $\frac{3}{4}$  от всей суммы, которую он был должен банку к этому времени, а ещё через год в счёт полного погашения кредита он внёс в банк сумму, на 21% превышающую величину полученного кредита. Каков процент годовых по кредиту в данном банке?

Решение.

Взял	4
Через год	$4a - \frac{3}{4} \cdot 4a = a$
Через 2 года	$a^2 = 1,21 \cdot 4$

$$a = 2,2$$

$$220\% - 100\% = 120\%$$

Ответ: 120%

Банк под определенный процент принял некоторую сумму. Через год четверть накопленной суммы была снята со счета. Но банк увеличил процент годовых на 40%. К концу следующего года накоплена сумма в 1,44 раза превысила первоначальный вклад. Каков процент новых годовых?

Вклад	S
Через год	$(1+p)S - \frac{1}{4}(1+p)S = 0,75(1+p)S$
Через 2 года	$0,75(1+p)(1+p+0,4)S = 0,75(1+p)(1,4+p)S = 1,44 S$

$$p = 0,2$$

$$0,2 + 0,4 = 0,6$$

Ответ: 60%

В начале года  $\frac{5}{6}$  некоторой суммы денег вложили в банк А, а остальное – в банк Б. Если вклад находится в банке с начала года, то к концу года он возрастает на определенный процент, величина которого зависит от банка. Известно, что к концу первого года сумма вкладов стала равна 670 у.е., к концу следующего – 749 у.е. Если первоначально  $\frac{5}{6}$  суммы было бы вложено в банк Б, а оставшуюся вложили бы в банк А, то по истечении одного года сумма выросла бы до 710 у.е. Определите сумму вкладов по истечении второго года в этом случае.

А	Б
$5a$	$a$
$5ka$	$pa$
$5k^2a$	$p^2a$

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>всего</i>
$5a$	$a$	
$5ka$	$+ pa$	$= 670$
$5k^2a$	$+ p^2a$	$= 749$

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>всего</i>
$a$	$5a$	
$ka$	$+ 5pa$	$= 710$
$k^2a$	$+ 5p^2a$	$= ?$

$p = 1,2, k = 1,1, a=100$

Ответ: 841

**В конце августа 2001 года администрация Приморского края располагала некой суммой денег, которую предполагалось направить на пополнение нефтяных запасов края. Надеясь на изменение конъюнктуры рынка, руководство края, отсрочив закупку нефти, положила эту сумму 1 сентября 2001 года в банк. Далее известно, что сумма вклада в банке увеличивалась первого числа каждого месяца на 26% по отношению к сумме на первое число предыдущего месяца, а цена баррели сырой нефти убывала на 10% ежемесячно. На сколько процентов больше (от первоначального объема закупок) руководство края смогло пополнить нефтяные запасы края, сняв 1 ноября 2001 года всю сумму, полученную из банка вместе с процентами, и направив ее на закупку нефти?**

8 марта Леня Голубков взял в банке 53 680 рублей в кредит на 4 года под 20% годовых, чтобы купить своей жене Рите новую шубу. Схема выплаты кредита следующая: утром 8 марта следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20%), а вечером того же дня Леня переводит в банк определенную сумму ежегодного платежа (все четыре года эта сумма одинакова). Какую сумму сверх взятых 53 680 рублей должен будет выплатить банку Леня Голубков за эти четыре года?

**Молодой семье на покупку квартиры банк выдает кредит под 20% годовых. Схема выплаты кредита следующая: ровно через год после выдачи кредита банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20%), затем эта семья в течение следующего года переводит в банк определенную (фиксированную) сумму ежегодного платежа. Семья Ивановых планирует погашать кредит равными платежами в течение 4 лет. Какую сумму может предоставить им банк, если ежегодно Ивановы имеют возможность выплачивать по кредиту 810 000 рублей?**

