

АНАЛОГИЧНЫЕ СВЯЗИ МЕЖДУ ПРАВИЛЬНЫМИ МНОГОУГОЛЬНИКАМИ И МНОГОГРАННИКАМИ

Каманина А.В.

Пример

Задание: Можно ли вырезать квадрат со стороной 30 см из круга диаметром 40 см?

Решение. Наибольший квадрат, заключённый в круг, есть вписанный квадрат. В соответствии с вышеприведенной формулой его сторона равна:

$$20 \sqrt{2} \cong 20 \cdot 1.41 \cong 28 \text{ см.}$$

Следовательно, квадрат со стороной 30 см невозможно вырезать из круга диаметром 40 см.

Вопросы

1. Вычислить внутренний угол правильного 5-угольника.
2. Вычислить радиус окружности, вписанной в правильный четырёхугольник со стороной 4 см.
3. Чему равна сторона правильного 6-угольника, если радиус описанной около него окружности 2,5 см.

Ответы

$$1) \alpha = \frac{180^{\circ}(5-2)}{5} = 108^{\circ}$$

$$2) r = 2$$

$$3) R = 2,5 \text{ см.}$$

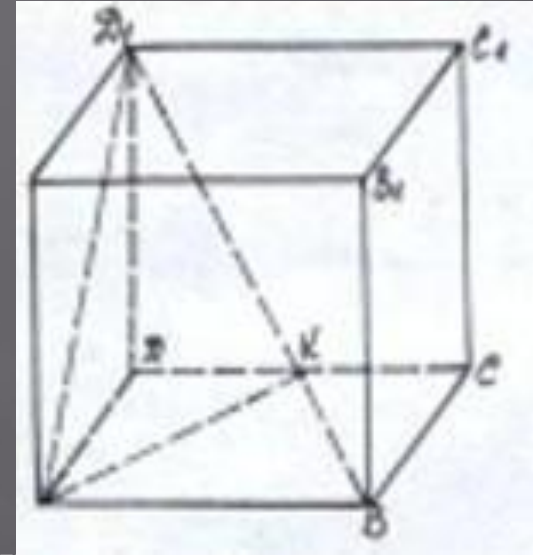
Пример

ЗАДАЧА

Ребро куба равно a .
Найти расстояние от
вершины куба до его
диагонали,
соединяющей две
другие вершины.

РЕШЕНИЕ

Пусть надо найти
расстояние от вершины
 A до диагонали BD_1 .
Проведем через прямые
 AB и BD_1 плоскость,
 ABD_1 . В этом треугольнике
проведем высоту AK , длина отрезка AK и
есть искомое расстояние.



Имеем: $S_{\triangle ABD_1} = \frac{1}{2} AB \cdot AD_1 = \frac{a^2 \sqrt{2}}{2}$
С другой стороны,

$$S_{\triangle ABD_1} = \frac{1}{2} BD_1 \cdot AK = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot AK$$

откуда находим:

$$AK = S_{\triangle ABD_1} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = a \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Историческая справка

Одно из древнейших упоминаний о правильных многогранниках находится в трактате Платона (427-347 до н. э.) "Тимаус". Поэтому правильные многогранники также называются платоновыми телами.



