Линейное программирование

Примеры задач линейного программирования

Задача о распределении ресурсов

Для изготовления двух видов продукции *A* и *B* используют три вида ресурсов:

Ресурсы	Затраты ресурсов		Запасы ресурсов
	изделие *A*	изделие *B*	
1	3	3	15
2	2	6	18
3	4	0	16
Доход	2	3	max

Задача о распределении ресурсов

Изучение рынка сбыта показало, что объем выпуска изделий *А* не должен превышать объема изделий *В* более, чем на три единицы

Необходимо составить такой план производства продукции, при котором выручка от ее реализации будет максимальной

Задача о распределении ресурсов

Решение

Введем переменные

x_1 – число единиц продукции *A*, запланированных к производству

x_2 – число единиц продукции *B*, запланированных к производству

Выручка: $$F = 2x_1 + 3x_2$$

Цель: $$F \to \max$$

Задача о распределении ресурсов

Решение

Ограничения

Ресурсы	Затраты ресурсов		Запасы ресурсов
	изделие *A*	изделие *B*	
1	3	3	15
2	2	6	18
3	4	0	16
Доход	2	3	max

1) Условие неотрицательности: $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

2) На запас сырья 1: $3x_1 + 3x_2 \leq 15$

3) На запас сырья 2: $2x_1 + 6x_2 \leq 18$

4) На запас сырья 3: $4x_1 \leq 16$

5) Соотношение между 1 и 2: $x_1 - x_2 \leq 3$

Задача о распределении ресурсов

Математическая модель

$$\begin{cases} f(x) = 2x_1 + 3x_2 \to max \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 15, \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 18, \\ 4x_1 \leq 16, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача о рационе (о диете)

В дневной рацион питания цыплят включают два продукта П1 и П2. Причем продукта П1 должно войти в дневной рацион не более 200 ед. Стоимость 1 ед. продукта П1 составляет 2 ден. ед., а продукта П2 – 4 ден. ед.

Питательное вещество	Минимальная норма потребления, ед/день	Содержание питательных веществ в 1 ед. продукта	
		П1	П2
А	120	0,2	0,2
В	160	0,4	0,2

Определить оптимальный рацион питания, стоимость которого будет наименьшей

Задача о рационе (о диете)

Решение

Введем переменные

x_1 – число единиц продукта П1, входящего в дневной рацион

x_2 – число единиц продукта П2, входящего в дневной рацион

Стоимость дневного рациона :

$$F = 2x_1 + 4x_2$$

Цель: $F \to \min$

Задача о рационе (о диете)

Питательное вещество	Минимальная норма потребления, ед/день	Содержание питательных веществ в 1 ед. продукта	
		П1	П2
A	120	0,2	0,2
B	160	0,4	0,2

Решение

Ограничения

1) Условие неотрицательности:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

2) Ограничение на максимальное содержание продукта П1: $x_1 \leq 200$

3) Ограничения на минимальное содержание питательных веществ:

$$0,2x_1 + 0,2x_2 \geq 120 \quad 0,4x_1 + 0,2x_2 \geq 160$$

Задача о рационе (о диете)

Математическая модель

Найти рацион питания $X = (x_1; x_2)$, удовлетворяющий системе ограничений:

$$\begin{cases} x_1 \le 200, \\ 0{,}2x_1 + 0{,}2x_2 \ge 120, \\ 0{,}4x_1 + 0{,}2x_2 \ge 160, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

при котором целевая функция $F = 2x_1 + 4x_2 \to min$ (принимает минимальное значение)

Основные понятия

Терминология

Термин **линейное программирование**

линейное означает: ищется экстремальное значение (min или max) **линейной** целевой функции при **линейных** ограничениях (линейных уравнениях или неравенствах)

Линейное программирование (ЛП) — это метод оптимизации моделей, в которых целевые функции и ограничения линейны

Общая задача линейного программирования

Задача линейного программирования в общем виде (ЗЛП) – это задача о нахождении экстремума линейной функции на множестве, заданном линейными уравнениями и неравенствами

Допустимый план – любой элемент допустимого множества

Оптимальный план – допустимый план, являющийся решением ЗЛП

Каноническая задача линейного программирования

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = \overline{1,m}$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = \overline{1,n}$$

Каноническая задача линейного программирования

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = \overline{1,m}$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = \overline{1,n}$$

В канонической задаче ЛП (КЗЛП):

1) находится максимум целевой функции
2) все ограничения имеют вид уравнений
3) все переменные неотрицательны

Сведение общей ЗЛП к канонической

В канонической задаче:
1) целевая функция → max
2) все ограничения - уравнения
3) все переменные неотрицательны

