ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Преподаватель:

доцент кафедры ИСУ, к.т.н.

Бушуева Марина Евгеньевна

БИМАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

Предыдущие рассмотрения касались игр двух лиц, в которых интересы игроков были прямо противоположны. Однако ситуации, в которых интересы игроков хотя и не совпадают, но уже необязательно являются противоположными, встречаются значительно чаще.

Игрок $\boldsymbol{A}$. Стратегии $\boldsymbol{A_1, \ldots, A_m}$, Игрок $\boldsymbol{B}$. Стратегии $\boldsymbol{B_1, \ldots, B_n}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c|ccc|} & \boldsymbol{B_1} & \cdot\cdot & \boldsymbol{B_n} \\ \boldsymbol{A_1} & a_{11} & \cdot\cdot & a_{1n} \\ \boldsymbol{A_2} & a_{21} & \cdot\cdot & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A_m} & a_{m1} & \cdot\cdot & a_{mn} \end{array} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{array}{c|ccc|} & \boldsymbol{B_1} & \cdot\cdot & \boldsymbol{B_n} \\ \boldsymbol{A_1} & b_{11} & \cdot\cdot & b_{1n} \\ \boldsymbol{A_2} & b_{21} & \cdot\cdot & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A_m} & b_{m1} & \cdot\cdot & b_{mn} \end{array}$$

$\boldsymbol{A}$ – платежная матрица игрока $\boldsymbol{A}$,

$\boldsymbol{B}$ – платежная матрица игрока $\boldsymbol{B}$,

ПРИМЕРЫ БИМАТРИЧНЫХ ИГР

ПРИМЕР 1: БОРЬБА ЗА РЫНКИ

Небольшая фирма A намерена сбывать товар на один из двух рынков, контролируемых другой более крупной фирмой B. Для этого A готова предпринять на одном из рынков некоторые приготовления, направленные на рекламу. B может воспрепятствовать этому, предприняв предупредительные меры. Не встречая противоречия, A захватывает рынок. При наличии препятствий – терпит поражение.

Уточнения: проникновение на первый рынок более выгодно и потребует больше средств для A. При этом победа A на первом рынке принесет ей больше средств, чем на втором, но а поражение будет более сокрушительным.

A_1, A_2 - выбор рынков игроком A

B_1, B_2 – выбор рынков игроком B

$$A = \begin{array}{c|cc} & B_1 & B_2 \\ \hline A_1 & -10 & 2 \\ A_2 & 1 & -1 \end{array} \qquad B = \begin{array}{c|cc} & B_1 & B_2 \\ \hline A_1 & 5 & -2 \\ A_2 & -1 & 1 \end{array}$$

ПРИМЕР 2: ДИЛЕММА УЗНИКОВ

Два узника A и B находятся в предварительном заключении по подозрению в совершении преступления. При отсутствии улик их осуждение зависит от того, будут ли они говорить или лгать. Если оба будут молчать, то наказание – лишь срок предварительного заключения. Если сознаются, то получат срок, учитывающий признание как смягчающее обстоятельство: потери **-6**. Если заговорит один из узников, а другой будет молчать, то тот, который заговорит – на свободу. Его потери **0**, а хранящий молчание получит **-9**.

$$A = \begin{array}{c|cc|} & \boldsymbol{M} & \boldsymbol{\varGamma} \\ \boldsymbol{M} & -1 & -9 \\ \boldsymbol{\varGamma} & 0 & -6 \end{array} \qquad B = \begin{array}{c|cc|} & \boldsymbol{M} & \boldsymbol{\varGamma} \\ \boldsymbol{M} & -1 & 0 \\ \boldsymbol{\varGamma} & -9 & -6 \end{array}$$

СМЕШАННАЯ СТРАТЕГИЯ

Во всех приведенных примерах интересы игроков не совпадают. То надо построить такое комплексное решение, которое удовлетворяло бы обоих игроков, т.е. надо найти такую равновесную ситуацию, явное отклонение от которой уменьшало бы выигрыш каждого игрока.