Платон

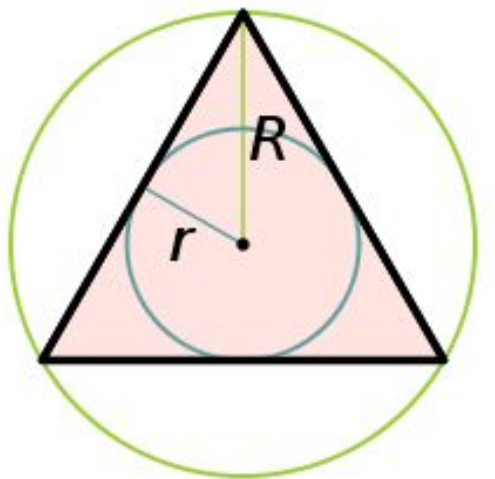
Платон считал, что мир строится из четырёх «стихий» - огня, земли, воздуха и воды, а атомы этих «стихий» имеют форму четырёх правильных многогранников. Тетраэдр олицетворял огонь, поскольку его вершина устремлена вверх, как у разгоревшегося пламени; икосаэдр - как самый обтекаемый - воду; куб - самая устойчивая из фигур - землю, а октаэдр - воздух. В наше время эту систему можно сравнить с четырьмя состояниями вещества - твёрдым, жидким, газообразным и пламенным. Пятый многогранник - додекаэдр символизировал весь мир и почитался главнейшим.

Правильные многоугольники

Правильный треугольник (равносторонний)-треугольник, у которого все стороны равны друг другу.
 a - сторона.

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6} \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$r + R = h$$



$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Правильные многогранники

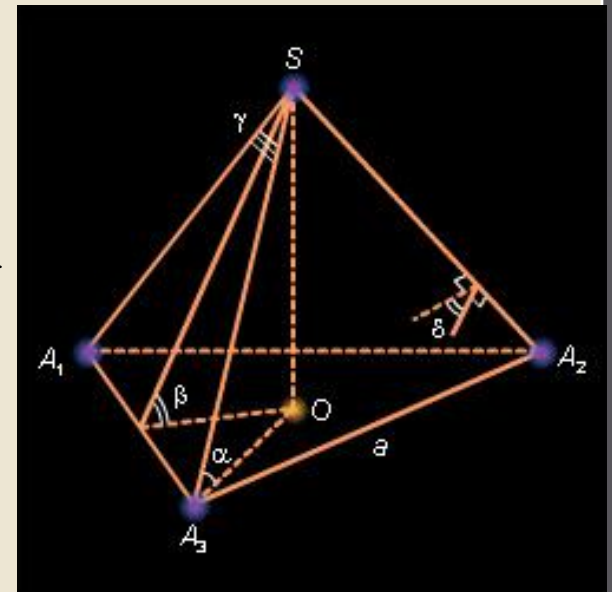
Правильный тетраэдр- тетраэдр, все грани которого –равные правильные треугольники и из каждой вершины которого выходит ровно три ребра.

$$r_c = \frac{a\sqrt{6}}{12} \quad R_c = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

$$r_c + R_c = H$$

$$H = a\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$S = a^2\sqrt{3}$$



Правильные многоугольники

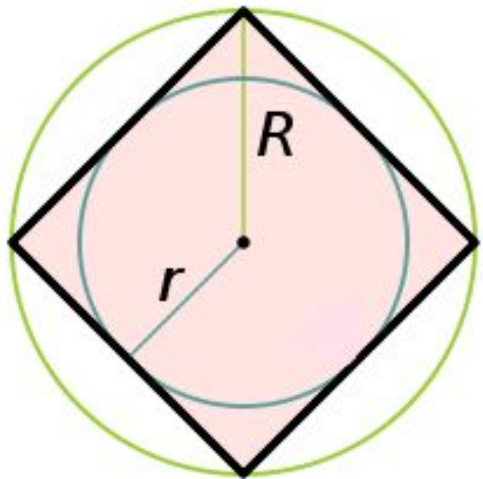
Квадрат- правильный четырехугольник или ромб, у которого все углы прямые, или параллелограмм, у которого все стороны и углы равны.

d - диагональ.

