

# Логика высказываний

- Высказывания
- Сложные высказывания
- Условные высказывания
- Таблицы истинности сложных высказываний
- Тавтологии и противоречия

# Высказывания

Определение 1 **Высказывание** – это повествовательное предложение, которое является либо истинным, либо ложным, но не может быть истинным или ложным одновременно.

# Высказывания

Пример 1 Все предложения, приведенные ниже, являются высказываниями.

1. Минск – столица Беларуси.
2. Марсель – столица Франции.
3.  $1 + 1 = 2$ .
4.  $2 + 2 = 3$ .

Высказывания 1 и 3 являются истинными, а высказывания 2 и 4 являются ложными.

# Высказывания

Пример 2 Предложения, приведенные ниже, не являются высказываниями.

1. Который час?
2. Вам следует внимательно слушать лекцию.
3.  $x + 1 = 2$ .
4.  $x + y = z$ .

Предложения 1 и 2 не являются высказываниями, так как это не повествовательные предложения.

Предложения 3 и 4 не являются высказываниями, так как мы не можем определить, истинны они или ложны.

# Высказывания

Введем **пропозициональные переменные** (**высказывательные переменные**), значениями которых являются высказывания. Будем обозначать их строчными буквами латинского алфавита:  $p, q, r, s, \dots$ .

**Логическое значение** высказывания – истина (Т), если это высказывание является истинным, и ложь (F), если это высказывание ложно.

# Высказывания

Раздел логики, изучающий высказывания, называется **исчислением высказываний** или **пропозициональной логикой**.

Греческий философ Аристотель, живший более 2300 лет тому назад, был первым, кто систематически изучил и изложил пропозициональную логику.

# Сложные высказывания

Рассмотрим методы построения новых высказываний из данных высказываний. Эти методы были изложены английским математиком Джорджем Булем в его работе «*The Laws of Thought*» в 1854 году.

Новые высказывания, называемые **сложными высказываниями**, строятся из уже имеющихся высказываний с помощью логических операций.

# Сложные высказывания

Новые высказывания, называемые **сложными высказываниями**, строятся из уже имеющихся высказываний с помощью логических операций.

Мы рассмотрим следующие логические операции:

- отрицание,
- конъюнкцию,
- дизъюнкцию,
- исключающее или,
- импликацию,
- биимпликацию.



# Отрицание высказывания

Определение 2 Отрицанием высказывания  $p$  называется высказывание «не  $p$ », которое обозначается через  $\neg p$ . Отрицание высказывания  $\neg p$  истинно, когда высказывание  $p$  ложно, и ложно в противном случае.

Таблица истинности для отрицания высказывания.

| $p$ | $\neg p$ |
|-----|----------|
| T   | F        |
| F   | T        |

## Отрицание высказывания

Пример 3 Построить отрицание высказывания «Смартфон Анны имеет не менее 32 GB памяти» и записать полученное высказывание на привычном русском языке.

Решение Отрицание высказывания:

«Не верно, что смартфон Анны имеет не менее 32 GB памяти».

Более привычный вариант отрицания высказывания:  
«Смартфон Анны имеет менее 32 GB памяти».

# Конъюнкция высказываний

Определение 3 **Конъюнкцией** высказываний  $p$  и  $q$  называется высказывание « $p$  и  $q$ », которое обозначается через  $p \wedge q$ . Конъюнкция  $p \wedge q$  истинна, когда оба высказывания  $p$  и  $q$  истинны и ложна в противном случае.

Таблица истинности  
для конъюнкции  
двух высказываний

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|-----|-----|--------------|
| T   | T   | T            |
| T   | F   | F            |
| F   | T   | F            |
| F   | F   | F            |

## Конъюнкция высказываний

Пример 4 Построить конъюнкцию высказываний  $p$  и  $q$ , где  $p$  – высказывание «На персональном компьютере Андрея свободно более 16 GB жесткого диска», а  $q$  – высказывание «Процессор персонального компьютера Андрея работает быстрее, чем 1 GHz», и записать полученное высказывание на привычном русском языке.

# Конъюнкция высказываний

$p$  – «На персональном компьютере Андрея свободно более 16 GB жесткого диска»,

$q$  – высказывание «Процессор персонального компьютера Андрея работает быстрее, чем 1 GHz»

Решение Конъюнкция высказываний  $p$  и  $q$ :

«На персональном компьютере Андрея свободно более 16 GB жесткого диска и процессор персонального компьютера Андрея работает быстрее, чем 1 GHz».

