

Задача линейного
программирования.
Двойственная задача,
двойственный симплекс-метод

Прямая задача

Двойственная задача

$$\left\{ \begin{array}{l} \min CX \\ AX \geq b \\ X \geq 0 \end{array} \right. \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \max b^T Y \\ A^T Y \leq C^T \\ Y \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \max CX \\ AX \leq b \\ X \geq 0 \end{array} \right. \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \min b^T Y \\ A^T Y \geq C^T \\ Y \geq 0 \end{array} \right.$$

$$CX_{opt} = b^T Y_{opt}$$

Прямая задача

Двойственная задача

$$\begin{cases} \min CX \\ AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \max b^T Y \\ A^T Y \leq C^T \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max CX \\ AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \min b^T Y \\ A^T Y \geq C^T \end{cases}$$

ОДР пуста



ОДР незамкнута

ОДР незамкнута



ОДР пуста

Рассмотрим ЗЛП

$$\left\{ \begin{array}{l} \max(x_1 + 3x_2) \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \max(1x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4) \\ 2x_1 - 1x_2 + 1x_3 + 0x_4 = 1 \\ 1x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 1x_4 = 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \min(y_1 + y_2) \\ 2y_1 + y_2 \geq 1 \\ -y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ y_1 + 0y_2 \geq 0 \\ 0y_1 + y_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \max CX \\ AX = b \\ X \geq 0 \end{array} \right. \quad \longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \min b^T Y \\ A^T Y \geq C^T \end{array} \right.$$

Рассмотрим ЗЛП

$$\begin{cases} \max(3x_1 + 4x_2) \\ 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ 6x_1 + 7x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min(5y_1 + 8y_2) \\ 2y_1 + 6y_2 \geq 3 \\ y_1 + 7y_2 \geq 4 \\ y_1 \geq 0 \\ y_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max CX \\ AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \min b^T Y \\ A^T Y \geq C^T \\ Y \geq 0 \end{cases}$$

Прямой
симплекс-метод

Двойственный
симплекс-метод

Допустимость

$$b_i \geq 0 \longleftrightarrow c_j \leq 0$$

Оптимальность

$$c_j \leq 0 \longleftrightarrow b_i \geq 0$$

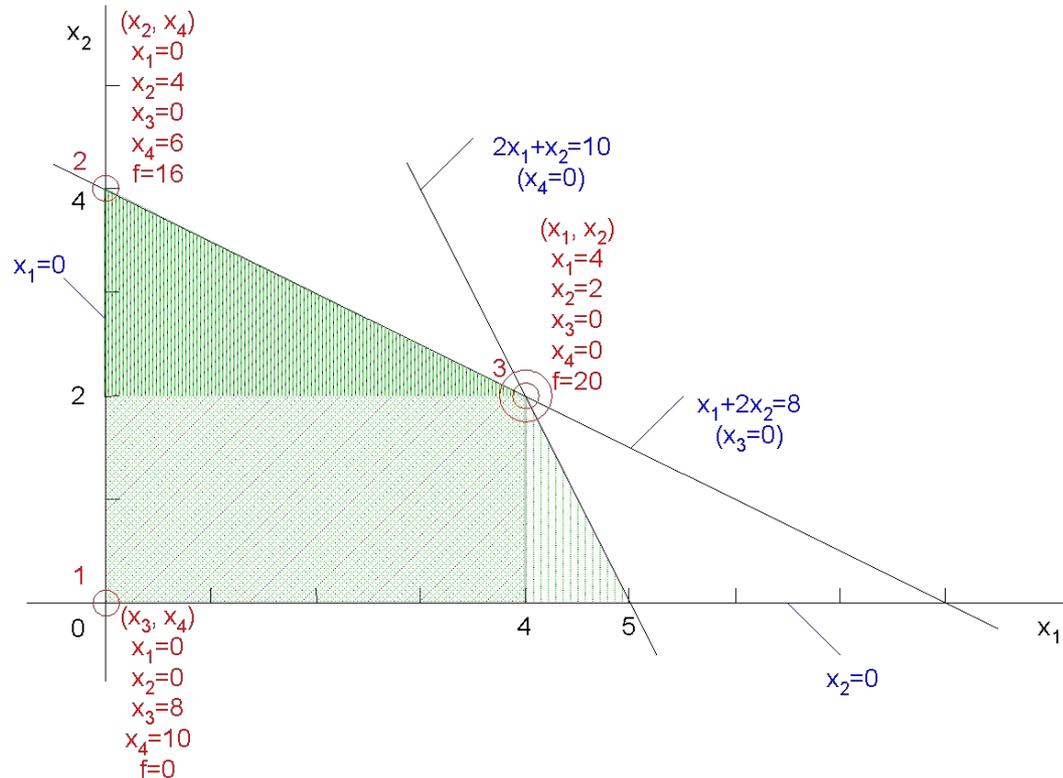
Неограниченность

$$\forall r_i \in \mathcal{D} \quad r > 0 \longleftrightarrow \forall s_j \in \mathcal{D} \quad s < 0$$

Рассмотрим ЗЛП

$$\begin{cases} \max(3x_1 + 4x_2) \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

	x_3	x_4	b
x_1	1/3	-2/3	4
x_2	-2/3	1/3	2
f	-5/3	-2/3	20



Добавим дополнительное ограничение

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 + x_5 = 5$$

$$x_5 = 5 - x_1 - x_2$$

$$x_1 = \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 + 4$$

$$x_2 = -\frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 + 2$$

$$x_5 = 5 - x_1 - x_2 = 5 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 - 4 +$$

$$+ \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 - 2 = -1 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4$$

	x_3	x_4	b
x_1	1/3	-2/3	4
x_2	-2/3	1/3	2
f	-5/3	-2/3	20

$$x_5 = -1 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4$$

Прямой
симплекс-метод

	x_3	x_4	b
x_1	$1/3$	$-2/3$	4
x_2	$-2/3$	$1/3$	2
x_5	$1/3$	$1/3$	-1
f	$-5/3$	$-2/3$	20

Базис недопустим

Базис оптимален

$$x_5 = -1 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4$$

Двойственный
симплекс-метод

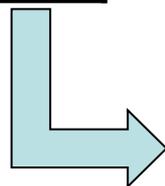
	x_3	x_4	b
x_1	$1/3$	$-2/3$	4
x_2	$-2/3$	$1/3$	2
x_5	$1/3$	$1/3$	-1
f	$-5/3$	$-2/3$	20

Базис неоптимален

Базис допустим

Двойственный симплекс-метод

	x_3	x_4	b
x_1	1/3	-2/3	4
x_2	-2/3	1/3	2
x_5	1/3	1/3	-1
f	-5/3	-2/3	20



	x_3	x_5	Базис
x_1	1	-2	2
x_2	-1	1	3
x_4	-1	3	3
Базис допустим	-1	-2	18