Смешанная стратегия в биматричных играх также определяет средний выигрыш игроков ***A*** и ***B***, но тут нет дискриминации игрока ***B***

$$H_A = \sum_{i=1} \sum_{k=1} a_{ik} p_i q_k$$

- выигрыш игрока ***A***

$$H_A = \sum_{i=1} \sum_{k=1} a_{ik} p_i q_k$$

- выигрыш игрока ***B***

Биматричные игры 2х2. Ситуация равновесия

Рассмотрим ситуацию, когда у каждого две стратегии:

$$A = \begin{array}{r|cc|} \boldsymbol{p} & a_{11} & a_{12} \\ \mathbf{1}\text{-}\boldsymbol{p} & a_{21} & a_{22} \\ \multicolumn{1}{r}{} & \multicolumn{1}{c}{\boldsymbol{q}} & \multicolumn{1}{c}{(\mathbf{1}\text{-}\boldsymbol{q})} \end{array} \qquad B = \begin{array}{r|cc|} \boldsymbol{p} & b_{11} & b_{12} \\ \mathbf{1}\text{-}\boldsymbol{p} & b_{21} & b_{22} \\ \multicolumn{1}{r}{} & \multicolumn{1}{c}{\boldsymbol{q}} & \multicolumn{1}{c}{(\mathbf{1}\text{-}\boldsymbol{q})} \end{array}$$

Запишем средний выигрыш исходя из формул:

$$H_A = \sum_{i=1} \sum_{k=1} a_{ik} p_i q_k$$

$$H_A = \sum \sum a_{ik} p_i q_k$$

ОСНОВНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ: будем говорить. Что пара чисел (p^*, q^*), где p^*, q^* - вероятности от 0 до 1, определяют равновесную ситуацию для всех p и q, если одновременно выполняются следующие неравенства:

$$H_A(p, q^*) \le H_A(p^*, q^*) \qquad H_B(p^*, q) \le H_B(p^*, q^*) \qquad (1)$$

ТЕОРЕМА НЭША: Всякая биматричная игра имеет хотя бы одну равновесную ситуацию (точку равновесия) в смешанных стратегиях

Выполнение неравенств **(1)** равносильно выполнению следующих неравенств:

$$H_A(0, q^*) \le H_A(p^*, q^*) \qquad H_B(p^*, 0) \le H_B(p^*, q^*)$$

$$H_A(1, q^*) \le H_A(p^*, q^*) \qquad H_B(p^*, 1) \le H_B(p^*, q^*)$$

Запишем средние выигрыши игроков $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ в более удобной форме:

$$\boldsymbol{H_A(p,q)} = (a_{11}\text{-}a_{12}\text{-}a_{21}\text{-}{+}a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p + (a_{21}\text{-}a_{22})q + a_{22}$$

$$\boldsymbol{H_B(p,q)} = (b_{11}\text{-}b_{12}\text{-}b_{21}+b_{22})pq + (b_{12} - b_{22})p + (b_{21}\text{-}b_{22})q + b_{22}$$

Рассмотрим $\boldsymbol{H_A(p,q)}$, полагая $\boldsymbol{p = 0}$, потом $\boldsymbol{p = 1}$:

$$\boldsymbol{H_A(0,q)} = (a_{21}\text{-}a_{22})q + a_{22}$$
$$\boldsymbol{H_A(1,q)} = (a_{11}\text{-}\ a_{12}\ \text{-}\ a_{21}+a_{22})q + (a_{21}\text{-}\ a_{22})q + a_{12}$$

Рассмотрим разности:

$$\boldsymbol{H_A(p,q) - H_A(1,q)} = (a_{11}\text{-}a_{12}\text{-}a_{21}+a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p - (a_{11}\text{-}\ a_{12}\text{-}$$
$$- a_{21}+a_{22})q + a_{22} - a_{12}$$
$$\boldsymbol{H_A(p,q) - H_A(0,q)} = (a_{11}\text{-}\ a_{12}\text{-}\ a_{21}+ a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p$$

Вводятся следующие обозначения:

$$\boldsymbol{C} = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}$$
$$\boldsymbol{\alpha} = a_{22} - a_{12}$$

Тогда
$$H_A(p,q) - H_A(1,q) = (p-1)(Cq-\alpha)$$
$$H_A(p,q) - H_A(0,q) = p(Cq-\alpha)$$

В случае, когда пара (p,q) определяет точку равновесия, все эти разности ≥ 0.