Более привычный вариант конъюнкции высказываний  $p$  и  $q$ :

«Персональный компьютер Андрея имеет более 16 GB памяти на жестком диске и работает быстрее, чем 1 GHz».

# Дизъюнкция высказываний

Определение 4 **Дизъюнкцией** высказываний  $p$  и  $q$  называется высказывание « $p$  или  $q$ », которое обозначается через  $p \vee q$ . Дизъюнкция  $p \vee q$  ложна, когда оба высказывания  $p$  и  $q$  ложны, и истинна в противном случае.

Таблица истинности  
для дизъюнкции  
двух высказываний

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|-----|-----|------------|
| T   | T   | T          |
| T   | F   | T          |
| F   | T   | T          |
| F   | F   | F          |

## Дизъюнкция высказываний

Пример 5 Построить дизъюнкцию высказываний  $p$  и  $q$ , где  $p$  – высказывание «На персональном компьютере Андрея свободно более 16 GB жесткого диска», а  $q$  – высказывание «Процессор персонального компьютера Андрея работает быстрее, чем 1 GHz», и записать полученное высказывание на привычном русском языке.

# Дизъюнкция высказываний

$p$  – высказывание «На персональном компьютере Андрея свободно более 16 GB жесткого диска»,

$q$  – высказывание «Процессор персонального компьютера Андрея работает быстрее, чем 1 GHz»

Решение. Дизъюнкция высказываний  $p$  и  $q$ :

«На персональном компьютере Андрея свободно более 16 GB жесткого диска, или процессор персонального компьютера Андрея работает быстрее, чем 1 GHz».

Более привычный вариант дизъюнкции высказываний  $p$  и  $q$ :

«Персональный компьютер Андрея имеет более 16 GB памяти на жестком диске или работает быстрее, чем 1 GHz ».



# Исключающее или

Определение 2 Исключающим или высказываний  $p$  и  $q$  называется высказывание « $p$  или  $q$ , но не одновременно  $p$  и  $q$ », которое обозначается через  $p \boxplus q$ . Исключающее или  $p \boxplus q$  истинно, когда в точности одно из высказываний  $p$  или  $q$  истинно, и ложно в противном случае.

Таблица истинности  
для исключающего  
или двух  
высказываний

| $p$ | $q$ | $p \boxplus q$ |
|-----|-----|----------------|
| T   | T   | F              |
| T   | F   | T              |
| F   | T   | T              |
| F   | F   | F              |

## Исключающее или

Пример 6 Исключающее или используется в следующей ситуации.

Студенты изучающие математический анализ или программирование, но не обе эти дисциплины одновременно, могут записаться на дополнительный курс по менеджменту.

Это значит, что студенты, изучающие обе дисциплины: математический анализ и программирование, – не могут изучать дополнительный курс по менеджменту.

# Условные высказывания

Определение 5 Пусть  $p$  и  $q$  – два высказывания. Высказывание «если  $p$ , то  $q$ » называется **условным высказыванием** и обозначается через  $p \rightarrow q$ . Условное высказывание  $p \rightarrow q$  ложно, когда  $p$  истинно и  $q$  ложно, и ложно в противном случае.

В условном высказывании  $p \rightarrow q$  высказывание  $p$  называется **условием**, а высказывание  $q$  **заключением**. Условное высказывание еще называется **импликацией**.

# Условные высказывания

Условное высказывание  $p \rightarrow q$  ложно, когда  $p$  истинно и  $q$  ложно, и ложно в противном случае.

Таблица истинности  
для условного  
высказывания  $p \rightarrow q$

| $p$ | $q$ | $p \rightarrow q$ |
|-----|-----|-------------------|
| T   | T   | T                 |
| T   | F   | F                 |
| F   | T   | T                 |
| F   | F   | T                 |

# Условные высказывания

Условное высказывание  $p \rightarrow q$  можно выразить с помощью следующих оборотов речи:

- из  $p$  следует  $q$ ;
- $p$  влечет  $q$ ;
- $p$  достаточно для  $q$ ;
- $p$  является достаточным условием для  $q$ ;
- $q$  необходимо для  $p$ ;
- $q$  является необходимым условием для  $p$ .

## Условные высказывания

Пример 7 Пусть  $p$  – высказывание «Мария изучает дискретную математику», а  $q$  – высказывание «Мария найдет интересную и высокооплачиваемую работу». Выразить высказывание  $p \rightarrow q$  на русском языке.