Целевая функция F → min

Решение. Переходим к **(-F) → max** (переходим к противоположной функции)

Сведение общей ЗЛП к канонической

В канонической задаче:

1) целевая функция → max
2) все ограничения - уравнения
3) все переменные неотрицательны

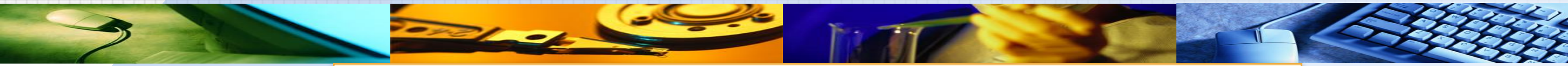
В ограничениях есть неравенство

$$a_1x_1+a_2x_2 \geq b$$

Решение. Вводим новую переменную $x_3 \geq 0$:

$$a_1x_1+a_2x_2 - x_3 = b$$

Сведение общей ЗЛП к канонической



В канонической задаче:
1) целевая функция → max
2) все ограничения - уравнения
3) все переменные неотрицательны

Есть не положительные переменные

Решение. $x_i \le 0 \Rightarrow \; t_i = -x_i \ge 0$

$$\text{не известен знак } x_i \Rightarrow$$

$$\text{вводим } x_k \ge 0, x_l \ge 0 : x_i = x_k - x_l$$

Сведение общей ЗЛП к канонической

В канонической задаче:

1) целевая функция → max
2) все ограничения - уравнения
3) все переменные неотрицательны

Вывод

Каждую задачу линейного программирования **можно привести к канонической форме**

Теоретическое обоснование

Теорема

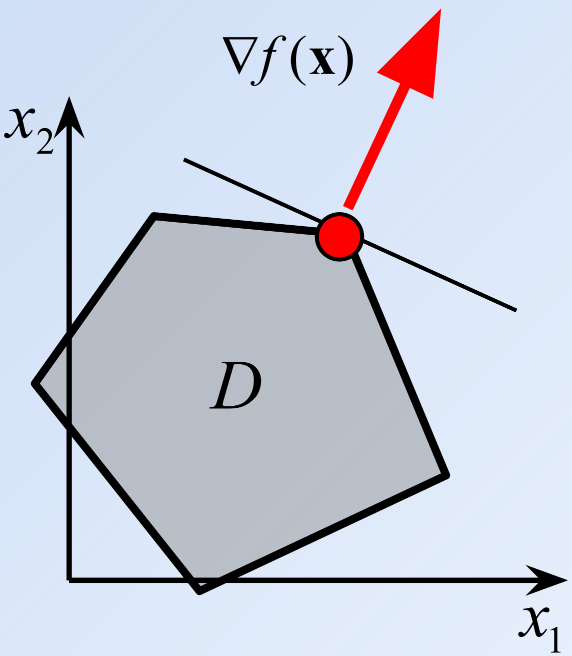
Если целевая функция принимает максимальное значение в некоторой точке допустимого множества, то она принимает это значение и некоторой вершине этого множества

Вывод

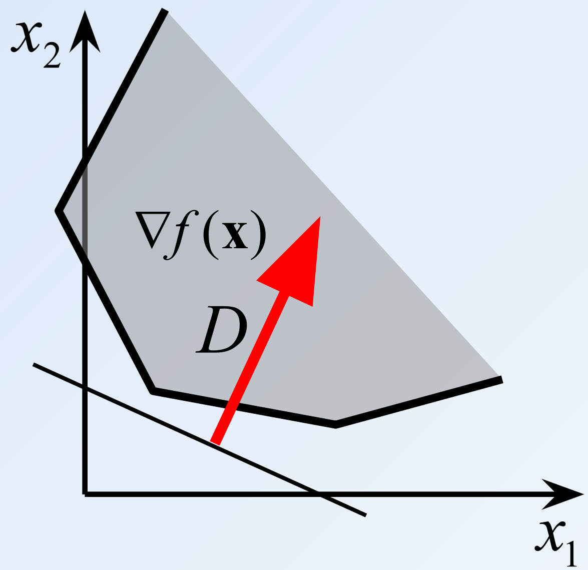
Оптимальное решение следует искать в вершинах допустимого множества