Для игрока $\boldsymbol{A}$
$$(p-1)(Cq-\alpha) \geq 0$$
$$p(Cq-\alpha) \geq 0$$

Для игрока $\boldsymbol{B}$

Рассмотрим $\boldsymbol{H_B}$, пологая $\boldsymbol{q = 0}$, потом $\boldsymbol{q = 1}$

$$\boldsymbol{H_B\,(p,0)} = (b_{12}\text{-}b_{22})p + b_{22}$$
$$\boldsymbol{H_B\,(p,1)} = (b_{11}\text{-}b_{12}\text{-}b_{21} + b_{22})p + (b_{12}\text{-}b_{22})p + b_{21}$$

Рассмотрим разности: $H_B(p,q)$ - $H_B\,(p,1)$ и $H_B(p,q)$ - $H_B\,(p,0)$

Вводятся следующие обозначения:

$$\boldsymbol{D} = b_{11}\text{-}b_{12}\text{-}b_{21}+b_{22}$$
$$\boldsymbol{\beta} = b_{22}\text{-}b_{21}$$

Для игрока $\boldsymbol{B}$

$$(q\text{-}1)(Dp\text{-}\beta) \geq 0$$
$$q(Dp\text{-}\beta) \geq 0$$

ВЫВОД

Для того, чтобы в биматричной игре

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

пара $\boldsymbol{(p,q)}$ определяла равновесную ситуацию, необходимо и достаточно выполнение следующих неравенств

$$(p\text{-}1)(Cq\text{-}\alpha) \geq 0$$
$$p(Cq\text{-}\alpha) \geq 0$$

$$\boldsymbol{C} = a_{11}\text{-}a_{12}\text{-}a_{21} + a_{22}, \ \boldsymbol{\alpha} = a_{22}\text{-}\ a_{12}$$

$$(q\text{-}1)(Dp\text{-}\beta) \geq 0$$
$$q(Dp\text{-}\beta) \geq 0$$

$$\boldsymbol{D} = b_{11}\text{-}b_{12}\text{-}b_{21} + b_{22}, \ \boldsymbol{\beta} = b_{22}\text{-}\ b_{21}$$

ПРИМЕР 1: БОРЬБА ЗА РЫНКИ

$$A = \begin{array}{c|cc|} & B_1 & B_2 \\ A_1 & -10 & 2 \\ A_2 & 1 & -1 \end{array} \qquad B = \begin{array}{c|cc|} & B_1 & B_2 \\ A_1 & 5 & -2 \\ A_2 & -1 & 1 \end{array}$$

$$C = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = -10 - 2 - 1 - 1 = -14, \ \alpha = a_{22} - a_{12} = -1 - 2 = -3$$

$$D = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22} = 5 + 2 + 1 + 1 = 9, \ \beta = b_{22} - b_{21} = 1 + 1 = 2$$

