

The background is a complex, abstract digital illustration. On the left, a large, bright yellow funnel-like shape is composed of several overlapping, semi-transparent layers. From the center of this funnel, numerous curved arrows in various colors (blue, orange, grey) radiate outwards, creating a sense of motion and flow. The right side of the image features a network of thin, grey lines and nodes, resembling a circuit board or a data network. The overall color palette is light and airy, with a mix of blues, greys, and the prominent yellow. The text is centered in a bold, dark green font.

Линейное программирование



ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Транспортная задача имеет большое значение при рационализации поставок важнейших видов промышленной и сельскохозяйственной продукции, а также оптимального планирования грузопотоков и работы различных видов транспорта.

К задачам транспортного типа сводятся многие другие задачи линейного программирования - задачи о назначениях, сетевые, календарного планирования.

ФОРМУЛИРОВКА ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Однородный груз сосредоточен у m поставщиков в объемах a_1, a_2, \dots, a_m . Данный груз необходимо доставить n потребителям в объемах b_1, b_2, \dots, b_n . Известны $c_{ij}, i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n$ - стоимости перевозки единицы груза от каждого i -го поставщика каждому j -му потребителю.

Требуется составить такой план перевозок, при котором запросы всех потребителей полностью удовлетворены и суммарные затраты на перевозку всех грузов минимальны.

ФОРМУЛИРОВКА ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

- Исходные данные транспортной задачи:

	b_1	b_2	...	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}
...
a_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}

ФОРМУЛИРОВКА ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

- Исходные данные задачи могут быть представлены также в виде вектора запасов поставщиков $A=(a_1, a_2, \dots, a_m)$, вектора запросов потребителей $B=(b_1, b_2, \dots, b_n)$ и матрицы стоимостей

$$C = \begin{Bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{Bmatrix}$$

ФОРМУЛИРОВКА ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

- В транспортных задачах под *поставщиками и потребителями* понимаются различные промышленные и сельскохозяйственные предприятия, заводы, фабрики, склады, магазины и т.д.
- *Однородными* считаются *грузы*, которые могут быть перевезены одним видом транспорта.
- Под *стоимостью перевозок* понимаются тарифы, расстояния, время, расход топлива и т.п.

ФОРМУЛИРОВКА ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

В транспортной задаче предполагается, что суммарные запасы поставщиков равны суммарным запросам потребителей, т.е. $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$

$(a_1 + a_2 + \dots + a_m = b_1 + b_2 + \dots + b_n)$.

Такая задача называется *задачей с правильным балансом*, а ее модель – *закрытой*. Если же это равенство не выполняется, то задача называется *задачей с неправильным балансом*, а ее модель – *открытой*.

ОПОРНОЕ РЕШЕНИЕ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

- **Опорным решением транспортной задачи называется любое допустимое решение, для которого вектор-условия, соответствующие положительным координатам, линейно независимы.**
- **Ввиду того, что ранг системы векторов-условий транспортной задачи равен $m+n-1$, опорное решение не может иметь отличных от нуля координат более $m+n-1$. Число отличных от нуля координат невырожденного опорного решения равно $m+n-1$, а для вырожденного опорного решения – меньше $m+n-1$.**

ОПОРНОЕ РЕШЕНИЕ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

- Любое допустимое решение транспортной задачи можно записать в ту же таблицу, что и исходные данные. Клетки таблицы транспортной задачи, в которых находится отличные от нуля или базисные нулевые перевозки, называются занятыми, остальные – незанятыми, или свободными.
- Клетки таблицы нумеруются так, что клетка, содержащая перевозку x_{ij} , т.е. стоящая в i -й строке и j -м столбце, имеет номер (i,j) . Каждой клетке с номером (i,j) соответствует переменная x_{ij} , которой соответствует вектор-условие A_{ij} .

ОПОРНОЕ РЕШЕНИЕ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

- Для того чтобы избежать трудоемких вычислений при проверке линейной независимости вектор-условий, соответствующих положительным координатам допустимого решения, вводят понятие *цикла*. Циклы также используются для перехода от одного опорного решения к другому.
- *Циклом* называется такая последовательность клеток таблицы транспортной задачи (i_1, j_1) , (i_1, j_2) , (i_2, j_2) , ..., (i_k, j_1) , в которой две и только две соседние клетки расположены в одной строке или столбце, причем первая и последняя клетки также находятся в одной строке или столбце.

ОПОРНОЕ РЕШЕНИЕ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

- Цикл изображают в таблице транспортной задачи в виде замкнутой ломаной линии. В любой клетке цикла происходит поворот звена ломаной линии на 90° .

(1.5) → (4.5) → (4.4) → (2.4) → (2.2) → (1.2)

ПН ПО	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	18	12	14	7	5	30
A_2	11	15	22	11	8	48
A_3	6	10	20	8	11	20
A_4	14	8	10	4	26	30
Заявки b_j	18	27	42	15	26	128

Метод северо-западного угла

- Существует ряд методов построения начального опорного решения, наиболее простым из которых является метод северо-западного угла.

В данном методе запасы очередного поставщика используются для обеспечения запросов очередных потребителей до тех пор, пока не будут исчерпаны полностью, после чего используются запасы следующего по номеру поставщика.



Заполнение таблицы транспортной задачи начинается с левого верхнего угла и состоит из ряда однотипных шагов.