Варианты решения ЗЛП $F \to \max$

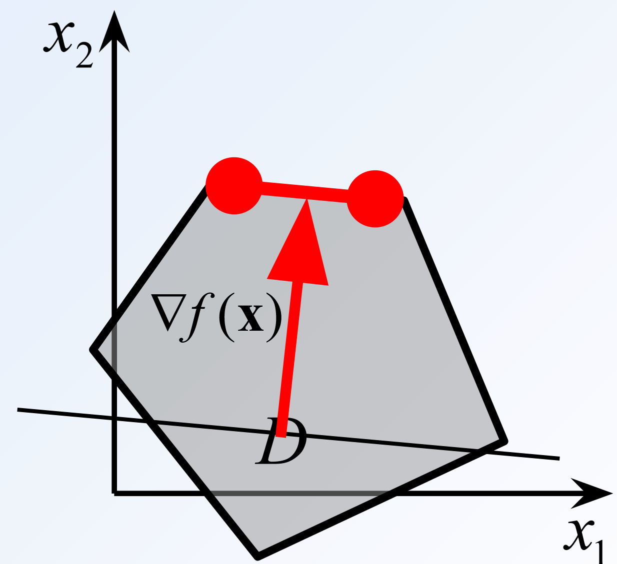
Решение достигается в вершине



Целевая функция не ограничена



Бесконечное множество решений

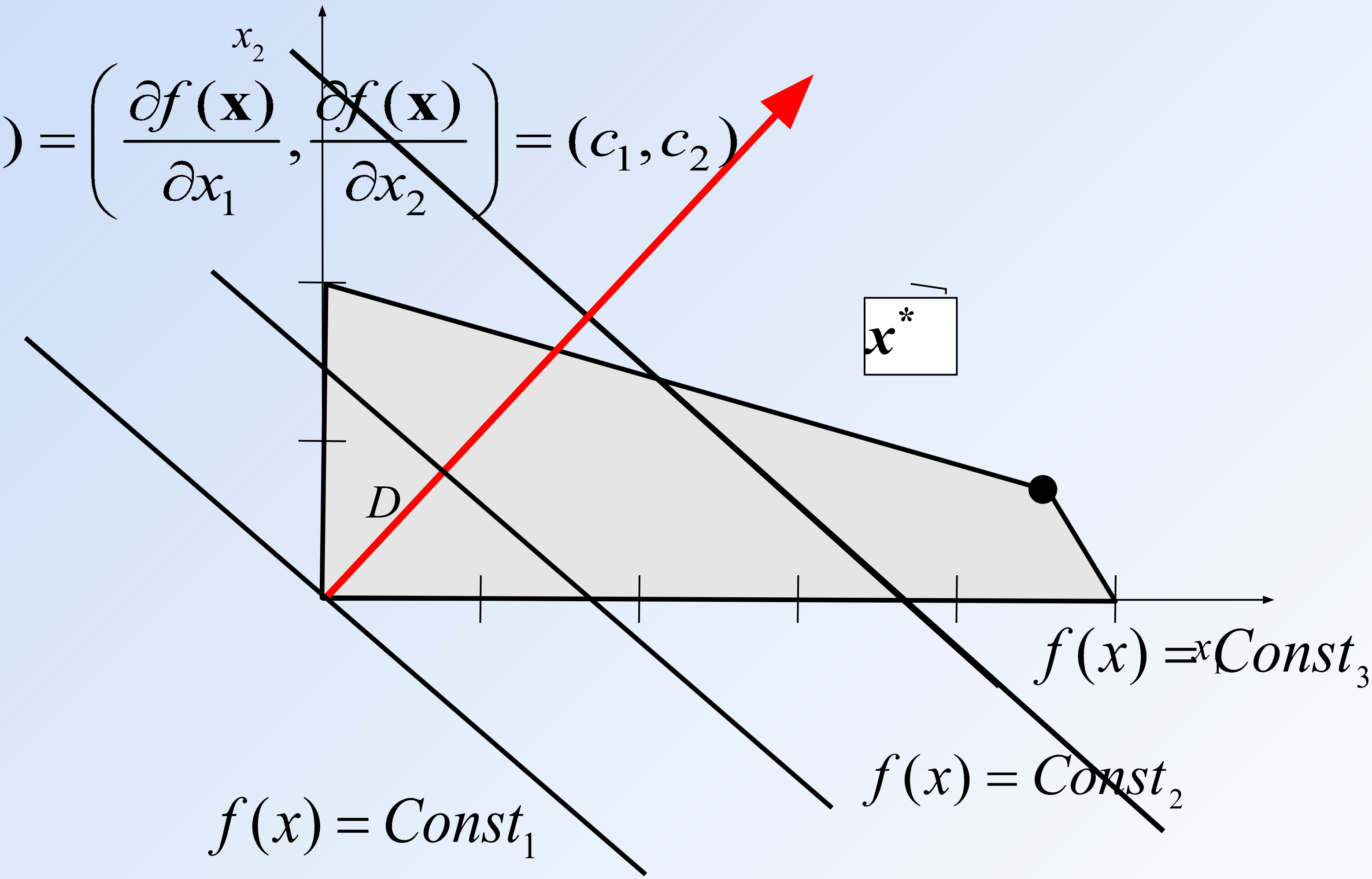


Графический метод решения

Графическое решение

$$f(\mathbf{x}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max$$

$$f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} \right) = (c_1, c_2)$$