Получаем

$$(p-1)(-14q+3) \geq 0 \qquad (q-1)(9p-2) \geq 0$$

$$p(-14q+3) \geq 0 \qquad q(9p-2) \geq 0$$

Рассмотрим ситуацию для игрока A

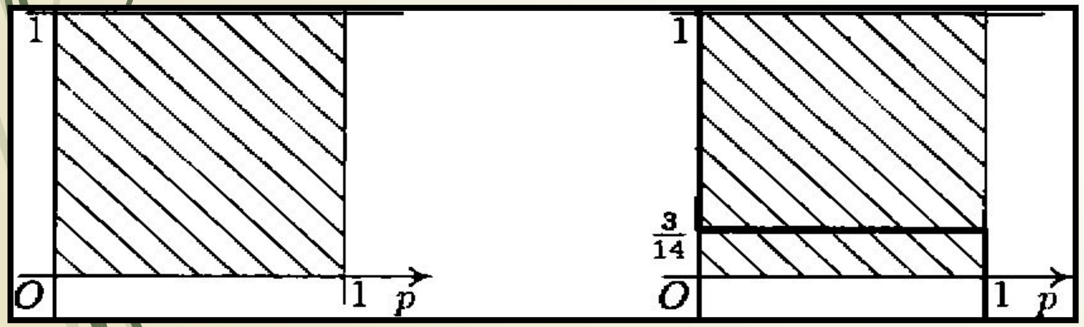
$$(p-1)(-14q+3) \geq 0$$

$$p(-14q+3) \geq 0$$

1. $p=1$ $\quad -14q+3 \geq 0\ ,\ q \leq 3/14$

2. $p=0$ $\quad -(-14q+3) \geq 0\ ,\ q \geq 3/14$

3. $0 < p < 1$ $\quad -14q+3 = 0\ ,\ q = 3/14$



Рассмотрим ситуацию для игрока B

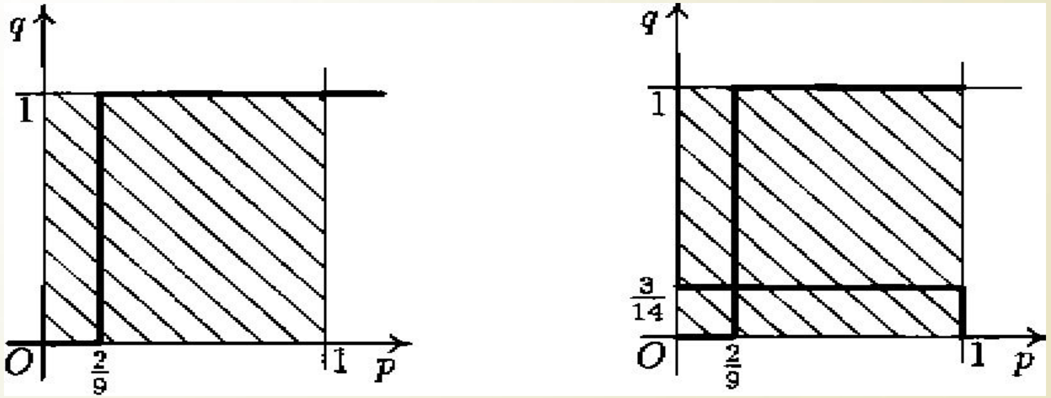
$$(q-1)(9p-2) \geq 0$$

$$q(9p-2) \geq 0$$

1. $q=1,\ p \geq 2/9$

2. $q=0,\ p \leq 2/9$

3. $0 < q < 1$ $\quad p = 2/9$



РЕШЕНИЕ

$$H_A = \sum \sum a_{ik} p_i q_k$$

$$\boldsymbol{H_A(p,q)} = (a_{11}\text{-}a_{12}\text{-}a_{21}\text{-}a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p + (a_{21}\text{-}a_{22})q + a_{22}$$

$$\boldsymbol{H_A}(2/9,\ 3/14) = \text{-}4/7$$

$$\boldsymbol{H_B(p,q)} = (b_{11}\text{-}b_{12}\text{-}b_{21}\text{-}b_{22})pq + (b_{12} - b_{22})p + (b_{21}\text{-}b_{22})q + b_{22}$$