$$r = \frac{a}{2} \quad d = a\sqrt{2}$$

$$R = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$S = a^2$$



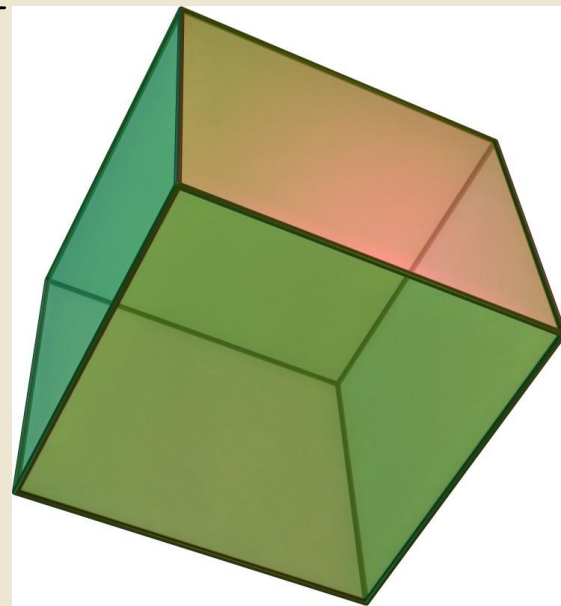
Правильные многогранники

Куб(гексаэдр)-правильный многогранник, все грани которого – равные квадраты, и из каждой вершины выходит три ребра.

$$r_c = \frac{a}{2} \quad D = a\sqrt{3}$$

$$R_c = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$S = 6a^2$$



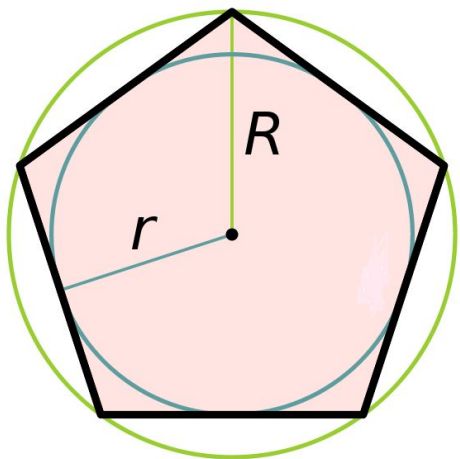
Правильные многоугольники

Правильный пятиугольник-
правильный многоугольник с
пятью сторонами.

$$r = \frac{a\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}}$$

$$R = \frac{a\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{10}}$$

$$S = \frac{a^2 \sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}$$



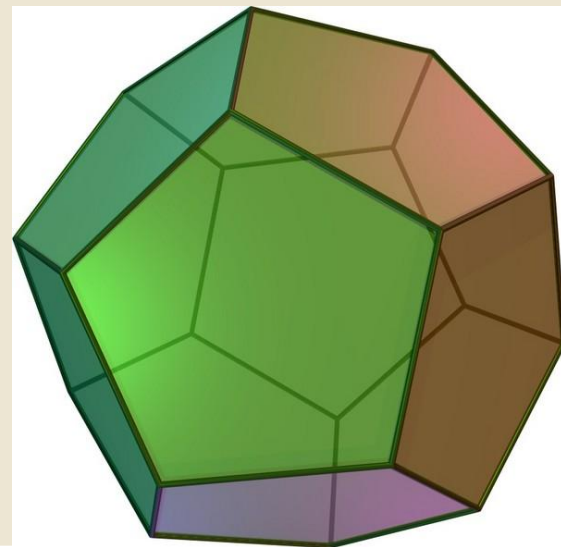
Правильные многогранники

Додекаэдр- правильный многогранник,
у которого все грани равные
правильные пятиугольники и из
каждой вершины выходит 3 ребра.

$$r_c = \frac{a\sqrt{250+110\sqrt{5}}}{20}$$

$$R_c = \frac{a\sqrt{3}\sqrt{1+\sqrt{5}}}{4}$$

$$S = 3a^2 \sqrt{25+10\sqrt{5}}$$

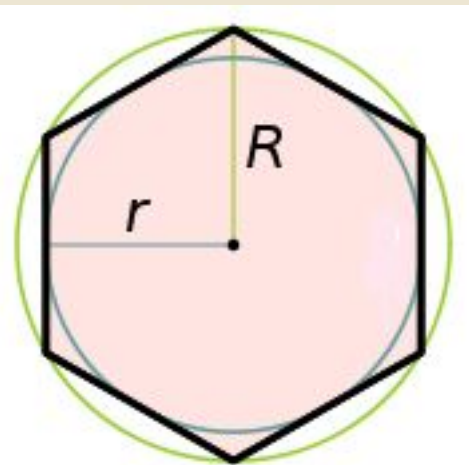


Правильные многоугольники

Правильный шестиугольник-
правильный многоугольник с
шестью сторонами.