Графическое решение

Алгоритм решения

Построить на плоскости допустимое множество

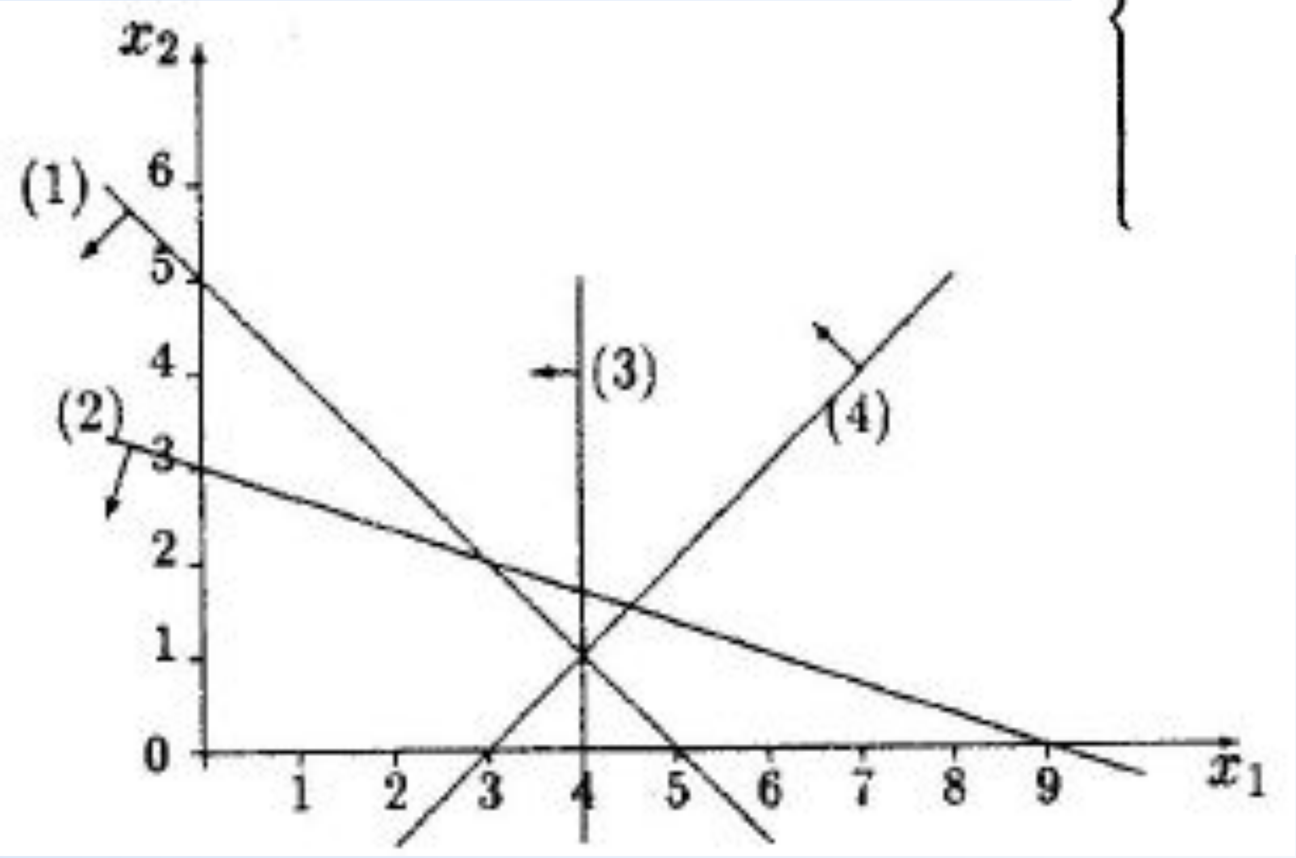
Найти градиент целевой функции

Построить прямую – линию уровня целевой функции

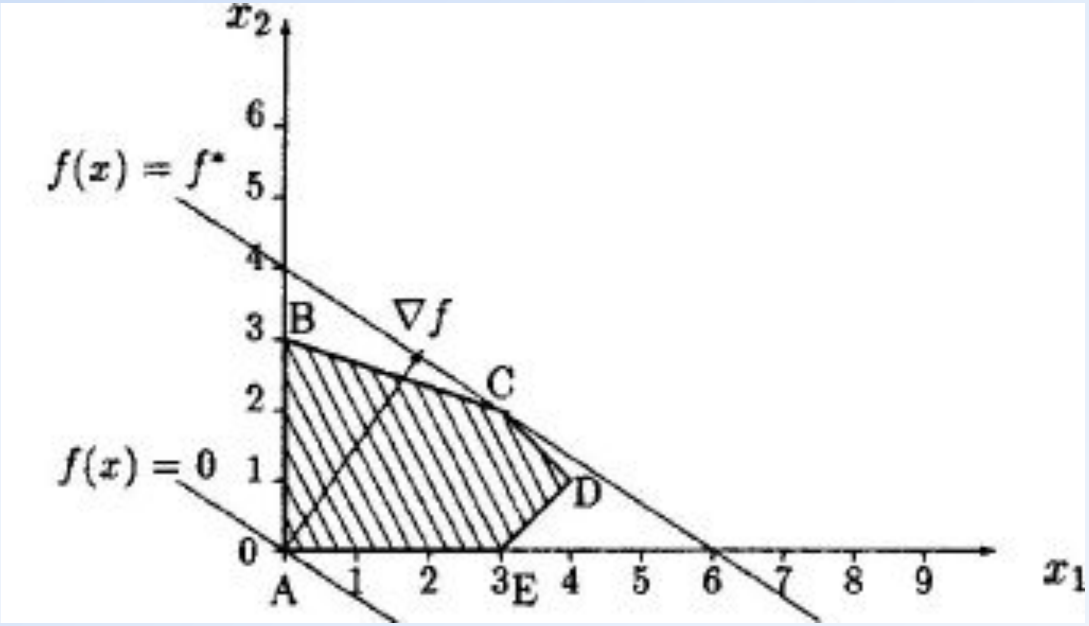
Найти оптимальный план x^*

Задача о распределении ресурсов

$$\begin{cases} f(x) = 2x_1 + 3x_2 \to max \\ 3x_1 + 3x_2 \le 15, \\ 2x_1 + 6x_2 \le 18, \\ 4x_1 \le 16, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$



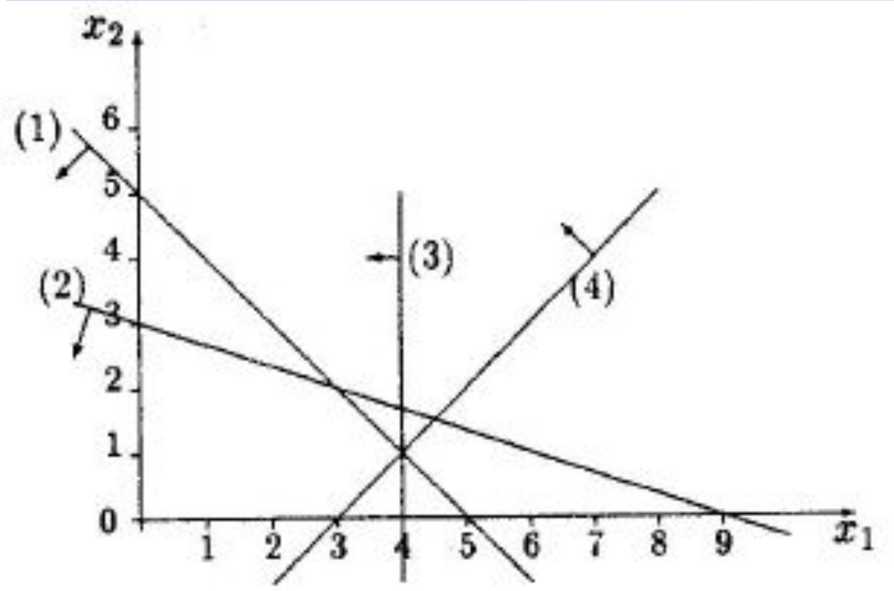
Задача о распределении ресурсов



С – оптимальный план

Задача о распределении ресурсов

Нахождение С



Координаты С – из системы:

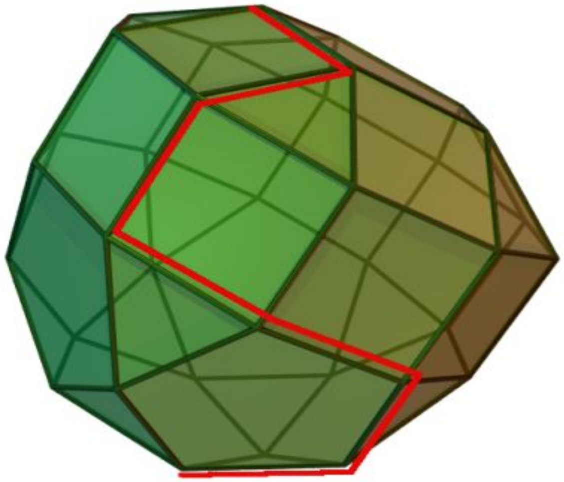
$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = 15, \\ 2x_1 + 6x_2 = 18. \end{cases}$$