$$\boldsymbol{H_B}(2/9,\ 3/14) = 1/3$$

ПРИМЕР 2: ДИЛЕММА УЗНИКОВ

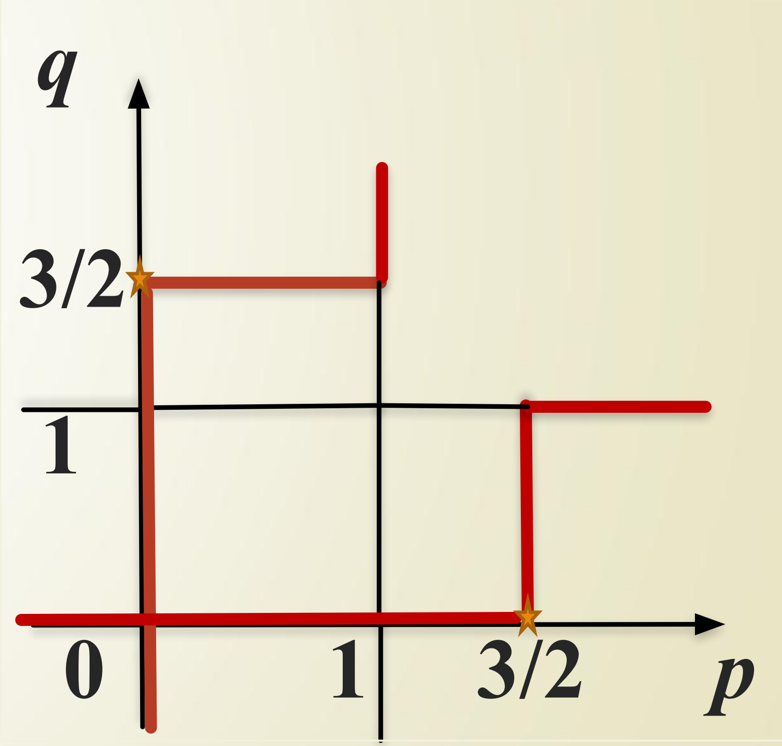
$$A = \begin{array}{c|cc|} & B_1 & B_2 \\ A_1 & -1 & -9 \\ A_2 & 0 & -6 \end{array} \qquad B = \begin{array}{c|cc|} & B_1 & B_2 \\ A_1 & -1 & 0 \\ A_2 & -9 & -6 \end{array}$$

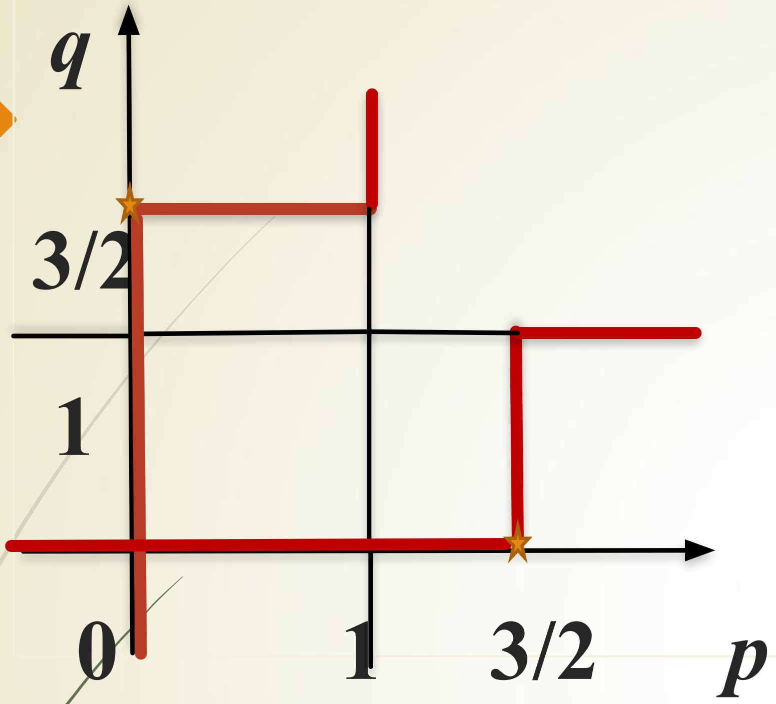
$C = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = 2,$ $\quad \alpha = a_{22} - a_{12} = 3$

$D = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22} = 2,$ $\quad \beta = b_{22} - b_{21} = 3$