- На каждом шаге, исходя из запасов очередного поставщика и запросов очередного потребителя, заполняется только одна клетка и соответственно исключается из рассмотрения один поставщик или потребитель.**

Осуществляется это таким образом:

1) если $a_i < b_j$, то $x_{ij} = a_i$ и исключается поставщик с номером i , $x_{ik} = 0, k = 1, 2, \dots, n, k \neq j, b'_j = b_j - a_i$;

2) если $a_i > b_j$, то $x_{ij} = b_j$, и исключается потребитель с номером j , $x_{kj} = 0, k = 1, 2, \dots, m, k \neq i, a'_i = a_i - b_j$;

3) если $a_i = b_j$, то $x_{ij} = a_i = b_j$, и исключается либо i -й поставщик, $x_{ik} = 0, k = 1, 2, \dots, n, k \neq j, b'_j = 0, k = 1, 2, \dots, m$, либо j -й потребитель, $x_{kj} = 0, k \neq i, a'_i = 0$.

МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ НАЧАЛЬНОГО ОПОРНОГО РЕШЕНИЯ

Нулевые перевозки принято заносить в таблицу только тогда, когда они попадают в клетку (i,j) , подлежащую заполнению. Если в очередную клетку таблицы (i,j) требуется поставить перевозку, а i -й поставщик или j -й потребитель имеет нулевые запасы или запросы, то в клетку ставится перевозка, равная нулю (базисный нуль), и после этого, как обычно, исключается из рассмотрения соответствующий поставщик или потребитель.

Таким образом, в таблицу заносят только базисные нули, остальные клетки с нулевыми перевозками остаются пустыми.

- Во избежание ошибок, после построения начального опорного решения необходимо проверить, что число занятых клеток равно $m+n-1$ и векторы-условия, соответствующие этим клеткам, линейно независимы.

Решение транспортной задачи, построенное методом северо-западного угла, является опорным.

ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ НАЧАЛЬНОГО ОПОРНОГО РЕШЕНИЯ методом северо-западного угла

Задача:

Поставщик	Потребитель			Запас
	B_1	B_2	B_3	
A_1	5	3	1	10
A_2	3	2	4	20
A_3	4	1	2	30
Потребность	15	20	25	

Стоимость доставки единицы продукции от поставщика к потребителю располагается в правом нижнем углу ячейки

ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ НАЧАЛЬНОГО ОПОРНОГО РЕШЕНИЯ

методом северо-западного угла

Нахождение начального опорного решения:

Для решения задачи необходимо выполнение следующего условия: суммарные запасы продукции у поставщиков должны равняться суммарной потребности потребителей.

Проверим.

Запасы поставщиков: $10+20+30=60$

Потребность потребителей: $15+20+25=60$

Вывод: суммарные запасы продукции у поставщиков равны суммарной потребности потребителей.

ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ НАЧАЛЬНОГО ОПОРНОГО РЕШЕНИЯ методом северо-западного угла

Начинаем заполнять таблицу от верхнего левого угла и постепенно движемся к правому нижнему. От северо-запада к юго-востоку.

Поставщик	Потребитель			Запас
	B_1	B_2	B_3	
A_1	? 5	3	1	10
A_2	3	2	4	20
A_3	4	1	2	30
Потребность	15	20	25	

$$10 = \min\{15, 10\}$$

ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ НАЧАЛЬНОГО ОПОРНОГО РЕШЕНИЯ методом северо-западного угла

Поставщик	Потребитель			Запас
	B_1	B_2	B_3	
A_1	1 5	3	1	нет
A_2	0 ? 3	2	4	20
A_3	4	1	2	30
Потребность	5	20	25	

$$5 = \min\{5, 20\}$$

ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ НАЧАЛЬНОГО ОПОРНОГО РЕШЕНИЯ методом северо-западного угла

Поставщик	Потребитель			Запас
	B_1	B_2	B_3	
A_1	10 5	3	1	нет
A_2	5 3	? 2	4	15
A_3	4	1	2	30
Потребность	нет	20	25	

$$15 = \min\{20, 15\}$$

ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ НАЧАЛЬНОГО ОПОРНОГО РЕШЕНИЯ методом северо-западного угла

Поставщик	Потребитель			Запас
	B_1	B_2	B_3	
A_1	10 5	3	1	нет
A_2	5 3	15 2	4	нет
A_3	4	? 1	2	30
Потребность	нет	5	25	

$$5 = \min\{5, 30\}$$

ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ НАЧАЛЬНОГО ОПОРНОГО РЕШЕНИЯ методом северо-западного угла

Поставщик	Потребитель			Запас
	B ₁	B ₂	B ₃	
A ₁	1 5	0 3	1 1	нет
A ₂	5 3	15 2	4 4	нет
A ₃	4 4	5 1	? 2	25
Потребность	нет	нет	25	

$$25 = \min\{25, 25\}$$

ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ НАЧАЛЬНОГО ОПОРНОГО РЕШЕНИЯ методом северо-западного угла

Поставщик	Потребитель			Запас
	B_1	B_2	B_3	
A_1	10 5	3	1	нет
A_2	5 3	15 2	4	нет
A_3	4	5 1	25 2	нет
Потребность	нет	нет	нет	

Стоимость доставки продукции, для начального решения,

$$10*5+5*3+15*2+5*1+25*2=150 \text{ ден. ед.}$$