Ответ: С(3;2)

Оптимальный план $x_1^* = 3,\ x_2^* = 2$

Оптимальное значение $f\left(x^*\right) = 2\cdot 3 + 3\cdot 2 = 12$

Симплекс-метод



Симплекс — n-мерный многогранник

Основные теоретические сведения

Система линейных уравнений – **система с базисом**, если в каждом уравнении есть базисная переменная

Базисная переменная уравнения: входит в уравнение с коэффициентом +1 и отсутствует в остальных уравнениях системы

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ x_2 - 4x_3 + x_5 = 3 \end{cases}$$

Остальные переменные свободные

Специальная задача ЛП – каноническая задача ЛП, в которой:

- *все правые части уравнений неотрицательны;*
- *система уравнений – система с базисом;*
- *в целевой функции нет базисных переменных*

$$\begin{cases} f = x_3 - x_4 \to \max \\ x_1 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ x_2 - 4x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Основные теоретические сведения

Базисное решение — решение системы, соответствующее нулевым значениям свободных переменных.

$$(1;3;0;0) \Leftarrow \begin{cases} x_1 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ x_2 - 4x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

Опорный план — базисное решение, удовлетворяющее условию неотрицательности.

Опорный план (решение) — вершина допустимого множества.

Основная теорема ЛП

Если каноническая задача линейного программирования разрешима, то её оптимальный план содержится среди конечного числа её опорных планов.

Симплекс-метод — метод перебора опорных решений.

Пример

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 150 \\ x_1 + 3x_2 \le 300 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

$$f = x_1 + 2x_2 \to \max$$

Каноническая форма задачи:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 150 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 300 \end{cases}$$

Она же – специальная!

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$$

$$f = x_1 + 2x_2 \to \max$$

Пример

Опорный план:

$$(0;0;150;300) \Leftarrow \begin{cases} x_3 = 150 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 300 - x_1 - 3x_2 \end{cases}$$

Значение целевой функции

$$f(0;0;150;300) = 0 \qquad \Leftarrow f = x_1 + 2x_2$$

План не оптимальный!

Увеличиваем x_2

$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 \leq 100$$ (второе уравнение!)

$$x_2 = 100 \Rightarrow f(0;100;50;0) = 200$$

Пример

Проверка оптимальности

Приведение задачи к специальному виду:

$$\begin{cases} x_2 = 100 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_4, \\ x_3 = 50 - \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4 \end{cases}$$

Выражение целевой функции через свободные переменные

$$f = x_1 + 2x_2 = 200 + \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_4$$

План не оптимальный!

Пример

Увеличиваем x_1 $\Leftarrow f = 200 + \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_4$

$$x_4 = 0 \Rightarrow x_1 \le 75 \qquad \Leftarrow \begin{cases} x_2 = 100 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_4, \\ x_3 = 50 - \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4 \end{cases}$$

Опорный план: $(75;75;0;0)$

Соответствует базисным переменным $x_1 x_2$

Значение целевой функции

$$f(75;75;0;0) = 225 \quad \Leftarrow f = x_1 + 2x_2$$

Пример

Проверка оптимальности

Приведение задачи к специальному виду:

$$\begin{cases} x_1 = 75 - \dfrac{3}{2}x_3 + \dfrac{1}{2}x_4, \\ x_2 = 75 + \dfrac{1}{2}x_3 - \dfrac{1}{2}x_4 \end{cases} \Rightarrow$$

Выражение целевой функции через свободные переменные

$$f = x_1 + 2x_2 = 225 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4$$

$$(75;75;0;0) - \textit{оптимальный план}$$

Пример

Табличная запись решения

I этап

$$\begin{cases} x_3 = 150 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 300 - x_1 - 3x_2 \end{cases}$$

$$f = x_1 + 2x_2$$

$$f(0;0;150;300) = 0$$

Базис	Свободные переменные		Свободные члены
	$-x_1$	$-x_2$	
x_3	1	1	150
x_4	1	3	300
f	-1	-2	0