1. $p=1, \; q \geq 3/2$
2. $p=0, q \leq 3/2$
3. $0 < p < 1, q = 3/2$

1. $q=1, \; p \geq 3/2$
2. $q=0, p \leq 3/2$
3. $0 < q < 1 \quad p = 3/2$





Единственная равновесная ситуация — **(0,0).** Это ситуация, в которой каждый из игроков выбирает вторую чистую стратегию — сознаться — и его потери составляют **6.**

Отклонение от ситуации равновесия одного из игроков не дает ему никаких преимуществ. Однако при одновременном отклонении обоих каждый из них может получить больший выигрыш, нежели в равновесной ситуации. Например, в ситуации **(1,1)**, когда оба игрока выбирают первую чистую стратегию — молчать, каждый из них теряет лишь **1**.

<u>По условию задачи сговор (создание коалиции) между игроками недопустим.</u>

ЗАДАЧА 1. СЕМЕЙНЫЙ СПОР

Два партнера договариваются о проведении одного из двух действий, *(1)* и *(2)* , каждое из которых требует их совместного участия. В случае осуществления первого из этих двух действий выигрыш первого партнера (игрок A) будет вдвое выше выигрыша второго партнера (игрок B). Напротив, в случае осуществления второго из этих двух действий выигрыш игрока A будет вдвое меньше выигрыша игрока B. Если же партнеры выполнят различные действия, то выигрыш каждого из них будет равен нулю.

$$A = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \\ \left| \begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right| \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \\ \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{array} \right| \end{array}$$

$\boldsymbol{C} = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = 3, \quad \boldsymbol{\alpha} = a_{22} - a_{12} = 1$

$\boldsymbol{D} = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22} = 3, \quad \boldsymbol{\beta} = b_{22} - b_{21} = 2$

$(p-1)(3q - 1) \geq 0$

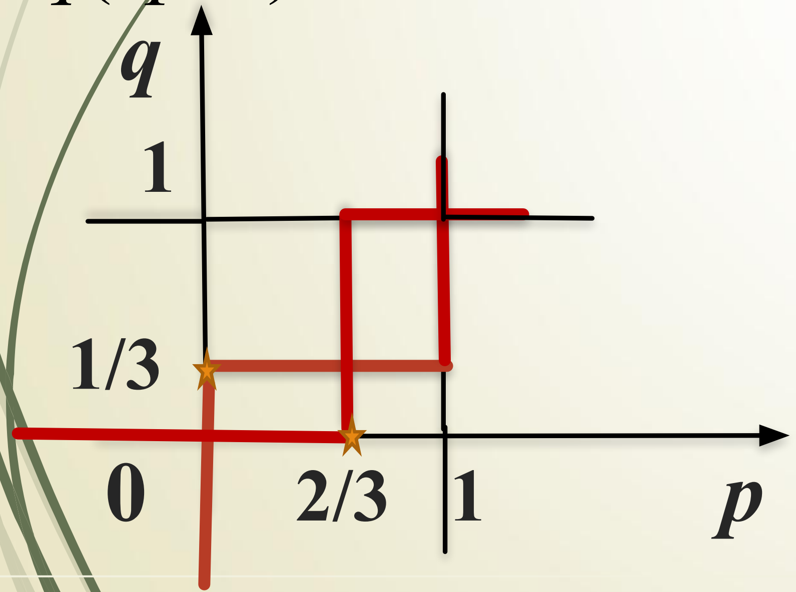
$p(3q - 1) \geq 0$

1. $p=1, \; q \geq 1/3$
2. $p=0, q \leq 1/3$
3. $0 < p < 1, q = 1/3$

$(q-1)(3p-2) \geq 0$

$q(3p-2) \geq 0$

1. $q=1, \; p \geq 2/3$
2. $q=0, p \leq 2/3$
3. $0 < q < 1 \quad p = 2/3$



1. $H_A(1, 1) = 2 \qquad H_B(1, 1) = 1$
2. $H_A(0, 0) = 1 \qquad H_B(0, 0) = 2$
3. $H_A(2/3, 1/3) = 2/3 \qquad H_B(2/3, 1/3) = 2/3$