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$R = a$$



$$S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

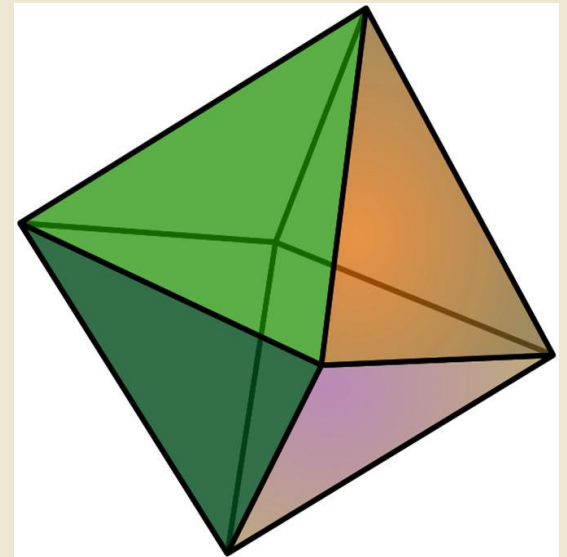
Правильные многогранники

Октаэдр-это правильный
многогранник, все грани которого –
равные правильные треугольники и к
каждой вершине прилегают четыре
грани.

$$r_c = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$R_c = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$S = 2a^2\sqrt{3}$$



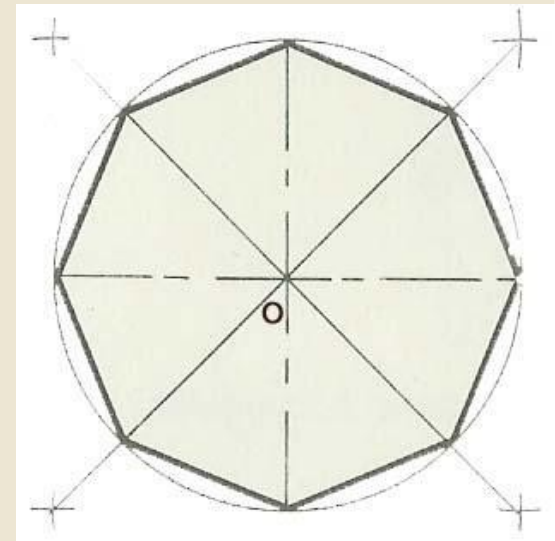
Правильные многоугольники

Правильный восьмиугольник- правильный многоугольник с восемью сторонами.

$$r = \frac{a(1 + \sqrt{2})}{2}$$

$$R = a\sqrt{1 + \sqrt{1/2}}$$

$$S = 2a^2(1 + \sqrt{2})$$



Правильные многогранники

Икосаэдр- правильный многогранник, у которого все грани – равные правильные треугольники, и из каждой вершины выходит 5 ребер.

$$r_c = \frac{a\sqrt{3}(3 + \sqrt{5})}{12}$$

$$R_c = \frac{a\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$S = 5a^2 \sqrt{3}$$



Другие свойства правильных многоугольников

Число сторон	3	4	5	6	8	10	12
Сумма углов	180°	360°	540°	720°	1080°	1440°	1800°
Величина одного угла	60°	90°	108°	120°	135°	144°	150°

Число сторон	R	r	S
n	$\frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$	$\frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}$	$\frac{n}{2} a^2 \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}$

Спасибо за внимание!