1. Самое маленькое отрицательное число в последней строке

2. Самое маленькое отношение свободного члена к положительному числу в столбце

Пример

Табличная запись решения

II этап

$$\begin{cases} x_2 = 100 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_4, \\ x_3 = 50 - \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4 \end{cases}$$

$$f = 200 + \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_4$$

$$f(0;100;50;0) = 200$$

Базис	Свободные переменные		Свободные члены
	$-x_1$	$-x_4$	
x_2	1/3	1/3	100
x_3	2/3	–1/3	50
f	–1/3	2/3	200

1. Самое маленькое отрицательное число в последней строке

2. Самое маленькое отношение свободного члена к положительному числу в столбце

Пример

Табличная запись решения

III этап

$$\begin{cases} x_1 = 75 - \dfrac{3}{2}x_3 + \dfrac{1}{2}x_4, \\ x_2 = 75 + \dfrac{1}{2}x_3 - \dfrac{1}{2}x_4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f = 225 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4$$

$(75;75;0;0) - \textit{оптимальный план}$

Базис	Свободные переменные		Свободные члены
	$-x_3$	$-x_4$	
x_1	3/2	–1/2	75
x_2	–1/2	1/2	75
f	1/2	1/2	225

Нет отрицательных чисел!

Специальная задача ЛП

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_{11}(-x_1) + a_{12}(-x_2) + \ldots + a_{1n}(-x_n) + b_1, \\ x_{n+2} = a_{21}(-x_1) + a_{22}(-x_2) + \ldots + a_{2n}(-x_n) + b_2, \\ \ldots \\ x_{n+m} = a_{m1}(-x_1) + a_{m2}(-x_2) + \ldots + a_{mn}(-x_n) + b_m. \end{cases}$$

Базисные переменные

Свободные переменные

$$f = c + (-c_1)(-x_1) + (-c_2)(-x_2) + \ldots + (-c_n)(-x_n) \to \max$$

$$Все\ x_i \geq 0\ (i = 1, 2, \ldots\ , n+m)$$

$$Все\ b_j \geq 0\ (i = 1, 2, \ldots\ , m)$$

Симплексная таблица

Базисные переменные	Свободные переменные					Свободные члены
	$-x_1$	. . .	$-x_s$	. . .	$-x_n$	
x_{n+1}	a_{11}	. . .	a_{1s}	. . .	a_{1n}	b_1
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
x_{n+r}	a_{r1}	. . .	a_{rs}	. . .	a_{rn}	b_r
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
x_{n+m}	a_{m1}	. . .	a_{ms}	. . .	a_{mn}	b_m
f	$-c_1$	. . .	$-c_s$	. . .	$-c_n$	c

Опорное решение $(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n},b_1,b_2,\ldots,b_{n+m})$

Алгоритм симплекс-метода

Подготовительный этап

1. *Приведение к каноническому виду*
2. *Приведение к специальному виду*
3. *Составление симплексной таблицы*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 150 \\ x_1 + 3x_2 \le 300 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

$$f = x_1 + 2x_2 \to \max$$

Базис	Свободные переменные		Свободные члены
	$-x_1$	$-x_2$	
x_3	1	1	150
x_4	1	3	300
f	–1	–2	0

$$\begin{cases} x_3 = -x_1 - x_2 + 150, \\ x_4 = -x_1 - 3x_2 + 300 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$$

$$f = -(-x_1) - 2(-x_2) \to \max$$

Алгоритм симплекс-метода

Основной этап

1. Проверка оптимальности (все ли числа в последней строке неотрицательные)

2. Проверка на неразрешимость (есть ли столбец со всеми отрицательными числами)

Базис	Свободные переменные		Свободные члены
	$-x_1$	$-x_2$	
x_3	1	1	150
x_4	1	3	300
f	–1	–2	0

Базис	Свободные переменные		Свободные члены
	$-x_3$	$-x_4$	
x_1	3/2	–1/2	75
x_2	–1/2	1/2	75
f	1/2	1/2	225

Алгоритм симплекс-метода

Основной этап

3.Выбор ведущего столбца (по наименьшему отрицательному числу в последней строке)

4.Выбор ведущей строки (по наименьшему отношению свободных членов к положительным числам ведущего столбца)

Базис	Свободные переменные		Свободные члены
	$-x_1$	$-x_2$	
x_3	1	1	150
x_4	1	3	300
f	–1	–2	0

Ведущий элемент

Базис	Свободные переменные		Свободные члены
	$-x_1$	$-x_4$	
x_2	1/3	1/3	100
x_3	2/3	–1/3	50
f	–1/3	2/3	200

Ведущий элемент

Алгоритм симплекс-метода

Основной этап

5. Замена базисной переменной: переменная ведущего столбца становится базисной, ведущей строки — свободной

6. Преобразование ведущего элемента: вместо него записывается его обратная величина