ЗАДАЧА 2. СПОР АЛЬТРУИСТА И ЭГОИСТА

Однажды решили поспорить альтруист и эгоист. Для этого они называют одновременно либо своё имя, либо имя противника. Если альтруист – игрок A – называет своё имя, то с него снимают **10** очков за эгоизм, если же он называет имя противника, ему добавляют **20** очков за великодушие. Если эгоист – игрок B – называет своё имя, ему прибавляют **20** очков за эгоизм, если чужое – с него снимают **10** очков за мысли о противнике. Если же игроки называют одновременно одно и то же имя – им обоим прибавляют по **40** очков за синхронность. Как вести себя альтруисту и эгоисту, чтобы заработать как можно больше очков?

$$A = \begin{array}{c} \\ \textit{свое} \\ \textit{чужое} \end{array} \begin{array}{cc} \textit{свое} & \textit{чужое} \\ \left| \begin{array}{cc} -10 & 30 \\ 60 & 20 \end{array} \right| \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ \textit{свое} \\ \textit{чужое} \end{array} \begin{array}{cc} \textit{свое} & \textit{чужое} \\ \left| \begin{array}{cc} 20 & 30 \\ 60 & -10 \end{array} \right| \end{array}$$

$$\boldsymbol{C} = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = -80, \qquad \boldsymbol{\alpha} = a_{22} - a_{12} = -10$$

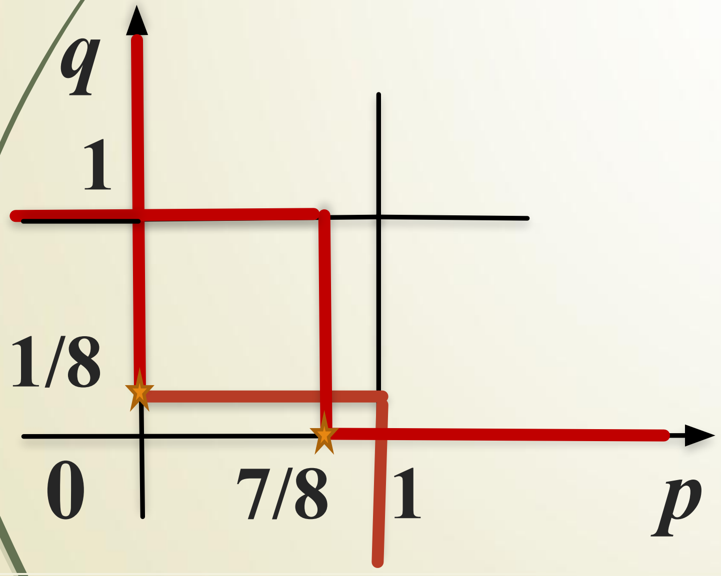
$$\boldsymbol{D} = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22} = -80, \qquad \boldsymbol{\beta} = b_{22} - b_{21} = -70$$

$$(p-1)(-80q+10) \geq 0$$
$$p(-80q+10) \geq 0$$

1. $p=0,\ q \geq 1/8$ 2. $p=1,\ q \leq 1/8$ 3. $0 < p < 1,\ q = 1/8$

$$(q-1)(-80p+70) \geq 0$$
$$q(-80p+70) \geq 0$$

1. $q=0,\ p \geq 7/8$ 2. $q=1,\ p \leq 7/8$ 3. $0 < q < 1 \quad p = 7/8$



1. $\boldsymbol{H}_A(0,1) = 60 \qquad \boldsymbol{H}_B(0,1) = 60$

2. $\boldsymbol{H}_A(1,0) = 30 \qquad \boldsymbol{H}_B(1,0) = 30$

3. $\boldsymbol{H}_A(7/8, 1/8) = 25 \qquad \boldsymbol{H}_B(7/8, 1/8) = 25$