Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ижевский государственный технический университет
имени М. Т. Калашникова»

Кафедра «АСОИУ»

Курс «Модели и методы анализа проектных решений»

Тема «**Постановка задач линейного программирования и исследование их структуры**»

Автор Исенбаева Е.Н., старший преподаватель

Ижевск
2014

Задача решаемая методами исследования операций:

максимизировать $f(x_1,..,x_n)$

при ограничениях

$$
\begin{aligned}
g_1(x_1, \ldots, x_n) &\le b_1;\\
g_2(x_1, \ldots, x_n) &\le b_2;\\
&\ldots\\
g_m(x_1, \ldots, x_n) &\le b_m.
\end{aligned}
$$

где $f(x_1,..,x_n)$ - целевая функция или эффективность системы (например, доход от производства каких-то изделий, стоимость перевозок и пр.);

$x=\{x_1,..x_n\}$ - варьируемые параметры;

$g_1(x), \ldots, g_m(x)$ - функции, которые задают ограничения на имеющиеся ресурсы

Среди известных разделов математического программирования наиболее развитым и законченным является ***линейное программирование (ЛП).***

ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

- **Определение оптимального ассортимента.**

Имеются $\boldsymbol{p}$ видов ресурсов в количествах $\boldsymbol{a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_p}$ и $\boldsymbol{q}$ видов изделий. Задана матрица $A=\|a_{ik}\|$, где a_{ik} - характеризует нормы расхода $\boldsymbol{i}$-го ресурса на единицу $\boldsymbol{k}$-го изделия ($\boldsymbol{k = 1, 2, \ldots, q}$).

Эффективность выпуска единицы $\boldsymbol{k}$-го изделия характеризуется показателем $\boldsymbol{c_k}$, удовлетворяющим условию линейности. Количество единиц $\boldsymbol{k}$-го изделия, выпускаемых предприятием, обозначим $\boldsymbol{x_k}$.

Определить план выпуска изделий (оптимальный ассортимент), при котором суммарный показатель эффективности принимает наибольшее значение.

ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Математическая модель задачи определения оптимального ассортимента:

максимизировать $\sum_{k} c_k x_k$ (1)

при ограничении $\sum_{k} a_{ik} \le a_i$, *i=1, 2, ..., p.* (2)

ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

- **Оптимальное распределение взаимозаменяемых ресурсов.**

Имеются $\boldsymbol{m}$ видов взаимозаменяемых ресурсов $\boldsymbol{a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_m}$, используемых при выполнении $\boldsymbol{n}$ различных работ в объеме $\boldsymbol{b_1, b_2, \ldots, b_n}$.

Заданы числа , указывающие, сколько единиц $\boldsymbol{j}$-й работы можно получить из единицы $\boldsymbol{i}$-го ресурса, а также $\boldsymbol{c_{ij}}$ – затраты при изготовлении единицы $\boldsymbol{j}$-го продукта из $\boldsymbol{i}$-го ресурса.

Требуется распределить ресурсы по работам таким образом, чтобы суммарная эффективность была наибольшей (или суммарные затраты - наименьшими).

ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Данная задача называется ***общей распределительной задачей***.

Количество единиц ***i***-го ресурса, которое выделено для выполнения работ ***j***-го вида, обозначим $\boldsymbol{x_{ij}}$.

Математическая модель задачи оптимального распределения взаимозаменяемых ресурсов :

минимизировать $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ (3)

при ограничениях $\sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij}x_{ij} \ge b_i$, j=1, 2, …, n; (4)

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$, i=1, 2, …, m. (5)

ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

- **Задача о смесях**

Имеется $\boldsymbol{p}$ компонентов $\boldsymbol{i=1, 2, \ldots, p}$, при сочетании которых в разных пропорциях получают различные смеси.

В каждый компонент, а следовательно, и в смесь входит $\boldsymbol{q}$ веществ. Количество $\boldsymbol{k}$-го вещества $\boldsymbol{k=1, 2, \ldots, q}$, входящее в состав единицы $\boldsymbol{i}$-го компонента и в состав единицы смеси, обозначим соответственно $\boldsymbol{a_{ik}}$ и $\boldsymbol{a_k}$.

ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Полагают, что a_k зависит от a_{ik} линейно, т. е. если смесь состоит из x_1 единиц первого компонента и x_2 – единиц второго компонента и т. д., то

$$a_k = \sum_i a_{ik} x_i \,.$$

Необходимо определить состав смеси, при котором суммарная характеристика (цена, масса или калорийность) окажется наилучшей.

Математическая модель задачи о смесях:

минимизировать $\sum_{i=1}^{p} c_i x_i$ (6)

при условии $\sum_{i=1}^{p} a_{ik} x_i \geq b_k$, $k=1, 2, \ldots, q$. (7)

ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

- **Задача о раскрое материалов.**

На раскрой поступает ***m*** различных материалов. Требуется изготовить из них ***k*** разных комплектующих изделий в количествах, пропорциональных b_1, b_2, …, b_k (условие комплектности).

Пусть каждая единица ***j***-го материала, $j=1, 2, \ldots, m$, может быть раскроена ***n*** различными способами, так что при использовании ***i***-го способа раскроя, $i=1, 2, \ldots, n$, получится a^k_{ij} единиц ***k***-го изделия.

Определить план раскроя, обеспечивающий максимальное количество комплектов, если известно, что объем запаса ***j***-го материала равен a_j единиц.

ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Количество единиц ***j***-го материала, раскраиваемых ***i***-м способом, обозначим $\boldsymbol{x_{ij}}$, а количество изготавливаемых комплектов изделий – $\boldsymbol{x}$.

Математическая модель задачи о раскрое материала:

максимизировать x

при условиях $$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \le a_j; \qquad (8)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} a_{ij}^{(k)} = b_k x. \qquad (9)$$

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

максимизировать $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ (10)

при условиях

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\le b_2; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\le b_m \end{aligned} \quad (11)$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad \ldots, \quad x_n \ge 0. \quad (12)$$

Ограничения (12) - ***условия неотрицательности.***
В данном случае все условия имеют вид неравенств.

ФОРМЫ ЗАДАНИЯ УСЛОВИЙ

- ***Смешанная форма*** - неравенства и равенства:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m;\\
&a_{m+1,1}x_1 + a_{m+1,2}x_2 + \ldots + a_{m+1,n}x_n = b_{m+1};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k.
\end{aligned} \qquad (13)$$

- ***Каноническая форма***– строгие неравенства

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1;\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2;\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned} \qquad (14)$$

- ***Матричная***

максимизировать $\mathbf{c^T x}$ (15)

при условии $\mathbf{Ax \leq b;}$

$\mathbf{x \geq 0,}$ (16)

*Допустимым множеством решений задачи (10)-(12) называется множество R(**x**) всех векторов **x**, удовлетворяющих условиям (11) и (12).*

ДОПУСТИМОЕ МНОЖЕСТВО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Множество ***R(x)*** представляет собой выпуклое многогранное множество или выпуклый многогранник.

Решение $\boldsymbol{x_0}$ называется ***оптимальным***, если для него выполняется условие $\boldsymbol{c^T x_0 \geq c^T x}$, для всех $\boldsymbol{x \in R(x)}$.

Поскольку ***min f(x)*** эквивалентен ***max [-f(x)]***, то задачу ЛП всегда можно свести к эквивалентной задаче максимизации.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