Базис	Свободные переменные		Свободные члены
	$-x_1$	$-x_2$	
x_3	1	1	150
x_4	1	3	300
f	–1	–2	0

Базис	Свободные переменные		Свободные члены
	$-x_1$	$-x_4$	
x_3			
x_2		1/3	
f			

Алгоритм симплекс-метода

Основной этап

7. Преобразование ведущей строки: делим на ведущий элемент все остальные элементы

8. Преобразование ведущего столбца: делим на ведущий элемент со знаком минус все остальные элементы

Базис	Свободные переменные		Свободные члены
	$-x_1$	$-x_2$	
x_3	1	1	150
x_4	1	3	300
f	–1	–2	0

Базис	Свободные переменные		Свободные члены
	$-x_1$	$-x_4$	
x_3		$-1/3$	
x_2	1/3	1/3	100
f		2/3	

Алгоритм симплекс-метода

Основной этап

8. Преобразование остальных элементов таблицы по правилу прямоугольника

Исходный элемент a	Значение d в ведущем столбце и той же строке
Значение c в ведущей строке и в том же столбце	Ведущий элемент b

Новое значение $$a' = \frac{ab - cd}{b}$$

Алгоритм симплекс-метода

Основной этап

Базис	Свободные переменные		Свободные члены
	$-x_1$	$-x_2$	
x_3	1	1	150
x_4	1	3	300
f	–1	–2	0

Базис	Свободные переменные		Свободные члены
	$-x_1$	$-x_4$	
x_3		$-1/3$	
x_2	1/3	1/3	100
f		2/3	

1	1
1	3

$$\frac{1\cdot 3-1\cdot 1}{3}=\frac{2}{3}$$

1	150
3	300

$$\frac{150\cdot 3-300\cdot 1}{3}=50$$

1	3
–1	–2

$$\frac{(-1)\cdot 3-(-2)\cdot 1}{3}=-\frac{1}{3}$$

3	300
–2	0

$$\frac{0\cdot 3-(-2)\cdot 300}{3}=200$$

Базис	Свободные переменные		Свободные члены
	$-x_1$	$-x_4$	
x_3	2/3	–1/3	50
x_2	1/3	1/3	100
f	–1/3	2/3	200

Пример (распределении ресурсов)

Исходная модель

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 \le 15 \\ 2x_1 + 6x_2 \le 18 \\ 4x_1 \le 16, \\ x_1 - x_2 \le 3 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

$$f = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

Каноническая форма задачи:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 15 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_4 = 18, \\ 4x_1 + x_5 = 16, \\ x_1 - x_2 + x_6 = 3 \end{cases}$$

$$x_i \ge 0\ (i = 1, 2, \dots, 6)$$

$$f = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

Она же – специальная!

Пример (распределении ресурсов)

Симплекс-таблица

Базис	Свободные переменные		Свободные члены
	$-x_1$	$-x_2$	
x_3	3	3	15
x_4	2	6	18
x_5	4	0	16
x_6	1	–1	3
f	–2	–3	0

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 15 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_4 = 18, \\ 4x_1 + x_5 = 16, \\ x_1 - x_2 + x_6 = 3 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \ldots \ , 6)$$

$$f = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

Задача разрешима

План не оптимальный

Пример (распределении ресурсов)

Симплекс-таблица

Базис	Свободные переменные $-x_1$	Свободные переменные $-x_2$	Свободные члены
x_3	3	3	15
x_4	2	6	18
x_5	4	0	16
x_6	1	–1	3
f	–2	–3	0

Ведущий элемент

Преобразованная таблица

Базис	Свободные переменные $-x_1$	Свободные переменные $-x_4$	Свободные члены
x_3	2	–1/2	6
x_2	1/3	1/6	3
x_5	4	0	16
x_6	4/3	1/6	6
f	–1	1/2	9

План не оптимальный

Задача разрешима

Пример (распределении ресурсов)

Симплекс-таблица

Базис	Свободные переменные $-x_1$	Свободные переменные $-x_4$	Свободные члены
x_3	2	–1/2	6
x_2	1/3	1/6	3
x_5	4	0	16
x_6	4/3	1/6	6
f	–1	1/2	9

Преобразованная таблица

Базис	Свободные переменные $-x_3$	Свободные переменные $-x_4$	Свободные члены
x_1	1/2	–1/4	3
x_2	–1/6	1/4	2
x_5	–2	1	4
x_6	–2/3	1/2	2
f	1/2	1/4	12

Ведущий элемент

План оптимальный!

$$x_1^* = 3, \; x_2^* = 2$$

$$f(x^*) = 12$$