Решение Варианты высказывания:

«Если Мария изучает дискретную математику, то она найдет интересную и высокооплачиваемую работу»,

«Чтобы Мария нашла интересную и высокооплачиваемую работу, ей достаточно изучать дискретную математику».

# Конверсия, контрапозиция, инверсия

С условным высказыванием  $p \rightarrow q$  связаны еще три условных высказывания:

- высказывание  $q \rightarrow p$  называется **конверсией** высказывания  $p \rightarrow q$ ;
- высказывание  $\neg q \rightarrow \neg p$  называется **контрапозицией** высказывания  $p \rightarrow q$ ;
- высказывание  $\neg p \rightarrow \neg q$  называется **инверсией** высказывания  $p \rightarrow q$ ;

## Конверсия, контрапозиция, инверсия

Пример 7 Пусть  $p$  – высказывание «Футбольный клуб «Неман» выигрывает матч», а  $q$  – высказывание «Идет дождь». Построить конверсию, контрапозицию и инверсию импликации  $p \rightarrow q$  на русском языке.

### Решение

- Конверсия импликации  $p \rightarrow q$ : «Если идет дождь, то футбольный клуб «Неман» выигрывает матч».
- Контрапозиция импликации  $p \rightarrow q$ : «Если дождь не идет, то футбольный клуб «Неман» не выигрывает матч».
- Инверсия импликации  $p \rightarrow q$ : «Если футбольный клуб «Неман» не выигрывает матч, то дождь не идет».



# Биимпликация высказываний

Определение 6 Биимпликацией высказываний  $p$  и  $q$  называется высказывание « $p$  тогда и только тогда, когда  $q$ », которое обозначается через  $p \equiv q$ . Биимпликация  $p \equiv q$  истинна, когда оба высказывания  $p$  и  $q$  одновременно истинны или одновременно ложны, и ложна в противном случае.

# Биимпликация высказываний

Биимпликация  $p \leftrightarrow q$  истинна, когда оба высказывания  $p$  и  $q$  одновременно истинны или одновременно ложны, и ложна в противном случае.

Таблица истинности  
для биимпликации  
двух высказываний

| $p$ | $q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|-----|-----|-----------------------|
| T   | T   | T                     |
| T   | F   | F                     |
| F   | T   | F                     |
| F   | F   | T                     |

# Биимпликация высказываний

Биимпликацию  $p \leftrightarrow q$  можно выразить с помощью следующих оборотов речи:

- $p$  необходимо и достаточно для  $q$ ;
- $p$  является необходимым и достаточным условием для  $q$ ;
- $p$  если и только если  $q$ .

## Биимпликация высказываний

Пример 8 Пусть  $p$  – высказывание «Вы можете полететь из Минска в Париж на самолете», а  $q$  – высказывание «Вы купите билет на самолет, следующий рейсом Минск – Париж». Выразить высказывание  $p \rightarrow q$  на русском языке.

### Решение

«Вы можете полететь из Минска в Париж на самолете, если и только если Вы купите билет на самолет, следующий рейсом Минск – Париж».

# Таблицы истинности сложных высказываний

С помощью введенных логических операций конъюнкция, дизъюнкция, исключающее или, импликация, биимпликация и отрицание можно строить сложные высказывания, состоящие из произвольного числа пропозициональных переменных.

Для определения логического значения сложных высказываний следует использовать таблицы истинности, определяющие логические значения высказываний  $\neg p$ ,  $p \wedge q$ ,  $p \vee q$ ,  $p \oplus q$ ,  $p \supset q$ ,  $p \equiv q$ .

# Таблицы истинности сложных высказываний

Пример 9 Построить таблицу истинности сложного высказывания  $(p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$ .

| Таблица истинности высказывания $(p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$ . |     |          |                 |            |                                     |
|---|-----|----------|-----------------|------------|-------------------------------------|
| $p$   | $q$ | $\neg q$ | $p \vee \neg q$ | $p \vee q$ | $(p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$ |
| T   | T   |          |                 |            |                                     |
| T   | F   |          |                 |            |                                     |
| F   | T   |          |                 |            |                                     |
| F   | F   |          |                 |            |                                     |

# Таблицы истинности сложных высказываний

Пример 9 Построить таблицу истинности сложного высказывания  $(p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$ .