**В родном городе Аристарха Луков-Арбалетова количество людей, пользующихся железной дорогой, постоянно. Из этих людей свой проезд оплачивают 10%, а ещё 10% выплатой штрафов за безбилетный проезд доводят получаемую РЖД (руководством железной дороги) прибыль до 100% от ожидаемой. Поскупившись платить контролёрам, взимавшим штрафы, РЖД ограничило вход на все станции турникетами, стоимость установки которых составила 100% от годовой прибыли. Цена проезда выросла на 50%, поскольку РЖД планировало окупить турникеты за 2 года, а контролёры были уволены. Однако 10% пассажиров возмутились проявленным со стороны РЖД недоверием и повышением цен на билеты и перестали пользоваться железной дорогой. Остальные 90% пассажиров продолжили ездить, и в первый месяц все они оплачивали свой проезд. На второй месяц в кассы РЖД не попали деньги ещё 10% от первоначального числа клиентов, так как их физическая подготовка оказалась достаточной для беспрепятственного преодоления турникетов. А в связи с появлением дырок в заборах около станций с каждым последующим месяцем этот процент стал увеличиваться на 2 и рос бы до тех пор, пока все бывшие зайцы не нашли бы способ ездить в обход турникетов. Поэтому каждые полгода с момента установки турникетов РЖД тратит 15% ожидаемой месячной прибыли на ремонт заборов, из-за чего процент зайцев вновь возвращается к 10 от первоначального числа всех пользователей железной дороги, и затем ситуация с двухпроцентным приростом зайцев повторяется. За какой срок окупится и окупится ли установка турникетов, если срок их работы - 10 лет, а контролёров РЖД так и не наймёт?**

**Курс доллара в течение двух месяцев увеличился на одно и то же число процентов ежемесячно, но не более, чем в 1,5 раза. За сумму, вырученную от продажи**

**в начале первого месяца одного доллара, к концу второго месяца можно было купить на 9 центов меньше, чем в конце первого месяца. На сколько процентов уменьшился курс рубля за два месяца?**

По прогнозу экспертов, цены на квартиры в Москве через год упадут: в рублях на 20%, в евро на 40%. А в Сочи цены в рублях упадут на 10%. На сколько процентов упадут цены в Сочи в евро?

Решение.

$$x \text{ рублей} = y \text{ евро}$$

$$0,8x \text{ рублей} = 0,6y \text{ евро}$$

Иначе говоря, в будущем соотношение между рублём и евро такое:

$$0,8x = 0,6y \Leftrightarrow 4x = 3y \Leftrightarrow x = 0,75y$$

$$0,9x = 0,9 \cdot 0,75y \Leftrightarrow 0,9x = 0,675y$$

$$y - 0,675y = 0,325y$$

Это значит, что цена в евро уменьшится на 32,5%.

Ответ: на 32,5%

**Семья Ивановых ежемесячно вносит плату за коммунальные услуги, телефон и электричество. Если бы коммунальные услуги подорожали на 50%, то общая сумма платежа увеличилась бы на 35%. Если бы электричество подорожало на 50%, то общая сумма платежа увеличилась бы на 10%. Какой процент от общей суммы платежа приходится на телефон?**

Решение.

- 1) "Если бы комм. услуги подорожали на 50%, то платёж увеличился бы на 35%".

Это означает, что 50% стоимости комм. услуг составляют 35% всего платежа.

А это значит, что 100% стоимости комм. услуг составляют 70% всего платежа.

- 2) "Если бы электричество подорожало на 50%, то платеж увеличился бы на 10%".

Это означает, что 50% стоимости электричества составляют 10% всего платежа.

А это значит, что 100% стоимости электричества составляют 20% всего платежа.

Итак, коммунальные услуги составляют 70%, а электричество 20%.

На телефон, таким образом, приходится оставшиеся 10% суммы.

Ответ: 10%

Алексей взял кредит в банке на срок 12 месяцев. По договору Алексей должен вернуть кредит ежемесячными платежами. В конце каждого месяца к оставшейся сумме долга добавляется  $r\%$  этой суммы и своим ежемесячным платежом Алексей погашает эти добавленные проценты и уменьшает сумму долга. Ежемесячные платежи подбираются так, чтобы долг уменьшался на одну и ту же величину каждый месяц (на практике такая схема называется «схемой с дифференцированными платежами»). Известно, что общая сумма, выплаченная Алексеем банку за весь срок кредитования, оказалась на  $13\%$  больше, чем сумма, взятая им в кредит. Найдите  $r$ .