Таблица истинности высказывания  $(p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$ .

| $p$ | $q$ | $\neg q$ | $p \vee \neg q$ | $p \vee q$ | $(p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$ |
|-----|-----|----------|-----------------|------------|-------------------------------------|
| T   | T   | F        | T               | T          | T                                   |
| T   | F   | T        | T               | T          | T                                   |
| F   | T   | F        | F               | T          | F                                   |
| F   | F   | T        | T               | F          | F                                   |

# Таблицы истинности сложных высказываний

Пример 9 Построить таблицу истинности сложного высказывания  $(p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$ .

Таблица истинности высказывания  $(p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$ .

| $p$ | $q$ | $\neg q$ | $p \vee \neg q$ | $p \vee q$ | $(p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$ |
|-----|-----|----------|-----------------|------------|-------------------------------------|
| T   | T   | F        | T               | T          | T                                   |
| T   | F   | T        | T               | T          | T                                   |
| F   | T   | F        | F               | T          | F                                   |
| F   | F   | T        | T               | F          | F                                   |



# Таблицы истинности сложных высказываний

Пример 9 Построить таблицу истинности сложного высказывания  $(p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$ .

Таблица истинности высказывания  $(p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$ .

| $p$ | $q$ | $\neg q$ | $p \vee \neg q$ | $p \vee q$ | $(p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$ |
|-----|-----|----------|-----------------|------------|-------------------------------------|
| T   | T   | F        | T               | T          |                                     |
| T   | F   | T        | T               | F          |                                     |
| F   | T   | F        | F               | F          |                                     |
| F   | F   | T        | T               | F          |                                     |

# Таблицы истинности сложных высказываний

Пример 9 Построить таблицу истинности сложного высказывания  $(p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$ .

| Таблица истинности высказывания $(p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$ . |     |          |                 |            |                                     |
|---|-----|----------|-----------------|------------|-------------------------------------|
| $p$   | $q$ | $\neg q$ | $p \vee \neg q$ | $p \vee q$ | $(p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$ |
| T   | T   | F        | T               | T          | T                                   |
| T   | F   | T        | T               | F          | F                                   |
| F   | T   | F        | F               | F          | T                                   |
| F   | F   | T        | T               | F          | F                                   |

# Приоритет (порядок выполнения) логических операций

## Приоритет логических операций.

| Операция | Приоритет |
|----------|-----------|
| ⊗        | 1         |
| ⊗        | 2         |
| ⊗        | 3         |
| ⊗        | 4         |
| ⊗        | 5         |

Для уменьшения числа пар скобок в сложном высказывании установлен порядок выполнения логических операций, описанный в таблице.

# Приоритет (порядок выполнения) логических операций

## Приоритет логических операций.

| Операция          | Приоритет |
|-------------------|-----------|
| $\neg$            | 1         |
| $\wedge$          | 2         |
| $\vee$            | 3         |
| $\rightarrow$     | 4         |
| $\leftrightarrow$ | 5         |

Пример 10 Расставим скобки в сокращенной записи сложного высказывания

$p \vee q \wedge p \vee (p \vee q)$ :

1.  $(p \vee q)$   $\wedge p \vee (p \vee q)$ ,

2.  $(p \vee q) \wedge$   $(p \vee (p \vee q))$ .

# Тавтология

Определение 1 Сложное высказывание называется **тавтологией**, если оно истинно при любых истинностных значениях входящих в него пропозициональных переменных.

# Противоречие

Определение 2 Сложное высказывание называется **противоречием**, если оно ложно при любых истинностных значениях входящих в него пропозициональных переменных.

# Тавтологии и противоречия

Определение 3 Сложное высказывание называется **контингенцией**, если оно не является ни тавтологией ни противоречием.

# Тавтологии и противоречия

Пример 1 Можно построить тавтологию и противоречие, используя только одну пропозициональную переменную.

| Примеры тавтологии и противоречия |          |                 |                   |
|-----------------------------------|----------|-----------------|-------------------|
| $p$                               | $\neg p$ | $p \vee \neg p$ | $p \wedge \neg p$ |
| T                                 | F        | T               | F                 |
| F                                 | T        | T               | F                 |



# Тавтологии и противоречия

Пример 1 Можно построить тавтологию и противоречие, используя только одну пропозициональную переменную.

## Примеры тавтологии и противоречия

| $p$ | $\neg p$ | $p \vee \neg p$ | $p \wedge \neg p$ |
|-----|----------|-----------------|-------------------|
| T   | F        | T               | F                 |
| F   | T        | T               | F                 |

Высказывание  $p \vee \neg p$  всегда истинно, значит  $p \vee \neg p$  – тавтология.

Высказывание  $p \wedge \neg p$  всегда ложно, значит  $p \wedge \neg p$  – противоречие